

Санкт-Петербургский государственный университет

В.А. Антонов, И.И. Никифоров, К.В. Холшевников

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ  
ГРАВИТАЦИОННОГО  
ПОТЕНЦИАЛА И НЕКОТОРЫЕ  
СЛУЧАИ ЕГО ЯВНОГО  
ВЫРАЖЕНИЯ**

Санкт-Петербург

2008

ББК 22.6

А 72

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. С.А.Кутузов  
(С.-Петерб. гос. ун-т),  
д-р физ.-мат. наук, проф., заслуженный  
деятель науки РФ В.М.Чечёткин  
(Институт прикладной математики  
им. М.В.Келдыша РАН)

*Печатается по постановлению  
Редакционно-издательского совета  
математико-механического факультета  
С.-Петербургского государственного университета*

**Антонов В.А., Никифоров И.И., Холшевников К.В.**

А 72

Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения – СПб., 2008. – 208 с.  
ISBN 978-5-288-04733-6

В монографии изложены базовые элементы теории гравитационного (и формально совпадающего с ним электростатического) потенциала и рассмотрены важнейшие случаи явного его выражения через элементарные и специальные функции. Для пространств различной размерности подробно описаны свойства оператора Лапласа в многочисленных системах криволинейных координат, общие свойства потенциала и методы его нахождения. Отдельно рассмотрены потенциал на прямой, логарифмический потенциал одномерных и двумерных тел, ньютонов потенциал одномерных, двумерных и трехмерных тел, потенциал в  $N$ -мерном пространстве. Для многих конкретных тел (большой частью однородных) выведены явные выражения потенциала. Часть результатов получена авторами.

Книга может быть полезной и служить справочником для специалистов в области гравиметрии, геодезии, небесной механики и звездной динамики, электростатики, а также может использоваться в качестве учебного пособия студентами и аспирантами соответствующего профиля.

**ББК 22.6**

© В.А.Антонов, И.И.Никифоров, К.В.Холшевников, 2008

© С.-Петербургский гос. университет, 2008

ISBN 978-5-288-04733-6

# Оглавление

Введение . . . . .	7
<b>Глава 1. Оператор Лапласа . . . . .</b>	<b>13</b>
1.1 Оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$ . . . . .	13
1.2 Оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$ в криволинейных координатах . . . . .	17
1.3 Оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$ в сферических координатах . . . . .	22
1.4 Оператор Лапласа в криволинейных координатах в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N-2}$ . . . . .	25
1.4.1 Полярные координаты . . . . .	25
1.4.2 Координаты, связанные с подобными эллипсами . . . . .	27
1.4.3 Координаты, связанные с софокусными эллипсами . . . . .	29
1.4.4 Параболические координаты . . . . .	33
1.4.5 Биполярные координаты . . . . .	34
1.5 Оператор Лапласа в криволинейных координатах в $\mathbb{R}^3$ . . . . .	36
1.5.1 Сферические координаты . . . . .	36
1.5.2 Координаты, индуцированные координатами на плоскости . . . . .	37
1.5.3 Эллипсоидальные координаты . . . . .	44
<b>Глава 2. Потенциал в пространствах различной размерности: общие свойства . . . . .</b>	<b>58</b>
2.1 Потенциал точки . . . . .	58
2.2 Потенциал протяженного тела . . . . .	60
2.3 Потенциал однородной $n$ -мерной плоскости . . . . .	60
2.4 Дифференциальные свойства потенциала протяженного тела . . . . .	65
2.4.1 Окрестность границы тела . . . . .	65

2.4.2	Асимптотика на бесконечности . . . . .	70
2.5	Симметрия . . . . .	71
2.6	Формулы Остроградского–Гаусса и Пуассона . . .	74
<b>Глава 3.</b>	<b>Потенциал на прямой (линейный потенциал)</b>	<b>76</b>
3.1	Отрезок с произвольной плотностью . . . . .	77
3.2	Однородный отрезок . . . . .	78
<b>Глава 4.</b>	<b>Логарифмический потенциал одномерных тел</b>	<b>79</b>
4.1	Отрезок . . . . .	81
4.1.1	Общий случай . . . . .	81
4.1.2	Однородный отрезок . . . . .	82
4.1.3	Пример неоднородного отрезка . . . . .	83
4.2	Однородная прямая . . . . .	85
4.3	Окружность . . . . .	85
4.3.1	Общий случай . . . . .	85
4.3.2	Однородная окружность . . . . .	86
4.3.3	Неоднородная окружность . . . . .	86
4.4	Эллипс . . . . .	89
4.4.1	Общий случай . . . . .	89
4.4.2	Пример неоднородного эллипса . . . . .	90
<b>Глава 5.</b>	<b>Логарифмический потенциал двумерных тел</b>	<b>92</b>
5.1	Однородный прямоугольник . . . . .	94
5.2	Однородный треугольник . . . . .	96
5.2.1	Потенциал в вершине треугольника . . . . .	96
5.2.2	Внутренний потенциал треугольника . . . . .	98
5.2.3	Внешний потенциал треугольника . . . . .	99
5.3	Однородный многоугольник . . . . .	101
5.4	Круг . . . . .	101
5.4.1	Круг с радиальным изменением плотности . . . . .	101
5.4.2	Однородный круг . . . . .	102
5.4.3	Круг с синусоидальной плотностью . . . . .	102
5.5	Сплошной эллипс . . . . .	103
<b>Глава 6.</b>	<b>Ньютонов потенциал одномерных тел</b>	<b>106</b>
6.1	Прямолинейный отрезок . . . . .	107
6.1.1	Однородный отрезок . . . . .	107
6.1.2	Неоднородный отрезок . . . . .	108
6.2	Прямая . . . . .	111
6.2.1	Однородная прямая . . . . .	111
6.2.2	Неоднородная прямая . . . . .	111
6.3	Окружность . . . . .	114

6.3.1	Общий случай . . . . .	114
6.3.2	Однородная окружность . . . . .	115
6.3.3	Неоднородная окружность . . . . .	116
6.3.4	Дуга однородной окружности . . . . .	117
6.4	Эллипс . . . . .	118
6.4.1	Общий случай . . . . .	118
6.4.2	Неоднородный эллипс . . . . .	118
<b>Глава 7.</b>	<b>Ньютонов потенциал двумерных тел . . . . .</b>	<b>122</b>
7.1	Однородный прямоугольник . . . . .	125
7.2	Однородный треугольник . . . . .	128
7.2.1	Потенциал над вершиной треугольника . . . . .	128
7.2.2	Потенциал треугольника . . . . .	130
7.3	Однородный многоугольник . . . . .	132
7.4	Однородная плоскость . . . . .	132
7.5	Круг . . . . .	134
7.6	Сплошной эллипс . . . . .	137
7.7	Однородная сфера . . . . .	138
<b>Глава 8.</b>	<b>Ньютонов потенциал трехмерных тел . . . . .</b>	<b>139</b>
8.1	Однородный брус . . . . .	141
8.2	Однородный тетраэдр . . . . .	146
8.2.1	Потенциал в вершине тетраэдра . . . . .	146
8.2.2	Потенциал тетраэдра . . . . .	147
8.3	Однородный многогранник . . . . .	151
8.4	Тело сферической структуры . . . . .	152
8.5	Тело эллипсоидальной структуры . . . . .	154
<b>Глава 9.</b>	<b>Потенциал некоторых правильных тел</b>	
	<b>в <math>N</math>-мерном пространстве . . . . .</b>	<b>161</b>
9.1	Однородная сфера . . . . .	161
9.2	Тело сферической структуры . . . . .	162
9.3	Однородный шар радиусом $a$ . . . . .	163
9.4	Тело эллипсоидальной структуры . . . . .	163
<b>Глава 10.</b>	<b>Вспомогательные математические формулы</b>	<b>168</b>
10.1	Ряды . . . . .	168
10.2	Неопределенные интегралы . . . . .	170
10.3	Определенные интегралы . . . . .	176
10.4	Эллиптические интегралы . . . . .	181
10.4.1	Эллиптические интегралы I и II рода . . . . .	182
10.4.2	Эллиптические интегралы III рода . . . . .	187
10.5	Дилогарифм Эйлера . . . . .	192
10.5.1	Формулы приведения и частные значения . . . . .	193

10.5.2	Вычисление $L(z)$ . . . . .	193
10.5.3	Интегралы, выражающиеся через дилогарифм Эйлера . . . . .	198
10.6	Тождества с частными производными . . . . .	198
	Литература . . . . .	200
	Именной указатель . . . . .	203
	Предметный указатель . . . . .	204

## Введение

Настоящая монография посвящена теории тяготения, важнейшей частью которой является теория гравитационного потенциала.

В основе теории притяжения лежит закон всемирного тяготения, открытый Исааком Ньютоном (1643–1727) и опубликованный в его знаменитых *Philosophiae naturalis principia mathematica* в 1687 г. Понятие потенциала введено позже Адриеном Мари Лежандром (1752–1833) и Жозефом Луи Лагранжем (1736–1813). По своему смыслу потенциал — это работа, которую надо затратить для удаления частицы единичной массы из гравитационного поля произвольных неподвижных масс на бесконечность. Для электростатического поля говорят о работе, необходимой для ухода единичного отрицательного заряда из поля, создаваемого произвольными положительными зарядами. Такое определение подразумевает, что работа не зависит от формы пути. Это эквивалентно тому факту, что гравитационная или электростатическая сила как вектор образует поле градиента некоторой скалярной функции, которая и есть потенциал (с точностью до массы или заряда частицы). Установление потенциальности гравитационных полей очень помогло систематизации и упрощению выкладок, бывших громоздкими и не совсем надежными. Не менее важно, что понятие потенциала послужило ступенькой к обоснованию в более позднюю эпоху закона сохранения энергии.

Наиболее яркие применения понятия потенциала относятся к небесной механике, особенно к той ее части, которая занимается фигурами равновесия гравитирующих небесных тел, а также к гравиметрии. Красота теории, ее важные приложения, казавшиеся вначале непреодолимыми математические трудности привлекли к ней внимание выдающихся ученых. Назовем лишь А.Клеро,

П.С.Лапласа, С.Д.Пуассона, Дж.Грина, К.Ф.Гаусса, А.Пуанкаре, А.М.Ляпунова. И в наше время теория продолжает развиваться. В качестве иллюстрации нетривиальности не только самой теории, но и ее приложений заметим, что вычисление потенциала однородного трехосного эллипсоида потребовало усилий трех поколений ученых. Желая ознакомиться с темой подробнее мы рекомендуем приведенные в списке литературы монографии и руководства (Антонов и др., 1989), (Брело, 1974), (Владимиров, 2003), (Гюнтер, 1953), (Жуковский, 1950), (Кондратьев, 2007), (Ландкоф, 1966), (Михлин, 1977), (Полянин, 2001), (Сретенский, 1946), (Субботин, 1949), (Тиман, Трофимов, 1968), (Уэрмер, 1980), (Холшевников и др., 2005), (Шкодров, 1989), (Winney, Tremaine, 2008), (Poincaré, 1899). История вопроса подробнейшим образом описана в монографии (Тодхантер, 2002).

Настоящая книга преследует цели двойного рода. С одной стороны, здесь собраны из разных источников свойства потенциалов при произвольных распределениях плотностей. Под «плотностью» может пониматься как плотность гравитирующих масс, так и плотность зарядов статического электрического поля — математически это безразлично. Попутно излагаются свойства оператора Лапласа  $\Delta$ , поскольку с его помощью описывается обратная связь плотности с заданным потенциалом. Необходимость представлять себе общие свойства потенциала вытекает из того, что не всегда удается выписать конкретные выражения для потенциалов, численное же интегрирование (или вообще численное решение уравнения Пуассона) часто требует большой затраты времени и страдает недостатком наглядности и общности. Знание теории потенциала иногда позволяет почти мгновенно отвечать на вопросы, которые иначе потребовали бы длительных выкладок.

С другой стороны, особенно важны те случаи, когда для потенциалов удается найти вполне конкретные выражения по заданным плотностям. В книге собраны различные такие случаи из разных источников. Одни примеры общеизвестны в том смысле, что встречаются во многих справочниках и руководствах. Другие, обычно требующие довольно изощренных приемов, известны в меньшей степени. Для некоторых тел нам не удалось найти в литературе компактного выражения потенциала через относительно простые функции (возможно, мы получили их впервые). Таковы, например, эллипсы с определенным образом заданной плотностью — в частно-



сти, знаменитое в небесной механике гауссово кольцо (эллипс, элемент массы которого пропорционален времени, проводимому планетой в элементе длины эллипса).

Все примеры мы тщательно проверили во избежание ошибок при переписывании формул из одного руководства в другое. Расчеты приведены в «открытую», т.е. их может детально проверить каждый, владеющий техникой дифференцирования и знакомый с таблицей основных интегралов. Более сложные интегралы от элементарных функций, встречающиеся в промежуточных выкладках, выделены в самостоятельную главу. Опять-таки неопределенные интегралы каждый желающий может проверить дифференцированием.

Некоторые определенные интегралы по окружности вычислены с помощью разложения производящей функции в ряд Фурье.

Кроме прямого интегрирования, мы используем для нахождения потенциалов следующие приемы:

1. Сведение интеграла по области к интегралу по границе области (в основном для однородных тел).
2. Нахождение потенциала на границе с последующим продолжением внутрь и наружу, т.е. решением соответствующей задачи Дирихле.
3. Угадывание потенциала как решения уравнения Лапласа в подходящих координатах с точностью до некоторых постоянных. Здесь часто помогают соображения симметрии. Постоянные находятся из условий асимптотики в окрестности тела и на бесконечности.
4. Модификация предыдущего приема с использованием уравнения Пуассона.

Приемы 2–4 в значительной мере опираются на методику представления уравнения Лапласа или Пуассона в криволинейных координатах. Реальный успех достигается тогда, когда в новых координатах происходит разделение переменных, поэтому выбор таких специальных систем сравнительно невелик. Наиболее употребительные описаны в книге.

В некоторых случаях мы не ограничивались каким-либо одним методом, а применяли перекрестную проверку. Из специальных

функций широко используются только эллиптические интегралы. Простейшие свойства последних описаны в главе 10. Интегралы I и II рода в форме Якоби прекрасно представлены во многих руководствах и справочниках, поэтому мы приводим нужные формулы, опуская доказательства. Интегралам же III рода в литературе уделяется гораздо меньше внимания. Более того, часто встречаются опечатки. Поэтому соответствующие формулы мы снабжаем доказательствами.

В единичных случаях введены дилогарифм Эйлера и функция Макдональда. Свойства последней хорошо описаны в руководствах по бесселевым функциям (*Ватсон, 1949*). Напротив, дилогарифм обделен вниманием и мы посвятили ему специальный параграф главы 10. Несводимость задачи к эллиптическим интегралам и другим употребительным функциям, а иногда просто громоздкость такого сведения, хотя бы и выполнимого в принципе, порой заставляла нас ограничиваться выписыванием значений потенциала не во всем пространстве, а на отдельных характерных линиях и плоскостях. Кстати, появление гиперэллиптических интегралов и вообще сложных функций, выходящих за пределы некоторой установившейся «обоймы», приносит все равно мало радости из-за сложности и слабой изученности их свойств, включая часто и отсутствие отлаженных вычислительных программ. Несколько особняком стоит глава 9, в которой исследуются потенциалы шаров и эллипсоидов в пространстве произвольной размерности. Потенциал эллипсоида сведен к однократному гиперэллиптическому интегралу. Мы не стали приводить его к какой-либо из нормальных форм, в отличие от простейших случаев  $N = 3$  и  $N = 2$ , ввиду отсутствия какого-либо ощутимого выигрыша.

Предполагается знакомство читателя с курсами математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений и математической физики. В современных руководствах принято к каждой главе прилагать список задач и упражнений. Мы не делаем этого, поскольку книга процентов на 70 и состоит из задач. В каждой основной главе для затравки мы решали сначала одну-две простые задачи. А следующие столь сложны, что мы посчитали некорректным устраниться и оставить все выкладки читателю.

Схема изложения материала выглядит следующим образом.

В главе 1 излагаются свойства оператора Лапласа  $\Delta$  в  $\mathbb{R}^N$  при произвольном  $N \geq 1$ . Получены представления  $\Delta$  в различных си-

стемах криволинейных координат, найдены простейшие решения уравнения Лапласа. Случаи  $N = 2$ ,  $N = 3$  исследованы особенно подробно.

В главе 2 определяется потенциал точки  $Q'$  в пространстве  $\mathbb{R}^N$  произвольной размерности  $N \geq 1$  как элементарное (сингулярное) решение уравнения Лапласа. Для физика естественнее выбрать другой путь: определить потенциал точки  $Q'$  в  $\mathbb{R}^3$  как гравитационную энергию пробной точки  $Q$  в силовом поле, подчиненном закону обратных квадратов, а потом доказать гармоничность потенциала в  $\mathbb{R}^3$  вне притягивающей точки. Наш путь менее физичен, но более универсален как пригодный для любой размерности  $N$ . Теоретически оба подхода равноправны. Далее в этой главе определяется потенциал  $V(Q)$  протяженного тела  $T$  размерности  $n$ ,  $1 \leq n \leq N$ . Устанавливаются дифференциальные свойства  $V$  в  $\mathbb{R}^N$  и асимптотика  $V$  при  $Q \rightarrow T$  и  $Q \rightarrow \infty$ . Выводятся формулы Остроградского–Гаусса и Пуассона. Обсуждаются свойства симметрии потенциала. В некоторых случаях, когда материал хорошо изложен в доступных учебниках, мы опускали детали доказательства.

В главах 3–8 вычисляются потенциалы конкретных  $n$ -мерных тел в  $\mathbb{R}^N$ ,  $1 \leq n \leq N \leq 3$ . В начале каждой главы напоминаются выведенные в главе 2 свойства для соответствующих  $n$ ,  $N$ .

В главе 3  $N = n = 1$ . Дается интерпретация потенциала отрезка в  $\mathbb{R}^1$ , как потенциала бесконечной пластины в  $\mathbb{R}^3$ .

В главе 4  $N = 2$ ,  $n = 1$ . Дается интерпретация потенциала кривой в  $\mathbb{R}^2$  как потенциала бесконечного цилиндра в  $\mathbb{R}^3$ .

В главе 5  $N = n = 2$ . Дается интерпретация потенциала плоской области в  $\mathbb{R}^2$  как потенциала бесконечного сплошного цилиндра в  $\mathbb{R}^3$ .

В главах 6–8  $N = 3$ , а  $n$  последовательно возрастает от 1 до 3.

В главе 9 вычислены потенциалы сферических и эллипсоидальных тел в  $\mathbb{R}^N$  при произвольном  $N \geq 3$ .

В главе 10 собраны вспомогательные математические формулы.

За редкими исключениями в книге принята единая система обозначений. Векторы выделяются жирным шрифтом. Их модули обозначаются теми же буквами обычным шрифтом. Матрицы изображаются «рукописными» буквами. Притягивающее тело всегда предполагается замкнутым и обозначается буквой  $T$ ; его внутренность —  $\text{int } T$ , а граница —  $\partial T$ . Точки пространства  $\mathbb{R}^N$  обозначаются через  $Q$ ; точки притягивающего тела  $T$  —  $Q'$ , а его масса —  $M$ ;

потенциал —  $V$ ; оператор Лапласа —  $\Delta$ ; размерности пространства и тела —  $N$  и  $n$ ; элементы длины, площади и объема —  $ds$ ,  $d\sigma$  и  $d\tau$ .

Плотность обозначается буквой  $\rho$  за двумя исключениями: для плотности одномерной кривой в  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ) используется обозначение  $\alpha$ , а для плотности двумерной поверхности в  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ) —  $\beta$ . Через  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\theta$  обозначаются различные угловые переменные. Часто встречаются цилиндрические координаты  $R$ ,  $\varphi$ ,  $z$ . Расстояние между двумя точками обозначаем буквой  $s$ ; иногда, если одна из точек выделена, то через  $r$  (в двумерном случае —  $R$ ). Переменная интегрирования часто обозначается через  $t$ . Формулы и рисунки нумеруются двумя числами, первое соответствует главе.

Терминология. Потенциал в  $\mathbb{R}^1$  называем линейным, поскольку вне притягивающего тела он описывается линейной функцией расстояния. Потенциал в  $\mathbb{R}^2$  называем логарифмическим, поскольку на бесконечности он ведет себя как логарифм расстояния. Потенциал в  $\mathbb{R}^3$  называем ньютоновым по традиции.

Мы благодарим рецензентов книги, внимательно прочитавших рукопись и сделавших ценные замечания, которые мы постарались учесть, отчего книга, как нам представляется, несомненно выиграла.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-02-00361), гранта Президента РФ для государственной поддержки коллективов ведущих научных школ РФ (грант НШ-1323.2008.2) и Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 годы)» Федерального агентства по образованию Министерства образования и науки РФ.

## Глава 1

# Оператор Лапласа

### 1.1 Оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$

Оператор Лапласа играет фундаментальную роль в теории потенциала и потому заслуживает тщательного изучения.

Пусть  $G$  — открытая область в пространстве  $\mathbb{R}^N$ , точки которой будем обозначать через  $Q$ . Положение  $Q$  определяется набором  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  декартовых координат, одновременно являющихся координатами радиус-вектора  $\mathbf{r} = OQ$ , где  $O$  — начало системы отсчета. В пространстве дважды непрерывно дифференцируемых функций  $G \mapsto \mathbb{R}$  оператор Лапласа  $\Delta$  определяется равенством

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}. \quad (1.1)$$

Определение можно обобщить в двух направлениях.

Во-первых, область  $G$  можно считать вложенной не только в  $\mathbb{R}^N$ , но и в более общее линейное пространство, например, в  $\mathbb{C}^N$ .

Во-вторых, можно расширить пространство функций. Вместо отображений  $G \mapsto \mathbb{R}$  можно рассматривать отображения в  $\mathbb{R}^k$ ,  $\mathbb{C}^k$ , в пространство матриц и им подобные. Оператор Лапласа переводит эти пространства в себя, уменьшая однако порядок дифференцируемости на два. В пространстве бесконечно дифференцируемых и аналитических функций, с которыми, в основном, мы будем иметь дело, последняя оговорка излишня.

Ниже считаем, если не оговорено противное, что область  $G$  пространства  $\mathbb{R}^N$  отображается в  $\mathbb{R}$ .

Оператор Лапласа линеен. Его действие на произведение функций  $f$  и  $g$  описывается правилом Лейбница

$$\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2 \operatorname{grad} f \operatorname{grad} g + f \Delta g. \quad (1.2)$$

В частности,

$$\Delta(f^2) = 2(\operatorname{grad} f)^2 + 2f \Delta f. \quad (1.3)$$

Действие на суперпозицию осуществляется по правилу цепочки. Если  $f$  — функция от скалярной переменной  $g$ , в свою очередь являющейся функцией от  $x_1, \dots, x_N$ , то

$$\Delta f(g) = f''(g)(\operatorname{grad} g)^2 + f'(g)\Delta g, \quad (1.4)$$

где штрихи означают производные по своему аргументу.

С оператором Лапласа связаны два линейных дифференциальных уравнения в частных производных: однородное

$$\Delta V = 0, \quad (1.5)$$

называемое уравнением Лапласа, и неоднородное

$$\Delta V = -4\pi \varrho, \quad (1.6)$$

называемое уравнением Пуассона. Здесь  $\varrho$  — известная введения множителя  $(-4\pi)$  кусочно-непрерывная в  $G$  функция. Удобство введения множителя  $-4\pi$  выяснится в разделе 2.6.

Удовлетворяющая уравнению Лапласа (1.5) в области  $G$  функция называется *гармонической* в этой области. Если  $G$  неограничена, накладывают еще дополнительное условие

$$|V(Q)| < \begin{cases} \frac{C}{\tilde{r}^{N-2}}, & \text{если } N = 1, 3, 4, \dots \\ C \ln \tilde{r}, & \text{если } N = 2, \end{cases} \quad (1.7)$$

естественность которого выяснится в разделе 2.4.2. Здесь  $\tilde{r} = |Q_0 Q|$ , где  $Q_0$  — произвольная точка области  $G$ . При фиксированной  $Q_0$  неравенство (1.7) должно быть выполнено для всех достаточно удаленных от  $Q_0$  точек  $Q$  при подходящем  $C$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В теории гармонических функций при  $N = 2$ , как правило, требуют ограниченности  $V$  в случае неограниченной области  $G$ . В теории потенциала это неудобно: в разделе 2.4.2 будет показано, что при  $r \rightarrow \infty$  потенциал в  $\mathbb{R}^2$  растет как  $C \ln r$ .

Гармонические функции обладают замечательными свойствами. Перечислим необходимые нам, опуская доказательства (Михлин, 1977), (Бабич и др., 1964).

1. Гармоническая в  $G$  функция имеет там производные всех порядков. Более того, она вещественно-аналитична там.
2. Производные гармонической в  $G$  функции гармоничны там.
3. Пусть  $V$  гармонична внутри компактной области  $G$  и непрерывна вплоть до границы  $G$ . Тогда  $V$  ограничена и принимает наибольшее и наименьшее значение на границе.
4. Пусть  $G$  — ограниченная открытая область с кусочно-гладкой компактной границей  $\Gamma$ ,  $V_0$  — непрерывная функция на  $\Gamma$ . Тогда существует не более одной функции  $V$  на  $G \cup \Gamma$ , непрерывной на  $G \cup \Gamma$ , гармонической внутри  $G$  и совпадающей с  $V_0$  на  $\Gamma$ .
5. Пусть  $G = \mathbb{R}^N$ . При  $N = 1$  гармонические функции образуют двухпараметрическое семейство  $V = Cx + C'$ , при  $N = 2$  — однопараметрическое  $V = C$ . При  $N \geq 3$  существует единственная гармоническая во всем пространстве функция  $V = 0$ .

Нахождение гармонической функции по ее значениям на границе области называют *задачей Дирихле*. Свойство 4 говорит о единственности решения внутренней задачи Дирихле.

Сохраняется ли единственность решения для *внешней задачи Дирихле* (область  $G$  содержит бесконечно удаленную точку; граница  $\Gamma$  по-прежнему предполагается компактной)? Ответ положителен для больших размерностей  $N \geq 3$ . Для малых размерностей это не так.

Пусть  $N = 1$ ,  $G = (a, \infty)$ ,  $\Gamma = \{a\}$ ,  $V(a) = A$ . Общее решение уравнения Лапласа в  $G$  есть

$$V = A_1x + A_2.$$

Задача Дирихле имеет однопараметрическое семейство решений

$$V = A_1(x - a) + A.$$

Единственность восстанавливается, если к условию  $V(a) = A$  добавить условие  $\partial V(a)/\partial x = B$  или асимптотику на бесконечности, т.е. зафиксировать коэффициент  $A_1$ .

Пусть  $N = 2$ . Как уже говорилось, в большинстве руководств на гармоническую в неограниченной области функцию накладывают условие  $|V(x)| < C$ . В этом случае свойство 4 сохраняется. Но мы допускаем более слабое условие (1.7), при котором свойство 4 уже не имеет места. Действительно, пусть  $G$  — внешность круга  $x^2 + y^2 > a^2$ ,  $\Gamma$  — окружность  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $V(x, y)|_{\Gamma} = 0$ . Задача Дирихле имеет однопараметрическое семейство решений

$$V(x, y) = C \ln \frac{x^2 + y^2}{a^2}.$$

Однако единственность решения задачи Дирихле восстанавливается в классе функций

$$V(x, y) = A \ln(x^2 + y^2) + \tilde{V}(x, y),$$

где  $A$  — заданная постоянная,  $\tilde{V}$  — ограниченная в  $G$  гармоническая функция, непрерывная на  $G \cup \Gamma$  и удовлетворяющая граничному условию  $\tilde{V}|_{\Gamma} = [V - A \ln(x^2 + y^2)]_{\Gamma}$ . Предполагается, что ни  $G$ , ни  $\Gamma$  не содержат начала координат. В противном случае следует просто сместить начало.

Сохраняются ли перечисленные свойства, если вместо гармонических рассматривать функции, удовлетворяющие уравнению Пуассона (1.6)?

Первые два свойства с очевидностью нарушаются. Возможна их модификация в зависимости от дифференциальных характеристик функции  $\varrho$ .

Третье свойство справедливо в ослабленном варианте. Пусть  $V$  удовлетворяет уравнению (1.6) внутри компактной области  $G$  и непрерывна вплоть до ее границы  $\Gamma$ ;  $\varrho \geq 0$ . Тогда  $V$  ограничена и принимает наименьшее значение на границе  $\Gamma$ .

Четвертое свойство сохраняется без изменений. В случае неограниченной области  $G$ , включая  $G = \mathbb{R}^N$ , на  $V$  нужно наложить те же дополнительные условия поведения на бесконечности.



## 1.2 Оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$ в криволинейных координатах

Посмотрим, как преобразуется оператор Лапласа (1.1) при переходе к другим координатам в  $\mathbb{R}^N$ .

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{r}') \iff x_i = f_i(x'_j), \quad (1.8)$$

где отображение (1.8) считается достаточно гладким и, по крайней мере локально, взаимно-однозначным. Поэтому существует обратное отображение

$$\mathbf{r}' = \mathbf{f}'(\mathbf{r}) \iff x'_i = f'_i(x_j). \quad (1.9)$$

Начнем с линейных отображений. Они сводятся к сдвигу и линейному однородному преобразованию. Для сдвига

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{a} \iff x_i = x'_i + a_i. \quad (1.10)$$

Очевидно,

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}, \quad (1.11)$$

что вместе с (1.1) показывает *инвариантность оператора Лапласа относительно сдвига*.

Пусть теперь

$$\mathbf{r} = \mathcal{A}\mathbf{r}', \quad \mathbf{r}' = \mathcal{B}\mathbf{r}, \quad (1.12)$$

где  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — невырожденные взаимно-обратные квадратные матрицы порядка  $N$  с элементами  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$ , соответственно. В скалярной форме

$$x_i = a_{ij}x'_j, \quad x'_i = b_{ij}x_j, \quad (1.13)$$

где здесь и ниже в этой главе подразумевается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до  $N$ . Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = b_{ik} \frac{\partial}{\partial x'_i}. \quad (1.14)$$

Беря опять производную по  $x_k$  и суммируя по  $k$ , найдем выражение оператора Лапласа в новых переменных

$$\Delta = g_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_j}, \quad (1.15)$$

где

$$g_{ij} = b_{ik}b_{jk}. \quad (1.16)$$

Заметим, что  $g_{ij}$  — элемент матрицы

$$\mathcal{G} = \mathcal{B}\mathcal{B}^*, \quad (1.17)$$

где звездочка означает операцию транспонирования. Матрица  $\mathcal{G}$  симметрична для любой матрицы  $\mathcal{B}$ , но в общем случае не равна  $\mathcal{B}^*\mathcal{B}$  при  $N \geq 2$ .

Невырожденность  $\mathcal{G}$  следует из невырожденности  $\mathcal{B}$ , причем

$$\det \mathcal{G} = J^{-2}, \quad (1.18)$$

где

$$J = \det \mathcal{A} = \det \mathcal{B}^{-1} = (\det \mathcal{B})^{-1}. \quad (1.19)$$

Установим метрический смысл матрицы  $\mathcal{G}$ . Вычислим квадрат расстояния между двумя точками с разностью координат  $dx_i$

$$ds^2 = dx_k dx_k = a_{ki}a_{kj} dx'_i dx'_j.$$

Вводя обозначение  $h_{ij} = a_{ki}a_{kj}$ , получим

$$ds^2 = h_{ij} dx'_i dx'_j, \quad (1.20)$$

так что матрица  $\mathcal{H}$  с элементами  $h_{ij}$  представляет метрический тензор. Очевидно,

$$\mathcal{H} = \mathcal{A}^* \mathcal{A}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{B}\mathcal{B}^* = \mathcal{H}^{-1}. \quad (1.21)$$

В частности, квадратичные формы с коэффициентами  $h_{ij}$  и  $g_{ij}$  положительно определены.

Для любой гладкой функции  $V$  в силу (1.14) и (1.16)

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = b_{ik} \frac{\partial V}{\partial x'_i}, \quad (\text{grad } V)^2 = g_{ij} \frac{\partial V}{\partial x'_i} \frac{\partial V}{\partial x'_j}. \quad (1.22)$$

Если матрица  $\mathcal{A}$  ортогональна, то  $\mathcal{B}$  также ортогональна, а матрицы  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}$  единичны. Поэтому *оператор Лапласа инвариантен относительно ортогональных преобразований.*

Наложим на  $\mathcal{A}$  более слабое условие ортогональности столбцов

$$a_{ij}a_{kj} = 0 \quad \text{при } i \neq k. \quad (1.23)$$

Иными словами,

$$a_{ij} = H_j \tilde{a}_{ij} \quad (1.24)$$

при ненулевых  $H_j$  и ортогональной матрице  $\tilde{\mathcal{A}}$  с элементами  $\tilde{a}_{ij}$ . Т.к. столбцы  $\tilde{\mathcal{A}}$  состоят из единичных векторов, то

$$H_j^2 = \sum_{k=1}^N a_{kj}^2. \quad (1.25)$$

Знак  $H_j$  можно выбрать произвольно, поскольку его изменение не нарушает ортогональности  $\tilde{\mathcal{A}}$ . Считаем ниже  $H_j > 0$ .

Перепишем первое из уравнений (1.13) в виде  $x_i = \tilde{a}_{ij}(H_j x'_j)$ , тогда найдем в силу ортогональности матрицы коэффициентов  $H_i x'_i = \tilde{a}_{ji} x_j$ , что равносильно

$$b_{ij} = \frac{1}{H_i} \tilde{a}_{ji} = \frac{1}{H_i^2} a_{ji}. \quad (1.26)$$

Из (1.26) следует ортогональность строк матрицы  $\mathcal{B}$ . Матрицы  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}$  диагональны

$$h_{ij} = H_i^2 \delta_{ij}, \quad g_{ij} = \frac{1}{H_i^2} \delta_{ij}, \quad (1.27)$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера, и в (1.27) отсутствует суммирование по  $i$ . Метрика (1.20) содержит лишь квадраты дифференциалов

$$ds^2 = H_i^2 dx_i'^2. \quad (1.28)$$

Формула (1.15) принимает вид

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{1}{H_i^2} \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}. \quad (1.29)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Ортогональные по столбцам преобразования, как и соответствующие невырожденные матрицы, не образуют группы даже при  $N = 2$ . Действительно, рассмотрим две матрицы

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} c \cos \gamma & \sin \gamma \\ -c \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix}$$

при произвольных значениях  $a, b, c, \gamma$ . Очевидно, что столбцы матриц  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  ортогональны. Однако столбцы произведения матриц

$$\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} ac \cos \gamma & a \sin \gamma \\ -bc \sin \gamma & b \cos \gamma \end{pmatrix}$$

уже не ортогональны, если  $(a^2 - b^2)c \neq 0$ .

Перейдем к общему случаю подстановки (1.8), (1.9). Матрицы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  определим теперь как матрицы Якоби с элементами

$$a_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j}, \quad b_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}, \quad (1.30)$$

что согласуется с линейным случаем (1.13). Для взаимно обратных матриц  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}$  остаются справедливыми формулы (1.14), (1.16)–(1.22). Формулу (1.15) следует заменить на

$$\Delta = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left( J g_{ij} \frac{\partial}{\partial x'_j} \right). \quad (1.31)$$

Доказательство можно найти в (*Михлин, 1977*).

В линейном случае  $J$  и  $g_{ij}$  постоянны, и мы возвращаемся к (1.15).

Если  $g_{ij}$  считать по второй из формул (1.30), то мы получим функции от  $x_k$ , тогда как нам нужны функции от  $x'_k$ . Поэтому обычно вычисляют  $a_{ij}$  по первой из формул (1.30), затем  $J = \det \mathcal{A}$ , а потом обращают матрицу  $\mathcal{A}$ . Второй вариант: вычисляют матрицу  $\mathcal{H} = \mathcal{A}^* \mathcal{A}$ , а потом  $\mathcal{G} = \mathcal{H}^{-1}$ .

Если матрица  $\mathcal{A}$  ортогональна по столбцам согласно (1.24), то  $\mathcal{B}$  ортогональна по строкам согласно (1.26), а матрицы  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}$  диаго-

нальны с элементами (1.27). Поскольку общий в столбце множитель можно вынести за знак определителя, из (1.24) вытекает

$$J = H_1 H_2 \cdots H_N \det \tilde{\mathcal{A}}. \quad (1.32)$$

Последний определитель равен  $\pm 1$ . Формула (1.31) существенно упрощается, сохраняя суммирование лишь по одному индексу

$$\Delta = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x'_i} \left( \frac{J}{H_i^2} \frac{\partial}{\partial x'_i} \right). \quad (1.33)$$

Геометрический смысл ортогональности  $\mathcal{A}$  по столбцам состоит в том, что координаты  $x'_i$  ортогональны: их координатные линии пересекаются под прямым углом. Это вытекает из диагональности метрической формы

$$ds^2 = \sum_{i=1}^N H_i^2 dx_i'^2, \quad (1.34)$$

коэффициенты  $H_i$  которой называют *коэффициентами Ламе*.

Отсюда следует представление вектора градиента в ортогональной системе, орты которой направлены по касательным к координатным линиям  $x'_i = \text{const}$ :

$$\text{grad } V = \left( \frac{1}{H_1} \frac{\partial V}{\partial x'_1}, \frac{1}{H_2} \frac{\partial V}{\partial x'_2}, \dots, \frac{1}{H_N} \frac{\partial V}{\partial x'_N} \right). \quad (1.35)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** С какой целью вводятся криволинейные координаты, через которые интересующие нас операторы — например, оператор Лапласа — выражаются более сложным образом, чем через декартовы? В следующих главах мы будем искать потенциалы различных тел  $T$ . Прямой способ состоит в вычислении интегралов по  $T$ . Часто интегрирование упрощается переходом к подходящей системе координат, например такой, в которой пределы интегрирования постоянны. Так, интегрирование по сфере или шару упрощается в сферических координатах. Иногда мы используем косвенный метод, подыскивая подходящую гармоническую функцию. Здесь полезны координаты, в которых уравнение Лапласа в дополнительной к  $T$  области допускают разделение переменных. Иными словами (*Михлин, 1977*), уравнение Лапласа в частных производных сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям.



$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -r \sin \theta_2 \sin \theta_3 \\ r \sin \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 \\ r \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_4 \cos \theta_5 \\ r \sin \theta_2 \cos \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \\ r \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 \cos \theta_5 \\ r \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 \sin \theta_5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -r \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \\ r \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \cos \theta_5 \end{pmatrix}.$$

Скалярное произведение первых двух столбцов,  $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2$ , равно произведению  $r \cos \theta_2 \sin \theta_2$ , помноженному на

$$-1 + \cos^2 \theta_3 + \sin^2 \theta_3 \cos^2 \theta_4 + \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_4 \cos^2 \theta_5 + \dots + \sin^2 \theta_3 \cdots \sin^2 \theta_{N-1} \cos^2 \theta_N + \sin^2 \theta_3 \cdots \sin^2 \theta_{N-1} \sin^2 \theta_N. \quad (1.37)$$

Сумма последних двух слагаемых равна произведению квадратов синусов  $\sin^2 \theta_3 \cdots \sin^2 \theta_{N-1}$ . Предыдущее слагаемое отличается заменой последнего синуса на косинус. Продолжая суммирование, убедимся, что  $a_{k1} a_{k2} = 0$ .

Структура скалярного произведения  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j$  для произвольных  $i$  и  $j$  ( $1 \leq i < j \leq N-1$ ) аналогична: общий множитель, помноженный на выражение типа (1.37), в котором сумма тригонометрических членов начинается с  $\cos^2 \theta_{j+1}$ .

Наконец,  $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_N$  ( $i < N$ ) состоит из двух различающихся только знаком слагаемых.

Таким образом, столбцы  $\mathcal{A}$  ортогональны. Норма каждого из них легко считается

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_i = r \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{i-1} \quad (i \geq 3), \quad (1.38)$$

Знак  $H_i$  выбран так, чтобы в области  $r > 0$ ,  $0 < \theta_i < \pi$  ( $2 \leq i \leq N-1$ ) величины  $H_i$  были положительны. Считая в (1.32)  $\det \tilde{\mathcal{A}}$  положительным, получим

$$J = r^{N-1} \sin^{N-2} \theta_2 \sin^{N-3} \theta_3 \cdots \sin \theta_{N-1}. \quad (1.39)$$

При  $N = 2$  прямые вычисления дают

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad J = r. \quad (1.40)$$

Точно так же при  $N = 3$

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta_2, \quad J = r^2 \sin \theta_2. \quad (1.41)$$

Правильен ли знак определителя  $J$ ? Согласно (1.39)  $J$  не зависит от  $\theta_N$  при любом выборе знака. Полагая  $\theta_N = 0$ , получим определитель, последняя строка и последний столбец которого содержит лишь один ненулевой элемент  $a_{NN}$ , что сразу дает рекуррентное соотношение

$$J_N = r \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{N-1} J_{N-1}. \quad (1.42)$$

Равенство (1.39) легко доказывается по индукции с помощью (1.42).

Элементы матрицы  $\mathcal{B}$  даются формулой (1.26).

Оператор Лапласа в сферических координатах согласно (1.33) приобретает форму

$$\Delta = \frac{1}{r^{N-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{N-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta^*, \quad (1.43)$$

где  $\Delta^*$  — оператор Бельтрами (сферическая часть оператора Лапласа):

$$\Delta^* = \sum_{i=2}^N \frac{1}{\sin^2 \theta_2 \cdots \sin^2 \theta_{i-1} \sin^{N-i} \theta_i} \frac{\partial}{\partial \theta_i} \left( \sin^{N-i} \theta_i \frac{\partial}{\partial \theta_i} \right). \quad (1.44)$$

Как обычно, при  $i = 2$  пустое произведение  $\sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_1$  считается равным единице.



При  $N = 2$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta^*, \quad \Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2}. \quad (1.45)$$

При  $N = 3$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta^*, \quad (1.46)$$

$$\Delta^* = \frac{1}{\sin \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left( \sin \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_3^2}. \quad (1.47)$$

## 1.4 Оператор Лапласа в криволинейных координатах в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N-2}$

В приложениях чаще всего встречаются пространства  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ . В этом параграфе мы остановимся на  $\mathbb{R}^2$ . Результаты сразу обобщаются на случай  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N-2}$  при  $N \geq 3$ . Действительно, в  $\mathbb{R}^N$

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2, \quad (1.48)$$

где операторы

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$$

можно считать действующими в пространствах  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^{N-2}$ . Если замена переменных (1.8) не перемешивает эти пространства, т.е.

$$x_i = f_i(x'_1, x'_2), \quad x_k = f_k(x'_3, \dots, x'_N), \quad (1.49)$$

где  $i = 1, 2; k = 3, \dots, N$ , то разбиение (1.48) сохраняет силу и в новых переменных. Если преобразование  $x_k$  тождественно ( $x_k = x'_k$ ), то достаточно рассматривать плоскость  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.4.1 Полярные координаты

Полярные координаты исследованы в разделе 1.3 как частный случай сферических при  $N = 2$ .

Выпишем соответствующие соотношения в принятых для плоскости  $\mathbb{R}^2$  обозначениях  $R, \varphi$ :

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad (1.50)$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -R \sin \varphi \\ \sin \varphi & R \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} \equiv \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{R} & \frac{\cos \varphi}{R} \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

Столбцы матрицы  $\mathcal{A}$  ортогональны, следовательно, полярные координаты ортогональны, причем

$$J = R, \quad H_1 = 1, \quad H_2 = R. \quad (1.52)$$

Координатные линии  $R = \text{const}$  — окружности с центром в начале;  $\varphi = \text{const}$  — исходящие из центра лучи, пересекающие окружности под прямым углом. Отображение (1.50) многолистно: точки  $(R, \varphi)$ ,  $(-R, \varphi + \pi)$ ,  $(R, \varphi + 2\pi)$ ,  $\dots$  переходят в одну точку  $(x, y)$ . Как правило, считают  $R \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Отображение (1.50) имеет особенность в начале координат, где якобиан  $J = R$  обращается в нуль.

Оператор Лапласа дается изменением обозначений в (1.45)

$$\Delta = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.53)$$

Найдем все решения уравнения (1.5), постоянные на окружностях  $R = \text{const}$ , т.е. не зависящие от  $\varphi$ . Они удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dR} \left( R \frac{dV}{dR} \right) = 0.$$

Общее решение находится без труда

$$V(R) = C_1 \ln R + C_2. \quad (1.54)$$

Еще проще найти все гармонические функции, не зависящие от  $R$ . Они удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 V}{d\varphi^2} = 0.$$

Общее решение есть

$$V(\varphi) = C_1 \varphi + C_2. \quad (1.55)$$

Область  $G$  для функции (1.54) не должна содержать начала координат. Область  $G$  для функции (1.55), кроме того, не должна охватывать начала координат, т.е. не должна содержать замкнутой кривой, содержащей точку  $O$  внутри себя.

ЗАМЕЧАНИЕ. В соответствии со сказанным в начале параграфа в  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N-2}$  справедливо представление (1.48), где  $\Delta_1$  определяется согласно (1.53). В частности, в цилиндрических координатах  $R, \varphi, z$  пространства  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$

$$\Delta = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.56)$$

Подобное замечание можно сделать по отношению ко всем координатам этого параграфа.

#### 1.4.2 Координаты, связанные с подобными эллипсами

Если в качестве первого семейства координатных линий взять не окружности, а подобные эллипсы с общим центром, сохраняя проходящие через центр лучи в качестве второго семейства, придем к отображению

$$x = aR \cos \varphi, \quad y = bR \sin \varphi \quad (1.57)$$

с положительными  $a, b$ . Обычно считают  $R \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$  или  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Все эллипсы  $R = \text{const}$  при  $a > b$  вытянуты вдоль оси  $x$  и имеют одинаковый эксцентриситет  $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ . Угол  $\varphi$  в небесной механике именуют эксцентрической аномалией. При  $a < b$  эллипсы вытянуты вдоль оси  $y$ , эксцентриситет равен  $\sqrt{b^2 - a^2}/b$ , эксцентрической аномалией будет угол  $\varphi - \pi/2$ .

Формулы (1.51) заменяются на

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi & -aR \sin \varphi \\ b \sin \varphi & bR \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \varphi}{a} & \frac{\sin \varphi}{b} \\ -\frac{\sin \varphi}{aR} & \frac{\cos \varphi}{bR} \end{pmatrix}, \quad (1.58)$$

причем

$$J = abR. \quad (1.59)$$

В действительности сначала дифференцированием находится матрица  $\mathcal{A}$ , затем ее определитель  $J$ , затем обратная матрица  $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{-1}$ .

Множители  $a, b$  разрушили ортогональность столбцов матрицы  $\mathcal{A}$ , следовательно, наши координаты неортогональны, что очевидно и геометрически. Симметрические матрицы  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{G}$  находим по формулам  $\mathcal{H} = \mathcal{A}^* \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{B} \mathcal{B}^* = \mathcal{H}^{-1}$ :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi & (b^2 - a^2) R \cos \varphi \sin \varphi \\ (b^2 - a^2) R \cos \varphi \sin \varphi & R^2 (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} & \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{R} \\ \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{R} & \frac{1}{R^2} \left(\frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2}\right) \end{pmatrix}. \quad (1.60)$$

По представлению (1.31)

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{R} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \\ &+ \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] + \\ &+ \frac{1}{R} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \left[ \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial^2}{\partial R \partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial}{\partial R} \right) \right] = \\ &= \left( \frac{\cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{b^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \\ &+ \frac{\sin 2\varphi}{R} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial R \partial \varphi} + \\ &+ \frac{1}{R} \left( \frac{\cos^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} \right) \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\sin 2\varphi}{R^2} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (1.61) \end{aligned}$$

При  $a = b = 1$  формулы (1.61) переходят в (1.53).

При  $a \neq b$  гармонических функций, не зависящих от  $\varphi$ , не существует (докажите!). Не зависящие от  $R$  функции удовлетворяют линейному уравнению

$$\left( \frac{\sin^2 \varphi}{a^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{b^2} \right) \frac{d^2 V}{d\varphi^2} + \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin 2\varphi \frac{dV}{d\varphi} = 0 \quad (1.62)$$

с общим решением

$$V(\varphi) = C_1 \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) + C_2. \quad (1.63)$$

Область  $G$  для функции (1.63) не должна охватывать начала координат.

### 1.4.3 Координаты, связанные с софокусными эллипсами

Фиксируем положительные числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , считая  $0 < b < a$ ,  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ . Определим криволинейные координаты  $\lambda$ ,  $\varphi$  соотношениями

$$x = \sqrt{a^2 + \lambda} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{b^2 + \lambda} \sin \varphi. \quad (1.64)$$

Вычислим матрицу Якоби, ее обратную матрицу и ее определитель:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{\cos \varphi}{2\sqrt{a^2 + \lambda}} & -\sqrt{a^2 + \lambda} \sin \varphi \\ \frac{\sin \varphi}{2\sqrt{b^2 + \lambda}} & \sqrt{b^2 + \lambda} \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.65)$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \sqrt{b^2 + \lambda} \cos \varphi & \sqrt{a^2 + \lambda} \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{2\sqrt{b^2 + \lambda}} & \frac{\cos \varphi}{2\sqrt{a^2 + \lambda}} \end{pmatrix}, \quad (1.66)$$

$$2J = \sqrt{\frac{b^2 + \lambda}{a^2 + \lambda}} \cos^2 \varphi + \sqrt{\frac{a^2 + \lambda}{b^2 + \lambda}} \sin^2 \varphi. \quad (1.67)$$

Столбцы матрицы  $\mathcal{A}$  ортогональны, следовательно, координаты ортогональны, причем

$$H_1 = \sqrt{J/(2\mu)}, \quad H_2 = \sqrt{2\mu J}, \quad (1.68)$$

где

$$\mu = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)}.$$

Исключая  $\varphi$  из (1.64), получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1. \quad (1.69)$$

При  $\lambda = 0$  точка  $(x, y)$  описывает базовый эллипс  $\mathcal{E}$ :  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = b \sin \varphi$ ; при  $\lambda = -b^2$  — отрезок  $-c \leq x \leq c$ ,  $y = 0$  между фокусами эллипса  $\mathcal{E}$ ; при  $-b^2 < \lambda < 0$  — лежащий внутри  $\mathcal{E}$  софокусный эллипс; при  $\lambda > 0$  — лежащий вне  $\mathcal{E}$  софокусный эллипс. Исключая  $\lambda$  из (1.64), получим уравнение

$$\frac{x^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{y^2}{\sin^2 \varphi} = c^2. \quad (1.70)$$

При  $\varphi = 0, \pi$  точка  $(x, y)$  описывает лежащие на оси  $x$  лучи, исходящие из общих фокусов; при  $\varphi = \pm\pi/2$  — ось  $y$ ; при других значениях  $\varphi$  — части гипербол с теми же фокусами.

Соотношения (1.64) взаимно-однозначно отображают цилиндр  $\{\lambda > -b^2\} \times \{\varphi \pmod{2\pi}\}$  на плоскость  $xy$  без фокального отрезка. Добавляя значение  $\lambda = -b^2$ , получим отображение на всю плоскость, однако с потерей однозначности обратного отображения и особенностью якобиана (1.67).

Напомним, что обозначение вида « $\varphi \pmod{2\pi}$ » означает, что точки  $\varphi$  и  $\varphi + 2\pi k$  при целом  $k$  отождествляются. Иными словами, прямая сворачивается в окружность.

Найдем обратное отображение. Величина  $\lambda$  удовлетворяет квадратному уравнению (1.69), имеющему единственный корень на интересующем нас луче  $\lambda + b^2 \geq 0$

$$2\lambda = x^2 + y^2 - a^2 - b^2 + \sqrt{(x^2 + y^2)^2 + c^4 + 2c^2(y^2 - x^2)}. \quad (1.71)$$

После определения  $\lambda$  угол  $\varphi$  находится однозначно по тангенсу

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{a^2 + \lambda}{b^2 + \lambda}} \frac{y}{x} \quad (1.72)$$

с учетом знаков  $x$ ,  $y$  согласно (1.64). Отметим асимптотику  $\lambda$  при  $R \rightarrow \infty$

$$\lambda = R^2 + \mathcal{O}(1), \quad (1.73)$$

Согласно (1.33)

$$J\Delta = 2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \mu \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.74)$$

Например,

$$\Delta \lambda = \frac{a^2 + b^2 + 2\lambda}{\mu J}. \quad (1.75)$$

Найдем все решения уравнения Лапласа, постоянные на софокусных эллипсах, т.е. являющиеся функциями только от  $\lambda$  и, следовательно, удовлетворяющие обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\lambda} \left( \mu \frac{dV}{d\lambda} \right) = 0.$$

Очевидно,

$$\frac{dV(\lambda)}{d\lambda} = \frac{C_1}{2\mu}, \quad V(\lambda) = C_1 \ln \left( \sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda} \right) + C_2. \quad (1.76)$$

Еще проще найти все гармонические функции, которые не зависят от  $\lambda$

$$V(\varphi) = C_1 \varphi + C_2. \quad (1.77)$$

Область  $G$  для функций (1.76), (1.77) не должна пересекаться с фокальным отрезком  $\lambda = -b^2$ , а для (1.77) не должна и охватывать его, т.е. не должна содержать замкнутой кривой, содержащей фокальный отрезок внутри себя.

Эллиптическим координатам можно придать иную форму

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \varphi, \quad (1.78)$$

полагая

$$\lambda = c^2 \operatorname{ch}^2 \xi - a^2 = c^2 \operatorname{sh}^2 \xi - b^2, \quad \xi = \ln \frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda}}{c}. \quad (1.79)$$

Поскольку  $\varphi$  не участвует в подстановке (1.79), семейства координатных линий остаются прежними. Переменная  $\xi$  изменяется в промежутке  $[0, \infty)$ . Основные формулы переписываются в виде

$$\mathcal{A} = c \begin{pmatrix} \operatorname{sh} \xi \cos \varphi & -\operatorname{ch} \xi \sin \varphi \\ \operatorname{ch} \xi \sin \varphi & \operatorname{sh} \xi \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.80)$$

$$\mathcal{B} = \frac{c}{J} \begin{pmatrix} \operatorname{sh} \xi \cos \varphi & \operatorname{ch} \xi \sin \varphi \\ -\operatorname{ch} \xi \sin \varphi & \operatorname{sh} \xi \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.81)$$

$$J = c^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \varphi) = c^2 (\operatorname{sh}^2 \xi + \sin^2 \varphi), \quad (1.82)$$

$$H_1 = H_2 = \sqrt{J}, \quad (1.83)$$

$$\xi = \ln \frac{2R}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad (1.84)$$

$$J\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.85)$$

Зависящие только от одной координаты гармонические функции в рассматриваемых координатах записываются совсем просто

$$V(\xi) = C_1 \xi + C_2, \quad V(\varphi) = C_1 \varphi + C_2, \quad (1.86)$$

что согласуется с (1.76), (1.77) с учетом (1.79).

Если вытянутый вдоль оси  $x$  эллипс заменить вытянутым вдоль оси  $y$ , придем к формулам

$$x = c \operatorname{sh} \xi \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{ch} \xi \sin \varphi. \quad (1.87)$$

Основные соотношения переписываются в виде

$$\mathcal{A} = c \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \xi \cos \varphi & -\operatorname{sh} \xi \sin \varphi \\ \operatorname{sh} \xi \sin \varphi & \operatorname{ch} \xi \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.88)$$

$$\mathcal{B} = \frac{c}{J} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \xi \cos \varphi & \operatorname{sh} \xi \sin \varphi \\ -\operatorname{sh} \xi \sin \varphi & \operatorname{ch} \xi \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (1.89)$$

$$J = c^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \sin^2 \varphi) = c^2 (\operatorname{sh}^2 \xi + \cos^2 \varphi). \quad (1.90)$$

Формулы (1.83)–(1.86) остаются в силе.



#### 1.4.4 Параболические координаты

Определим криволинейные координаты  $u, v$  соотношениями

$$2x = u^2 - v^2, \quad y = uv; \quad (1.91)$$

$$u = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x}, \quad v = \left( \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \right) \operatorname{sign} y. \quad (1.92)$$

Вычислим матрицу Якоби, ее обратную матрицу и определитель

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}, \quad (1.93)$$

$$J = u^2 + v^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.94)$$

Столбцы матрицы  $\mathcal{A}$  ортогональны, следовательно, координаты ортогональны, причем

$$H_1 = H_2 = \sqrt{J}. \quad (1.95)$$

Исключая одну из координат  $u$  или  $v$  из (1.91), получим уравнения

$$y^2 = u^4 - 2xu^2, \quad y^2 = v^4 + 2xv^2.$$

Первое описывает семейство парабол с фокусом в начале координат, осью симметрии  $x$  и правой вершиной  $x = u^2/2$ ; фокальный параметр равен  $u^2$ . Второе семейство парабол есть зеркальное отражение первого, причем точка  $x = -v^2/2$  является теперь левой вершиной, а фокальный параметр равен  $v^2$ .

Отображение (1.91) взаимно-однозначно при  $u \geq 0$ , но  $v(x, y)$  разрывна на отрицательной части оси  $x$ . Ситуация аналогична полярным углам на плоскости при  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Якобиан (1.94) обращается в нуль в начале координат.

Оператор Лапласа определяется соотношением

$$J\Delta = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}. \quad (1.96)$$

Решения уравнения Лапласа, зависящие лишь от одной координаты, очевидны:

$$V(u) = C_1 u + C_2, \quad V(v) = C_1 v + C_2. \quad (1.97)$$

### 1.4.5 Биполярные координаты

Определим криволинейные координаты  $\xi, \varphi$  соотношениями

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi}, \quad y = \frac{c \sin \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi}. \quad (1.98)$$

Термин *биполярные* употребляется по следующей причине. Введем векторы  $\mathbf{R}_1 = \overrightarrow{Q_1 Q}$  и  $\mathbf{R}_2 = \overrightarrow{Q_2 Q}$ , соединяющие точки  $Q_1(-c, 0)$ ,  $Q_2(c, 0)$  с точкой  $Q(x, y)$ . Найдем координаты векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \frac{c}{\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi} (e^\xi - \cos \varphi, \sin \varphi), \\ \mathbf{R}_2 &= \frac{c}{\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi} (\cos \varphi - e^{-\xi}, \sin \varphi). \end{aligned}$$

Вычислим их длины и углы между каждым из векторов и положительным направлением оси  $x$ :

$$\begin{aligned} R_1^2 &= \frac{2c^2 e^\xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi}, & R_2^2 &= \frac{2c^2 e^{-\xi}}{\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi}, \\ \cos \varphi_1 &= \frac{e^\xi - \cos \varphi}{\sqrt{2e^\xi(\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi)}}, & \sin \varphi_1 &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2e^\xi(\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi)}}, \\ \cos \varphi_2 &= \frac{\cos \varphi - e^{-\xi}}{\sqrt{2e^{-\xi}(\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi)}}, & \sin \varphi_2 &= \frac{\sin \varphi}{\sqrt{2e^{-\xi}(\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi)}}. \end{aligned}$$

Отсюда без труда получаем

$$\xi = \ln \frac{R_1}{R_2}, \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (1.99)$$

так что  $\xi, \varphi$  связаны с расстояниями и углами, относящимися к двум точкам  $Q_1, Q_2$ .

Координатные линии  $\xi = \operatorname{const}$  при  $\xi \neq 0$  представляют собой окружности с центрами на оси  $x$

$$(x - c \operatorname{cth} \xi)^2 + y^2 = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \xi}. \quad (1.100)$$

При  $\xi \rightarrow 0$  они стремятся к оси  $y$ , являющейся координатной линией  $\xi = 0$ . Ни одна из линий  $\xi = \operatorname{const}$  не проходит ни через точку  $Q_1$ , ни через точку  $Q_2$ .

Исключение  $\xi$  из (1.98) приводит к уравнению

$$x^2 + (y - c \operatorname{ctg} \varphi)^2 = \frac{c^2}{\sin^2 \varphi}. \quad (1.101)$$

При  $\varphi = \pi/2$  это окружность радиуса  $c$  с центром в начале. При  $0 < \varphi < \pi/2$  это окружность радиуса  $c/\sin \varphi$  с центром в точке  $(0, c \operatorname{ctg} \varphi)$  на положительной части оси  $y$ . При  $\pi/2 < \varphi < \pi$  центр лежит на отрицательной части оси  $y$ . Все окружности семейства (1.101) проходят через точки  $Q_1, Q_2$ . Сопоставление со вторым из уравнений (1.98) показывает, что координатными линиями  $\varphi = \operatorname{const}$  при  $0 < \varphi < \pi$  являются части окружностей, лежащие в верхней полуплоскости  $y > 0$ . При  $\varphi \rightarrow \pi$  координатные линии стремятся к отрезку  $Q_1 Q_2$ . Последний, если исключить его концы  $Q_1$  и  $Q_2$ , служит координатной линией  $\varphi = \pi$ . При  $\varphi \rightarrow 0$  координатные линии стремятся к лучам  $x < -c$  и  $x > c$ , представляющим координатную линию  $\varphi = 0$ .

При  $-\pi < \varphi < 0$  аналогично описывается нижняя полуплоскость  $y < 0$ .

Вычислим матрицу Якоби, ее обратную матрицу и определитель

$$\mathcal{A} = \frac{c}{(\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi)^2} \begin{pmatrix} 1 - \operatorname{ch} \xi \cos \varphi & -\operatorname{sh} \xi \sin \varphi \\ -\operatorname{sh} \xi \sin \varphi & \operatorname{ch} \xi \cos \varphi - 1 \end{pmatrix}, \quad (1.102)$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 1 - \operatorname{ch} \xi \cos \varphi & -\operatorname{sh} \xi \sin \varphi \\ -\operatorname{sh} \xi \sin \varphi & \operatorname{ch} \xi \cos \varphi - 1 \end{pmatrix}, \quad (1.103)$$

$$J = -\frac{c^2}{(\operatorname{ch} \xi - \cos \varphi)^2}. \quad (1.104)$$

Столбцы матрицы  $\mathcal{A}$  ортогональны, следовательно, координаты ортогональны, причем

$$H_1 = H_2 = \sqrt{-J}. \quad (1.105)$$

Заметим, что в согласии с (1.32) теперь  $J = -H_1 H_2$ . Оператор Лапласа определяется соотношением

$$-J\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.106)$$

Якобиан (1.104) отрицателен и нигде не обращается в нуль. Он сингулярен при  $\varphi = \xi = 0$ . Как правило, считают  $-\infty < \xi < \infty$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , выкалывая точку  $\varphi = \xi = 0$ .

Решения уравнения Лапласа, зависящие лишь от одной координаты, очевидны:

$$V(\xi) = C_1\xi + C_2, \quad V(\varphi) = C_1\varphi + C_2. \quad (1.107)$$

## 1.5 Оператор Лапласа в криволинейных координатах в $\mathbb{R}^3$

### 1.5.1 Сферические координаты

Сферические координаты исследованы в разделе 1.3 в многомерном случае и в частном случае  $N = 3$ .

Выпишем соответствующие соотношения в принятых для  $\mathbb{R}^3$  обозначениях

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad (1.108)$$

так что  $x = x_2$ ,  $y = x_3$ ,  $z = x_1$ ;  $\theta = \theta_2$ ,  $\varphi = \theta_3$ . Теперь

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.109)$$

$$\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \frac{1}{r} \cos \theta \cos \varphi & \frac{1}{r} \cos \theta \sin \varphi & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ \frac{-\sin \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.110)$$

Столбцы матрицы  $\mathcal{A}$  ортогональны, следовательно, сферические координаты ортогональны, причем

$$J = r^2 \sin \theta, \quad H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \sin \theta. \quad (1.111)$$

Координатные поверхности  $r = \text{const}$  — сферы с центром в начале;  $\theta = \text{const}$  — конусы с вершиной в начале;  $\varphi = \text{const}$  — полу-плоскости с осью  $z$  в качестве граничной прямой. Соответствующие координатные линии суть лучи, параллели и меридианы. Отображение (1.108) многолистно: точки  $((-1)^k r, \theta + k\pi, \varphi + 2s\pi)$  при произвольных целых  $k$  и  $s$  переходят в одну точку  $(x, y, z)$ . Как правило, считают  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Отображение (1.108) имеет особенность в начале координат и на полюсах  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ , где якобиан обращается в нуль.

Оператор Лапласа дается изменением обозначений в (1.46) и (1.47)

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\text{ctg } \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Выпишем все решения уравнения (1.5), зависящие лишь от одной координаты:

$$V = \frac{C_1}{r} + C_2, \quad V = C_1 \ln \text{tg} \frac{\theta}{2} + C_2, \quad V = C_1 \varphi + C_2. \quad (1.113)$$

### 1.5.2 Координаты, индуцированные координатами на плоскости

Пусть на плоскости  $\mathbb{R}^2$  введены криволинейные координаты

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v). \quad (1.114)$$

Мы видели в предыдущем разделе, что их можно распространить на  $\mathbb{R}^3$ , добавив тривиальное соотношение  $z = z$  и приходя тем самым к общим цилиндрическим координатам.

Есть еще один способ распространить (1.114) на  $\mathbb{R}^3$ , при котором два семейства координатных поверхностей становятся семействами поверхностей вращения. Именно, определим криволинейные координаты в  $\mathbb{R}^3$  соотношениями

$$x = f_2(u, v) \cos \varphi, \quad y = f_2(u, v) \sin \varphi, \quad z = f_1(u, v). \quad (1.115)$$

Если через  $\bar{a}_{ik}$ ,  $\bar{J}$  обозначить элементы матрицы Якоби и якобиан подстановки (1.114), то для подстановки (1.115)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{21} \cos \varphi & \bar{a}_{22} \cos \varphi & -f_2 \sin \varphi \\ \bar{a}_{21} \sin \varphi & \bar{a}_{22} \sin \varphi & f_2 \cos \varphi \\ \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \bar{J} f_2, \quad (1.116)$$

так что якобиан не зависит от третьей переменной — угла  $\varphi$ .

Обратная матрица:

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\bar{J}} \begin{pmatrix} -\bar{a}_{12} f_2 \cos \varphi & -\bar{a}_{12} f_2 \sin \varphi & \bar{a}_{22} f_2 \\ \bar{a}_{11} f_2 \cos \varphi & \bar{a}_{11} f_2 \sin \varphi & -\bar{a}_{21} f_2 \\ -\bar{J} \sin \varphi & \bar{J} \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.117)$$

Координатные поверхности  $u = \text{const}$  и  $v = \text{const}$  получаются вращением соответствующих координатных линий в плоскости  $xz$  вокруг оси  $z$ . Координатные поверхности  $\varphi = \text{const}$  суть меридиональные полуплоскости.

Третий столбец матрицы (1.116) ортогонален первым двум ее столбцам. Если столбцы матрицы  $\mathcal{A}$  ортогональны, то ортогональны и столбцы матрицы  $\mathcal{A}$ , следовательно, координаты (1.115) ортогональны, причем

$$H_1 = \bar{H}_1, \quad H_2 = \bar{H}_2, \quad H_3 = |f_2|. \quad (1.118)$$

Подробно рассмотренные выше сферические координаты (1.108) можно получить из полярных (1.50) указанным приемом.

### Сфероидальные координаты

Применим вышеописанный прием к координатам (1.78) в стандартных обозначениях

$$f_1(\xi, \theta) = c \operatorname{ch} \xi \cos \theta, \quad f_2(\xi, \theta) = c \operatorname{sh} \xi \sin \theta. \quad (1.119)$$

Получим вытянутые сфероидальные координаты

$$x = c \operatorname{sh} \xi \sin \theta \cos \varphi, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c \operatorname{ch} \xi \cos \theta. \quad (1.120)$$

Обычно считают  $\xi \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Поверхность  $\xi = \text{const}$  — вытянутый эллипсоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{\text{sh}^2 \xi} + \frac{z^2}{\text{ch}^2 \xi} = c^2,$$

при  $\xi = 0$  вырождающийся в отрезок  $-c \leq z \leq c$  оси  $z$ . Поверхности  $\theta = \text{const}$  и  $\pi - \theta = \text{const}$  образуют две полости двуполостного гиперboloида вращения

$$\frac{z^2}{\cos^2 \theta} - \frac{x^2 + y^2}{\sin^2 \theta} = c^2.$$

При  $\theta = 0$  поверхность вырождается в луч  $z \geq c$  оси  $z$ , при  $\theta = \pi$  — в луч  $z \leq -c$ , при  $\theta = \pi/2$  — в плоскость  $xy$ .

Из формул (1.82), (1.83) в согласии с (1.116), (1.117) следует

$$J = c^3 (\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \theta) \text{sh} \xi \sin \theta, \quad (1.121)$$

$$H_1 = H_2 = c \sqrt{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \theta}, \quad H_3 = c \text{sh} \xi \sin \theta. \quad (1.122)$$

Оператор Лапласа определяется формулой

$$\begin{aligned} c^2 (\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \theta) \Delta = & \frac{1}{\text{sh} \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \text{sh} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \\ & + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\text{sh}^2 \xi + \sin^2 \theta}{\text{sh}^2 \xi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Гармонические функции, зависящие лишь от одной из координат:

$$V = C_1 \ln \text{th} \frac{\xi}{2} + C_2, \quad V = C_1 \ln \text{tg} \frac{\theta}{2} + C_2, \quad V = C_1 \varphi + C_2. \quad (1.124)$$

Чтобы получить сжатые сфероидальные координаты, следует отправляться от соотношений (1.87)–(1.90). Вместо (1.119) теперь

$$f_1(\xi, \theta) = c \text{sh} \xi \cos \theta, \quad f_2(\xi, \theta) = c \text{ch} \xi \sin \theta, \quad (1.125)$$

откуда

$$x = c \text{ch} \xi \sin \theta \cos \varphi, \quad y = c \text{ch} \xi \sin \theta \sin \varphi, \quad z = c \text{sh} \xi \cos \theta. \quad (1.126)$$

Обычно считают  $\xi \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Поверхность  $\xi = \text{const}$  — сжатый эллипсоид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{\text{ch}^2 \xi} + \frac{z^2}{\text{sh}^2 \xi} = c^2,$$

при  $\xi = 0$  вырождающийся в диск  $x^2 + y^2 \leq c$ ,  $z = 0$ . Поверхность  $\theta = \text{const}$  — однополостный гиперboloид вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{\sin^2 \theta} - \frac{z^2}{\cos^2 \theta} = c^2.$$

При  $\theta = 0, \pi$  поверхность вырождается в ось  $z$ , при  $\theta = \pi/2$  — во внешность диска  $x^2 + y^2 \geq c$ ,  $z = 0$ .

Теперь

$$J = c^3 (\text{sh}^2 \xi + \cos^2 \theta) \text{ch} \xi \sin \theta, \quad (1.127)$$

$$H_1 = H_2 = c\sqrt{\text{sh}^2 \xi + \cos^2 \theta}, \quad H_3 = c \text{ch} \xi \sin \theta. \quad (1.128)$$

Оператор Лапласа определяется формулой

$$\begin{aligned} c^2 (\text{sh}^2 \xi + \cos^2 \theta) \Delta &= \frac{1}{\text{ch} \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \text{ch} \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \\ &+ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\text{sh}^2 \xi + \cos^2 \theta}{\text{ch}^2 \xi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (1.129)$$

Гармонические функции, зависящие лишь от одной из координат:

$$\begin{aligned} V &= C_1 \text{arctg sh} \xi + C_2, & V &= C_1 \ln \text{tg} \frac{\theta}{2} + C_2, \\ V &= C_1 \varphi + C_2. \end{aligned} \quad (1.130)$$

Иногда предпочтительнее модифицированные координаты

$$\sigma = \text{sh} \xi, \quad \eta = \cos \theta. \quad (1.131)$$

Поскольку  $\sigma$  зависит только от  $\xi$ ,  $\eta$  — от  $\theta$ , а угол  $\varphi$  преобразуется тождественно, то величины  $H_i$  получают лишь дополнительные множители  $\partial \xi / \partial \sigma$ ,  $\partial \theta / \partial \eta$ ,  $\partial \varphi / \partial \varphi = 1$ . В результате

$$\begin{aligned} H_1 &= c\sqrt{\frac{\sigma^2 + \eta^2}{1 + \sigma^2}}, & H_2 &= c\sqrt{\frac{\sigma^2 + \eta^2}{1 - \eta^2}}, \\ H_3 &= c\sqrt{(1 + \sigma^2)(1 - \eta^2)}. \end{aligned} \quad (1.132)$$



Формула (1.129) принимает вид

$$c^2 (\sigma^2 + \eta^2) \Delta = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ (1 + \sigma^2) \frac{\partial}{\partial \sigma} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \frac{\sigma^2 + \eta^2}{(1 + \sigma^2)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.133)$$

Прямой подстановкой убеждаемся, что функции

$$f(\sigma, \eta) = \frac{\sigma}{\sigma^2 + \eta^2}, \quad g(\sigma, \eta) = \frac{\eta}{\sigma^2 + \eta^2} \quad (1.134)$$

удовлетворяют уравнению Лапласа. Найдем более общее решение методом вариации произвольных постоянных в форме

$$V = B_1(\sigma) \frac{\sigma}{\sigma^2 + \eta^2} + B_2(\eta) \frac{\eta}{\sigma^2 + \eta^2}. \quad (1.135)$$

Воспользуемся формулой (1.2). Согласно (1.35) в координатах  $\sigma$ ,  $\eta$  и  $\varphi$  градиент имеет вид

$$c \text{ grad} = \left( \sqrt{\frac{1 + \sigma^2}{\sigma^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \sigma}, \sqrt{\frac{1 - \eta^2}{\sigma^2 + \eta^2}} \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{1}{\sqrt{(1 + \sigma^2)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right).$$

Уравнение Лапласа для функции (1.135) записывается теперь без труда

$$\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} [(1 + \sigma^2) B_1'] + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} [(1 - \eta^2) B_2'] - \frac{2(\sigma^2 - \eta^2)}{\sigma^2 + \eta^2} [(1 + \sigma^2) B_1' - (1 - \eta^2) B_2'] = 0. \quad (1.136)$$

Проверка показывает, что (1.136) удовлетворяется при

$$B_1'(\sigma) = \frac{D}{1 + \sigma^2}, \quad B_2'(\eta) = \frac{D}{1 - \eta^2}, \quad D = \text{const.}$$

Следовательно,

$$B_1(\sigma) = D \arctg \sigma + C_1, \quad B_2(\eta) = \frac{D}{2} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} + C_2.$$

### Параболоидные координаты (параболические координаты вращения)

Отправляясь от параболических координат (1.91), получим подстановку

$$x = uv \cos \varphi, \quad y = uv \sin \varphi, \quad z = \frac{u^2 - v^2}{2}. \quad (1.137)$$

Можно считать  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Координатные поверхности

$$x^2 + y^2 = u^4 - 2zu^2, \quad x^2 + y^2 = v^4 + 2zv^2 \quad (1.138)$$

представляют собой параболоиды вращения вокруг оси  $z$  с фокусом в начале координат, соответственно с верхней вершиной в точке  $z = u^2/2$  и нижней вершиной в точке  $z = -v^2/2$ .

Теперь

$$J = uv(u^2 + v^2), \quad (1.139)$$

$$H_1 = H_2 = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad H_3 = uv. \quad (1.140)$$

Для оператора Лапласа получаем формулу:

$$(u^2 + v^2)\Delta = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left( u \frac{\partial}{\partial u} \right) + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial v} \left( v \frac{\partial}{\partial v} \right) + \frac{u^2 + v^2}{u^2 v^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.141)$$

Решения уравнения Лапласа, зависящие лишь от одной координаты, очевидны:

$$V = C_1 \ln u + C_2, \quad V = C_1 \ln v + C_2, \quad V = C_1 \varphi + C_2. \quad (1.142)$$

### Бисферические координаты

Отправляясь от биполярных координат (1.98), получим подстановку

$$x = \frac{c \sin \theta \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}, \quad y = \frac{c \sin \theta \sin \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}, \quad z = \frac{c \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}. \quad (1.143)$$

Можно считать  $\xi \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Первое семейство координатных поверхностей — сферы

$$(z - c \operatorname{cth} \xi)^2 + x^2 + y^2 = c^2 / \operatorname{sh}^2 \xi \quad (1.144)$$

с центрами на оси  $z$ . Второе — поверхности вращения окружностей вокруг общей хорды (отрезка  $-c \leq z \leq c$  оси  $z$ ):

$$z^2 + \left( \sqrt{x^2 + y^2} - c \operatorname{ctg} \theta \right)^2 = \frac{c^2}{\sin^2 \theta}. \quad (1.145)$$

Теперь

$$J = -\frac{c^3 \sin \theta}{(\operatorname{ch} \xi - \cos \theta)^3}, \quad (1.146)$$

$$H_1 = H_2 = \frac{c}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}, \quad H_3 = \frac{c \sin \theta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}. \quad (1.147)$$

Для оператора Лапласа получаем формулу:

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{(\operatorname{ch} \xi - \cos \theta)^3} \Delta = & \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \\ & + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin \theta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta (\operatorname{ch} \xi - \cos \theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (1.148)$$

Зависящих лишь от  $\xi$  или  $\theta$  решений уравнения Лапласа не существует. Решение, зависящее лишь от  $\varphi$ , очевидно:

$$V(\varphi) = C_1 \varphi + C_2. \quad (1.149)$$

### Тороидальные координаты

Как и бисферические, тороидальные координаты получаются из биполярных (1.98), если поменять местами  $f_1$  и  $f_2$ . Именно,

$$x = \frac{c \operatorname{sh} \xi \cos \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}, \quad y = \frac{c \operatorname{sh} \xi \sin \varphi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}, \quad z = \frac{c \sin \theta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}. \quad (1.150)$$

Можно считать  $\xi \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Первое семейство координатных поверхностей — торы

$$\left( \sqrt{x^2 + y^2} - c \operatorname{cth} \xi \right)^2 + z^2 = \frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 \xi}. \quad (1.151)$$

Второе — пересекающиеся по окружности  $z = 0$ ,  $x^2 + y^2 = c^2$  сферы

$$x^2 + y^2 + (z - c \operatorname{ctg} \theta)^2 = \frac{c^2}{\sin^2 \theta}. \quad (1.152)$$

с центрами на оси  $z$ .

Теперь

$$J = -\frac{c^3 \operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{ch} \xi - \cos \theta)^3}, \quad (1.153)$$

$$H_1 = H_2 = \frac{c}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}, \quad H_3 = \frac{c \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}. \quad (1.154)$$

Для оператора Лапласа получаем формулу

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{(\operatorname{ch} \xi - \cos \theta)^3} \Delta = & \frac{1}{\operatorname{sh} \xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \xi (\operatorname{ch} \xi - \cos \theta)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (1.155)$$

Зависящих лишь от  $\xi$  или  $\theta$  решений уравнения Лапласа не существует. Решение, зависящее лишь от  $\varphi$ , очевидно:

$$V(\varphi) = C_1 \varphi + C_2. \quad (1.156)$$

### 1.5.3 Эллипсоидальные координаты

Фиксируем положительные числа  $c < b < a$  и рассмотрим приводящееся к кубическому уравнение

$$p(x, y, z, \lambda) = 1, \quad (1.157)$$

где

$$p(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda}. \quad (1.158)$$

Пусть все три координаты точки  $Q(x, y, z)$  отличны от нуля. Переменная (1.158) как функция от  $\lambda$  разрывна в трех точках  $-a^2$ ,  $-b^2$ ,  $-c^2$ , а в остальных точках убывает, имея отрицательную производную. Рассматривая поведение функции в четырех промежутках, на которые точки разрыва делят ось  $\lambda$ , убедимся, что уравнение (1.157) имеет три вещественных корня, по одному в каждом из указанных промежутков, за исключением самого левого. Обозначим эти корни через  $u > v > w$ :

$$-c^2 < u, \quad -b^2 < v < -c^2, \quad -a^2 < w < -b^2. \quad (1.159)$$

Если одна из декартовых координат обращается в нуль, то следует приравнять нулю соответствующий знаменатель в (1.158). При этом уравнение (1.157) сведется к квадратному. Если две из декартовых координат обращаются в нуль, то следует приравнять нулю два соответствующих знаменателя, а уравнение (1.157) сведется к линейному.

Пусть, например  $x = 0$ ,  $yz \neq 0$ . Тогда  $w = -a^2$ , а  $u$  и  $v$  находятся как корни уравнения

$$\frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

Если  $x = y = 0$ ,  $z \neq 0$ , то  $w = -a^2$ ,  $v = -b^2$ , а  $u$  находится как корень уравнения

$$\frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1.$$

Координатные поверхности даются уравнением (1.157) при замене  $\lambda$  на  $u$ ,  $v$  или  $w$

$$p(x, y, z, u) = 1, \quad (1.160)$$

$$p(x, y, z, v) = 1, \quad (1.161)$$

$$p(x, y, z, w) = 1. \quad (1.162)$$

Эллипсоид (1.160) при  $u \rightarrow \infty$  неограниченно расширяется, все более приближаясь по форме к сфере. При  $u = -c^2$  эллипсоид вырождается в диск

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} \leq 1, \quad z = 0. \quad (1.163)$$

Однополостный гиперболоид (1.161) при  $v = -b^2$  вырождается в часть плоскости  $xz$ , лежащую между ветвями гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} \leq 1, \quad y = 0. \quad (1.164)$$

При  $v = -c^2$  гиперболоид вырождается в часть плоскости  $xu$  вне диска (1.163):

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} \geq 1, \quad z = 0. \quad (1.165)$$

Двуполостный гиперboloид (1.162) при  $w \rightarrow -a^2$  вырождается в плоскость  $yz$ . При  $w \rightarrow -b^2$  гиперboloид вырождается в часть плоскости  $xz$ , лежащую вне ветвей гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} \geq 1, \quad y = 0. \quad (1.166)$$

Найдем обратное отображение. Перепишем (1.157) в виде

$$(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda} \right) = 0. \quad (1.167)$$

Фиксируем  $x, y, z$ . Левая часть (1.167) — полином третьей степени от  $\lambda$  со старшим членом  $\lambda^3$  и корнями  $u, v, w$ .

Применяя теорему о разложении полинома на линейные множители, приходим к тождеству

$$\begin{aligned} (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2 + \lambda} - \frac{y^2}{b^2 + \lambda} - \frac{z^2}{c^2 + \lambda} \right) = \\ = (\lambda - u)(\lambda - v)(\lambda - w). \end{aligned} \quad (1.168)$$

Устремляя в (1.168)  $\lambda$  к  $-a^2$ , получим

$$-x^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) = -(a^2 + u)(a^2 + v)(a^2 + w).$$

Аналогично строятся выражения, содержащие только  $y^2$  или  $z^2$ . Окончательно,

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 + u)(a^2 + v)(a^2 + w)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \\ y^2 &= -\frac{(b^2 + u)(b^2 + v)(b^2 + w)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2 + u)(c^2 + v)(c^2 + w)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Неравенства (1.159) показывают, что правые части (1.169) положительны, в вырожденных случаях обращаясь в нуль.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Эллипсоидальные координаты не являются координатами в полном смысле слова. Задание  $u, v, w$ , подчиненных условиям (1.159), определяет не одну, а согласно (1.169) восемь точек  $(\pm x, \pm y, \pm z)$ . В общем случае надо указать соответствующий

октант. Впрочем, чаще всего эллипсоидальные координаты применяются при наличии симметрии относительно трех координатных плоскостей, и тогда выбор знаков декартовых координат (1.169) не играет роли.

Переходим к вычислению матрицы Якоби. Логарифмируя равенства (1.169) и вычисляя дифференциалы, получим

$$\begin{aligned}\frac{2 dx}{x} &= \frac{du}{a^2 + u} + \frac{dv}{a^2 + v} + \frac{dw}{a^2 + w}, \\ \frac{2 dy}{y} &= \frac{du}{b^2 + u} + \frac{dv}{b^2 + v} + \frac{dw}{b^2 + w}, \\ \frac{2 dz}{z} &= \frac{du}{c^2 + u} + \frac{dv}{c^2 + v} + \frac{dw}{c^2 + w},\end{aligned}\tag{1.170}$$

что равносильно представлению

$$2\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \frac{x}{a^2+u} & \frac{x}{a^2+v} & \frac{x}{a^2+w} \\ \frac{y}{b^2+u} & \frac{y}{b^2+v} & \frac{y}{b^2+w} \\ \frac{z}{c^2+u} & \frac{z}{c^2+v} & \frac{z}{c^2+w} \end{pmatrix}.\tag{1.171}$$

Скалярное произведение первых двух столбцов равно

$$\frac{x^2}{(a^2 + u)(a^2 + v)} + \frac{y^2}{(b^2 + u)(b^2 + v)} + \frac{z^2}{(c^2 + u)(c^2 + v)}.$$

Разлагая дроби на простейшие, представим последнее выражение в форме

$$\frac{1}{u - v} \left[ \left( \frac{x^2}{a^2 + v} + \frac{y^2}{b^2 + v} + \frac{z^2}{c^2 + v} \right) - \left( \frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} \right) \right],$$

которая обращается в нуль в силу (1.160) и (1.161). По симметрии все столбцы  $\mathcal{A}$  ортогональны между собой.

Вычислим квадрат модуля первого вектор-столбца матрицы  $\mathcal{A}$ :

$$4H_1^2 = \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2}.\tag{1.172}$$

Правую часть можно выразить через эллипсоидальные координаты с помощью следующего приема. Рассмотрим (1.168) как тождество

двух функций от  $\lambda$ , зависящих от параметров  $x, y, z$ , от которых (и только от которых) зависят  $u, v, w$ . Продифференцируем (1.168) по  $\lambda$  и подставим затем  $\lambda = u$ . При дифференцировании правой части множитель  $(\lambda - v)(\lambda - w)$  можно считать постоянным, поскольку производная от него умножается на  $(\lambda - u)$  и исчезает после подстановки  $\lambda = u$ . Точно так же при вычислении производной от левой части можно считать постоянными первые три сомножителя. В результате

$$G(u) \left[ \frac{x^2}{(a^2 + u)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + u)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + u)^2} \right] = (u - v)(u - w),$$

где введена функция

$$G(\lambda) = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda). \quad (1.173)$$

Отсюда получаем первое из соотношений

$$\begin{aligned} 4H_1^2 &= \frac{(u - v)(u - w)}{G(u)}, \\ 4H_2^2 &= \frac{(v - w)(v - u)}{G(v)}, \\ 4H_3^2 &= \frac{(w - u)(w - v)}{G(w)}. \end{aligned} \quad (1.174)$$

Остальные получаются циклической перестановкой. В согласии с (1.159) и (1.172) правые части (1.174) положительны. Положительными будем считать и сами величины  $H_k$ .

Якобиан согласно (1.32) дается соотношением

$$8J = \frac{(u - v)(v - w)(w - u)}{\sqrt{-G(u)G(v)G(w)}}. \quad (1.175)$$

Заметим, что  $G(u) > 0$ ,  $G(v) < 0$ ,  $G(w) > 0$ . Правильно ли выбран знак якобиана? В определителе матрицы (1.171) считаем  $x, y, z$ , положительными,  $w = -a^2 + \varepsilon$ ,  $v = -b^2 + \varepsilon$ ,  $u = -c^2 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая положительная величина. Очевидно,

$$\det \mathcal{A} = \frac{xyz}{8\varepsilon^3} [-1 + \mathcal{O}(\varepsilon)] < 0.$$



Числитель (1.175) также отрицателен, что и завершает доказательство формулы (1.175) для малых  $\varepsilon$ . По принципу аналитического продолжения она верна всегда при положительных  $x, y, z$ .

Оператор Лапласа определяется формулой

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{4} = & \frac{\sqrt{G(u)}}{(u-v)(u-w)} \frac{\partial}{\partial u} \left( \sqrt{G(u)} \frac{\partial}{\partial u} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{-G(v)}}{(u-v)(v-w)} \frac{\partial}{\partial v} \left( \sqrt{-G(v)} \frac{\partial}{\partial v} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{G(w)}}{(u-w)(v-w)} \frac{\partial}{\partial w} \left( \sqrt{G(w)} \frac{\partial}{\partial w} \right). \end{aligned} \quad (1.176)$$

Выпишем решения уравнения Лапласа, зависящие лишь от одной переменной:

$$\begin{aligned} V &= \int \frac{C_1 du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} + C_2, \\ V &= \int \frac{C_1 dv}{\sqrt{-(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}} + C_2, \\ V &= \int \frac{C_1 dw}{\sqrt{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}} + C_2. \end{aligned} \quad (1.177)$$

Интегралы (1.177) сводятся к стандартным эллиптическим интегралам I и II рода.

Исследуем несколько важных функций эллипсоидальных координат, встречающихся при нахождении потенциала эллипсоидов.

**Пример 1.5.3.1.** Пусть

$$U(x, y, z) = \int_h^\infty \frac{f(p) d\lambda}{g(\lambda)}, \quad (1.178)$$

где  $h > -c^2$ ,  $p(x, y, z, \lambda)$  дается формулой (1.158), а

$$g(\lambda) = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}. \quad (1.179)$$

Функция  $f(p)$  предполагается дважды непрерывно дифференцируемой при  $p \geq 0$  и ограниченной вместе с первой производной. Поскольку  $p, g$  вещественно-аналитичны при  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $h \leq \lambda < \infty$ , то  $U$  дважды непрерывно дифференцируема, причем

первые и вторые производные можно вычислять под знаком интеграла (1.178).

Вычислим  $\Delta f(p)$ , опираясь на (1.4):

$$\begin{aligned} \Delta f(p) &= 4f''(p) \left[ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right] + \\ &+ 2f'(p) \left[ \frac{1}{a^2 + \lambda} + \frac{1}{b^2 + \lambda} + \frac{1}{c^2 + \lambda} \right], \end{aligned}$$

что можно представить в форме

$$\frac{\Delta f(p)}{g(\lambda)} = -4 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{f'(p)}{g(\lambda)} \right]. \quad (1.180)$$

Сравнение (1.178) и (1.180) показывает, что

$$\Delta U = -4 \int_h^\infty \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{f'(p)}{g(\lambda)} \right] d\lambda = 4 \frac{f'(p(x, y, z, h))}{g(h)}. \quad (1.181)$$

В частности, при  $h = 0$

$$\Delta U = \frac{4}{abc} f'(p(x, y, z, 0)). \quad (1.182)$$

**Пример 1.5.3.2.** Пусть  $\xi$  — положительная постоянная,  $h$  — наибольший корень уравнения

$$p(x, y, z, \lambda) = \xi \quad (1.183)$$

относительно  $\lambda$ . Уравнение (1.183), как и (1.157), имеет три вещественных корня. Наибольший из них находится на луче  $[-c, \infty)$ , причем в невырожденном случае  $h > -c^2$ . Положим

$$U(x, y, z, \xi) = \int_h^\infty \frac{f_1(q) d\lambda}{g(\lambda)}. \quad (1.184)$$

Здесь  $q = \xi - p(x, y, z, \lambda)$ ;  $f_1(q)$  — дважды непрерывно дифференцируемая при  $q \geq 0$  функция, ограниченная вместе с первой производной, причем

$$f_1(0) = f_1'(0) = 0. \quad (1.185)$$

При вычислении  $\partial U/\partial x$  можно считать  $h = \text{const}$ , поскольку производная  $\partial h/\partial x$  умножается на выражение, содержащее

$$f_1(q)|_{\lambda=h} = f_1(0) = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -2x \int_h^\infty \frac{f_1'(q) d\lambda}{g(\lambda)(a^2 + \lambda)}. \quad (1.186)$$

По-прежнему при дифференцировании можно считать  $h = \text{const}$ , так что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -2 \int_h^\infty \frac{f_1'(q) d\lambda}{g(\lambda)(a^2 + \lambda)} + 4x^2 \int_h^\infty \frac{f_1''(q) d\lambda}{g(\lambda)(a^2 + \lambda)^2}. \quad (1.187)$$

Складывая (1.187) с аналогичными выражениями для вторых производных по  $y$  и  $z$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta U &= -2 \int_h^\infty \left[ \frac{1}{a^2 + \lambda} + \frac{1}{b^2 + \lambda} + \frac{1}{c^2 + \lambda} \right] \frac{f_1'(q) d\lambda}{g(\lambda)} + \\ &+ 4 \int_h^\infty \left[ \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \right] \frac{f_1''(q) d\lambda}{g(\lambda)} = \\ &= 4 \int_h^\infty \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{f_1'(q)}{g(\lambda)} \right] d\lambda = \frac{4 f_1'(q)}{g(\lambda)} \Big|_h^\infty = 0. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\Delta U = 0. \quad (1.188)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Мы предполагали, что  $h > -c^2$ . Выведенные в разделе 1.5.3 свойства эллипсоидальных координат показывают, что это действительно так за исключением случая [ср. с формулой (1.163)], когда точка  $Q(x, y, z)$  лежит внутри эллипса

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} \leq \xi, \quad z = 0. \quad (1.189)$$

При выполнении (1.189) формула (1.188) может не иметь места.

**Пример 1.5.3.3.** Обозначим через  $U_1$  вторую производную от функции (1.184) по параметру  $\xi$ . Как и при дифференцировании по  $x$ , нижний предел  $h$  можно считать постоянным

$$U_1(x, y, z, \xi) = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \int_h^\infty \frac{f_1''(q) d\lambda}{g(\lambda)} \quad (1.190)$$

при условии равномерной сходимости интеграла справа. Поскольку производная гармонической функции по параметру гармонична, гармонической в силу (1.188) будет и  $U_1$ .

**Пример 1.5.3.4.** Положим в примере 1.5.3.3

$$f_1(q) = q^{3/2}, \quad f_1'(q) = (3/2)\sqrt{q}, \quad f_1''(q) = 3/(4\sqrt{q}). \quad (1.191)$$

Условия (1.185) выполнены. Образует функцию

$$U_2(x, y, z, \xi) = \frac{4}{3} U_1 = \int_h^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) q(\lambda)}}. \quad (1.192)$$

Мы не можем гарантировать гармоничности  $U_2$ , просто сославшись на предыдущий пример, поскольку  $f_1''(q)$  обращается в бесконечность при  $q = 0$ , т.е. при  $\lambda = h$ . Воспользуемся формулой Тейлора

$$q(\lambda) = q(h) + q'(h)(\lambda - h) + \dots = -\frac{\partial p(x, y, z, h)}{\partial h} (\lambda - h) + \dots$$

С учетом (1.158)

$$q(\lambda) = A(h)(\lambda - h) + \dots$$

Здесь

$$A(h) = \frac{x^2}{(a^2 + h)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + h)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + h)^2},$$

что положительно при  $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ . Поэтому интеграл (1.192) сходится, так что  $U_2$  гармонична вне эллипса (1.189).

Положим в (1.192)  $\xi = 1$  и получим

$$U_3(x, y, z) = \int_u^\infty \left\{ (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \times \right. \\ \left. \times [1 - p(x, y, z, \lambda)] \right\}^{-\frac{1}{2}} d\lambda, \quad (1.193)$$

где  $u$  — первая из эллиптических координат. Согласно (1.168)

$$1 - p(x, y, z, \lambda) = \frac{(\lambda - u)(\lambda - v)(\lambda - w)}{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}, \quad (1.194)$$

и интегралу (1.193) можно придать вид

$$U_3(u, v, w) = \int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - u)(\lambda - v)(\lambda - w)}}. \quad (1.195)$$

Сходимость интеграла (1.195) очевидна. Замена переменных

$$\lambda = u + (u - w) \operatorname{ctg}^2 t, \quad d\lambda = -\frac{2(u - w) \cos t}{\sin^3 t} \quad (1.196)$$

приводит (1.195) к форме

$$\begin{aligned} U_3 &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 dt}{\sqrt{(u - v) \sin^2 t + (u - w) \cos^2 t}} = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 dt}{\sqrt{(u - w) - (v - w) \sin^2 t}}. \end{aligned} \quad (1.197)$$

Окончательно,

$$U_3 = \frac{2}{\sqrt{u - w}} K(k) \quad (1.198)$$

при

$$k = \sqrt{\frac{v - w}{u - w}}. \quad (1.199)$$

Заметим, что  $u - w$  отделена от нуля. Согласно (1.159)  $0 \leq k \leq 1$ . Значение  $k = 1$  принимается только при  $u = v = -c^2$ , т.е. на пересечении множеств (1.163) и (1.165), что отвечает эллипсу  $T$ :

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad z = 0. \quad (1.200)$$

Значение  $k = 0$  принимается только при  $v = w = -b^2$ , т.е. на пересечении множеств (1.164) и (1.166), что отвечает гиперболу

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \quad y = 0. \quad (1.201)$$

По доказанному  $U_3$  гармонична в  $\mathbb{R}^3$  за возможным исключением сплошного эллипса

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} \leq 1, \quad z = 0.$$

Функция (1.198) вещественно-аналитична везде за возможным исключением точек, в которых  $k = 0$  или  $k = 1$ . Поскольку  $K(k)$  разлагается в ряд по четным степеням  $k$ ,  $k = 0$  не влечет сингулярности. Из этих двух утверждений заключаем, что  $U_3$  гармонична

всюду за исключением эллипса (1.200), где она имеет логарифмическую особенность.

ЗАМЕЧАНИЕ. Гармоничность функции  $U_3$ , определяемой согласно (1.195) или (1.198), вне эллипса  $T$ , который задается уравнениями (1.200), можно доказать и непосредственно, используя выражение (1.176) оператора Лапласа в эллипсоидальных координатах.

Найдем асимптотику  $U_3$  в окрестности  $T$ . Так как дополнительный модуль равен  $k'^2 = (u - v)/(u - w)$ , то согласно (10.72)

$$U_3 \sim \frac{1}{\sqrt{u - w}} \ln \frac{1}{u - v}. \quad (1.202)$$

Надо еще вернуться к декартовым координатам. Чтобы сделать выкладки менее громоздкими (хотя и менее симметричными), положим  $c = 0$ . Это допустимо и не умаляет общности, означая просто сдвиг  $\lambda \mapsto \lambda - c^2$ . Перепишем (1.157) в виде

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \lambda^2 (a^2 + b^2 - x^2 - y^2 - z^2) + \\ + \lambda [a^2 b^2 - x^2 b^2 - y^2 a^2 - z^2 (a^2 + b^2)] - z^2 a^2 b^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.203)$$

Величины  $u, v, w$  — корни (1.203) из промежутков

$$-a^2 < w < -b^2, \quad -b^2 < v < 0, \quad 0 < u.$$

Нас интересует случай бесконечно малых  $u, v, z$ .

По теореме Виета

$$u + v + w = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2,$$

откуда

$$w \sim x^2 + y^2 - a^2 - b^2.$$

Согласно (1.200) можно положить  $x^2 \sim a^2 \cos^2 \varphi$ ,  $y^2 \sim b^2 \sin^2 \varphi$ , так что

$$-w \sim \xi^2, \quad \text{где } \xi = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Пользуемся опять теоремой Виета

$$uvw = a^2 b^2 z^2, \quad uv \sim -\frac{a^2 b^2 z^2}{\xi^2},$$

$$uv + vw + wu = a^2b^2 - x^2b^2 - y^2a^2 - z^2(a^2 + b^2).$$

Оставляя главные члены, получим

$$w(u + v) \sim a^2b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Полагая  $x = a \cos \varphi + \delta x$ ,  $y = b \sin \varphi + \delta y$ , найдем

$$u + v \sim \frac{2ab}{\xi^2} (b \cos \varphi \delta x + a \sin \varphi \delta y).$$

Единичные векторы касательной и внешней нормали к эллипсоиду  $T$  имеют координаты

$$\left( -\frac{a \sin \varphi}{\xi}, \frac{b \cos \varphi}{\xi} \right) \quad \text{и} \quad \left( \frac{b \cos \varphi}{\xi}, \frac{a \sin \varphi}{\xi} \right),$$

соответственно. Поэтому

$$u + v \sim \frac{2ab}{\xi} s_1,$$

где  $s_1$  — смещение по нормали.

Имея сумму и произведение  $u$ ,  $v$ , легко найдем положительную разность

$$u - v \sim \frac{2ab}{\xi} s, \quad \text{при} \quad s = \sqrt{s_1^2 + z^2}.$$

Окончательно,

$$U_3 \sim \frac{1}{\xi} \ln \frac{1}{s}. \quad (1.204)$$

Получим еще асимптотику на бесконечности, когда  $u \sim r^2$  при ограниченности  $v$ ,  $w$ . В (1.198)  $u - w \rightarrow r^2$ ,  $k \rightarrow 0$ ,  $K(k) \rightarrow \pi/2$ , поэтому

$$U_3 \sim \frac{\pi}{r}. \quad (1.205)$$

**Пример 1.5.3.5.** Обозначим через  $U_4$  смешанную производную от функции (1.184) по параметру  $\xi$  и координате  $x$ . Как и  $U_1$ ,  $U_4$  гармонична и дается интегралом

$$U_4(x, y, z, \xi) = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial \xi} = -2x \int_h^\infty \frac{f_1''(q) d\lambda}{g(\lambda)(a^2 + \lambda)}. \quad (1.206)$$

Выбирая в качестве  $f_1$  функцию (1.191) и затем полагая  $\xi = 1$ , убедимся в гармоничности функции

$$U_5(x, y, z) = x \int_u^\infty \left\{ (a^2 + \lambda) \times \right. \\ \left. \times \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)[1 - p(x, y, z, \lambda)]} \right\}^{-1} d\lambda, \quad (1.207)$$

что согласно (1.194) можно представить в виде

$$U_5 = x \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda)\sqrt{(\lambda - u)(\lambda - v)(\lambda - w)}}. \quad (1.208)$$

Замена переменных (1.196) преобразует (1.208) к виду

$$U_5 = \frac{2x}{\sqrt{u - w}} \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \times \\ \times \left\{ [(a^2 + u) \sin^2 t + (u - w) \cos^2 t] \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \right\}^{-1} dt, \quad (1.209)$$

где  $k$  дается формулой (1.199). Сингулярность в (1.209) по-прежнему проявляется лишь при  $k = 1$ , что соответствует контуру эллипса, поскольку  $a^2 + u$ ,  $u - w$  положительны и отделены от нуля.

Установим асимптотику  $U_5$  при  $Q \rightarrow T$ , т.е. при  $u \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 1$ . Сингулярность проявляется только около верхнего предела интегрирования. При  $t = \pi/2$  отношение подынтегральных функций (1.209) и (1.197) равно

$$\frac{x}{a^2 + u} \sim \frac{x}{a^2}.$$

Поэтому аналогом (1.204) будет

$$U_5 \sim \frac{x}{a^2 \xi} \ln \frac{1}{s}, \quad (1.210)$$

где  $s$  — расстояние от  $Q$  до  $T$ .

На бесконечности  $u \sim r^2$ ,  $k \rightarrow 0$  при ограниченности  $v$ ,  $w$ . Полагая в знаменателе (1.209)  $k = a^2/u = w/u = 0$ , найдем

$$U_5 \sim \frac{\pi x}{2u^{3/2}} \sim \frac{\pi x}{2r^3}. \quad (1.211)$$



Интеграл (1.209) легко свести к стандартным эллиптическим интегралам I и II рода. Предварительно запишем его в виде

$$U_5 = \frac{2x}{(u-w)^{3/2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t dt}{(1+k^2 \operatorname{tg}^2 \theta \sin^2 t) \sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}.$$

Здесь и ниже

$$k^2 = \frac{v-w}{u-w}, \quad k'^2 = \frac{u-v}{u-w},$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{a^2+w}{v-w}, \quad \cos^2 \theta = \frac{v-w}{a^2+v}, \quad \sin^2 \theta = \frac{a^2+w}{a^2+v},$$

где все возводимые в квадрат величины считаются неотрицательными. Остается воспользоваться второй из формул (10.101)

$$U_5 = \frac{2x}{(v-w)\sqrt{u-w}} \left[ K \cos^2 \theta - \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \theta}} \Phi \right] \quad (1.212)$$

при

$$\Phi = (E-K) F(\theta, k') + K E(\theta, k').$$

Неуказанный модуль полных эллиптических интегралов принимается равным  $k$ .

## Глава 2

# Потенциал в пространствах различной размерности: общие свойства

### 2.1 Потенциал точки

Потенциал точки  $Q'$  массы  $m > 0$  определим как *элементарное* решение уравнения Лапласа (употребляются также термины *фундаментальное* и *сингулярное*), пропорциональное массе. Элементарным назовем решение (1.5), вещественно-аналитическое в  $\mathbb{R}^N \setminus Q'$  и зависящее только от  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Не умаляя общности, совместим  $Q'$  с началом координат. Согласно (1.43) потенциал точки оказывается решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr} \left( r^{N-1} \frac{dV}{dr} \right) = 0, \quad (2.1)$$

так что

$$V(r) = \begin{cases} -mC_1 r + \tilde{C}_1, & \text{если } N = 1, \\ -mC_2 \ln r^2 + \tilde{C}_2, & \text{если } N = 2, \\ \frac{mC_N}{r^{N-2}} + \tilde{C}_N, & \text{если } N \geq 3. \end{cases} \quad (2.2)$$

Выбор знаков в формуле (2.2) станет ясным из дальнейшего.

Неравенства (1.7) с очевидностью выполняются, так что функция  $V$  гармонична в  $\mathbb{R}^N$  с выколотым началом координат.

При  $N = 1$  потенциал бесконечен на бесконечности и имеет угловую точку в нуле. Последнее становится очевидным, если вспомнить, что на прямой  $r = |x|$ .

При  $N = 2$  потенциал бесконечен в обеих указанных точках.

При  $N \geq 3$  потенциал бесконечен в нуле и регулярен на бесконечности.

Физический смысл здесь следующий. При  $N = 1, 2$  для ухода на бесконечность требуется бесконечная работа: вторая космическая скорость бесконечна. При  $N \geq 3$  эта работа, а вместе с ней и вторая космическая скорость конечна. Отрыв от притягивающей точки при  $N = 1$  требует конечной работы, тогда как при  $N \geq 2$  — бесконечной. Таким образом, «черные дыры» ньютоновской гравитации, выход из которых требует бесконечной энергии, существуют при  $N \geq 2$  и отсутствуют при  $N = 1$ .

Аддитивные постоянные  $\tilde{C}_N$  несущественны. При  $N = 1$  можно положить  $\tilde{C}_1 = 0$ , фиксируя нулевое значение потенциала в притягивающей точке. При  $N \geq 3$  обычно полагают  $\tilde{C}_N = 0$ , фиксируя нулевое значение потенциала в бесконечно удаленной точке. При  $N = 2$  потенциал сингулярен в обеих указанных точках. Можно фиксировать произвольное  $r_0$  и положить  $\tilde{C}_2 = mC_2 \ln r_0^2$ . Тогда переменная под знаком логарифма окажется безразмерной:

$$V(r) = -mC_2 \ln(r/r_0)^2.$$

Если положить для простоты  $r_0 = 1$ , то значения потенциала будут зависеть от выбора единиц измерения расстояния. Это не совсем удобно, но допустимо, поскольку физический смысл имеют лишь разность потенциалов и градиент, а они не зависят ни от  $\tilde{C}_2$ , ни от  $r_0$ .

Постоянные  $C_N$  положительны, описывая притяжение, а не отталкивание. Мы живем в трехмерном мире, для которого  $C_3$  равно постоянной тяготения. Считаем далее постоянную тяготения равной единице, что возможно при специальном выборе единиц измерения. Впрочем, в выражение для потенциала постоянная тяготения входит множителем, который при желании легко восстановить.

Итак,  $C_3 = 1$ . Для разумного определения  $C_N$  при других размерностях исследуем предварительно притяжение протяженных тел и, в частности, притяжение  $n$ -мерной плоскости в  $\mathbb{R}^N$ .

## 2.2 Потенциал протяженного тела

Рассмотрим протяженное тело  $T$ . Стандартный способ определения потенциала  $T$  состоит в следующем. Разобьем  $T$  на большое число маленьких кусочков  $\Delta T$  массой  $\Delta m$  и заменим  $\Delta T$  одной из его точек  $Q'$ . Потенциал  $\Delta T$  и градиент потенциала  $\Delta T$  в точке  $Q$  приближенно равны

$$\Delta V \approx V_0(Q, Q') \Delta m, \quad \Delta \mathbf{w} \approx \mathbf{w}_0(Q, Q') \Delta m,$$

где  $V_0$  — потенциал в точке  $Q$ , индуцированный притяжением материальной точки  $Q'$  единичной массы. Символ  $\Delta$ , разумеется, означает здесь приращение, а не оператор Лапласа. Аналогично определяется  $\mathbf{w}_0$ . Суммируем вклад кусочков  $\Delta T$  и перейдем к пределу, устремляя к нулю диаметр наибольшего из  $\Delta T$ . Приходим к определению потенциала и его градиента в виде

$$V(Q) = \int_T V_0(Q, Q') dm = \int_T V_0(Q, Q') \varrho(Q') d\tau, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{w}(Q) = \int_T \mathbf{w}_0(Q, Q') dm = \int_T \mathbf{w}_0(Q, Q') \varrho(Q') d\tau. \quad (2.4)$$

Здесь  $dm$  и  $d\tau$  — элементы массы и объема тела  $T$ ;  $\varrho$  — плотность, предполагаемая интегрируемой. Тело  $T$  будем считать компактным, если не оговорено противное. Однако его размерность  $n = \dim T$  может принимать любые значения от 1 до  $N$ . Соответственно физическая размерность плотности в системе СИ есть  $\text{кг}/\text{м}^n$ . На плотность часто будем накладывать дополнительные ограничения гладкости.

## 2.3 Потенциал однородной $n$ -мерной плоскости

Найдем сначала потенциал одномерной плоскости, т.е. прямой. Пусть  $N \geq 4$ . Рассмотрим в  $\mathbb{R}^N$  ось  $x_N$  как материальную линию  $T$  с постоянной линейной плотностью  $\alpha$ . «Линейность» означает, что в системе СИ, например,  $\alpha$  измеряется в  $\text{кг}/\text{м}$ . Ниже встретится поверхностная плотность, измеряемая в  $\text{кг}/\text{м}^2$ , и плотность  $n$ -мерного многообразия, измеряемая в  $\text{кг}/\text{м}^n$ .

Бесконечно малый отрезок  $t \leq x_N < t + dt$  оси  $x_N$  имеет массу  $dm = \alpha dt$ . Потенциал отрезка в точке  $Q(x_1, \dots, x_{N-1}, 0) \in \mathbb{R}^{N-1}$  равен  $dV = C_N(t^2 + R^2)^{-(N-2)/2} dm$ , где  $R^2 = x_1^2 + \dots + x_{N-1}^2$ , см. рис. 2.1.

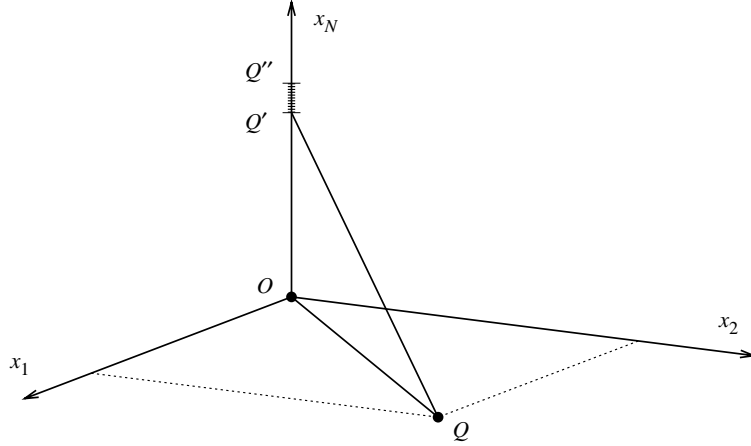


Рис. 2.1. К потенциалу бесконечной прямой:  $OQ' = t$ ,  $OQ'' = t + dt$ ,  $OQ = R$ ,  $Q'Q = \sqrt{t^2 + R^2}$ .

Потенциал прямой в точке  $Q$  подпространства  $\mathbb{R}^{N-1}$ , задаваемого уравнением  $x_N = 0$ , выражается интегралом

$$\begin{aligned} V(R) &= \int_T dV = \int_T \frac{C_N dm}{(t^2 + R^2)^{(N-2)/2}} = \\ &= \alpha C_N \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t^2 + R^2)^{(N-2)/2}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Согласно (10.48)

$$V(R) = \begin{cases} \alpha C_N \frac{(N-5)!!\pi}{(N-4)!!R^{N-3}}, & \text{если } N \text{ четно,} \\ \alpha C_N \frac{2(N-5)!!}{(N-4)!!R^{N-3}}, & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Функция (2.6) с точностью до постоянного множителя совпадает с потенциалом точки  $O$  массы  $\alpha$  в  $\mathbb{R}^{N-1}$ . Разумно отождествить ее с этим потенциалом. Иными словами, точке  $O$  в  $\mathbb{R}^{N-1}$  приписываем массу соответствующего отрезка единичной длины в  $\mathbb{R}^N$ . Тогда

$$C_N = \begin{cases} \frac{(N-4)!!}{(N-5)!!\pi} C_{N-1}, & \text{если } N \text{ четно,} \\ \frac{(N-4)!!}{2(N-5)!!} C_{N-1}, & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (2.7)$$

Отсюда  $C_4 = (1/\pi)C_3 = 1/\pi$ , а при  $N \geq 5$

$$C_N = \frac{N-4}{2\pi} C_{N-2}.$$

Окончательно,

$$C_N = \frac{2(N-4)!!}{(2\pi)^{(N-2)/2}}, \quad C_N = \frac{(N-4)!!}{(2\pi)^{(N-3)/2}} \quad (2.8)$$

при четном и нечетном  $N \geq 3$ , соответственно. Здесь принято  $(-1)!! = 1$ .

Обратимся к малым размерностям. При  $N = 3$  интеграл (2.5) расходится. Но физический смысл имеет лишь разность потенциалов, представляемая сходящимся интегралом

$$V(R) - V(R_0) = \alpha C_3 \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{t^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{t^2 + R_0^2}} \right) dt.$$

Этот интеграл является табличным

$$V(R) - V(R_0) = \alpha C_3 \ln \frac{t + \sqrt{t^2 + R^2}}{t + \sqrt{t^2 + R_0^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -\alpha C_3 \ln \frac{R^2}{R_0^2}.$$

Полагая несущественную константу  $V(R_0)$  равной нулю и вспоминая, что  $C_3 = 1$ , получим потенциал бесконечной прямой в  $\mathbb{R}^3$

$$V(R) = 2\alpha \ln \frac{R_0}{R}. \quad (2.9)$$

Отсюда следует

$$C_2 = 1. \quad (2.10)$$

Аналогичные построения при  $N = 2$  приводят к сходящемуся интегралу

$$V(R) - V(R_0) = \alpha C_2 \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{t^2 + R_0^2}{t^2 + R^2} dt.$$

Согласно (10.26)

$$\begin{aligned} V(R) - V(R_0) &= \\ &= \alpha C_2 \left( t \ln \frac{t^2 + R_0^2}{t^2 + R^2} + 2R_0 \operatorname{arctg} \frac{t}{R_0} - 2R \operatorname{arctg} \frac{t}{R} \right) \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = \\ &= 2\alpha C_2 \pi (R_0 - R). \end{aligned}$$

Полагая несущественную константу  $V(R_0) + 2\alpha C_2 \pi R_0$  равной нулю и вспоминая, что  $C_2 = 1$ , получим потенциал бесконечной прямой в  $\mathbb{R}^2$

$$V(R) = -2\pi\alpha R. \quad (2.11)$$

Отсюда следует

$$C_1 = 2\pi. \quad (2.12)$$

Резюмируем. При указанном выборе констант  $C_N$  потенциал бесконечной однородной прямой плотности  $\alpha$  в  $\mathbb{R}^N$  совпадает с потенциалом точки массы  $\alpha$  в  $\mathbb{R}^{N-1}$ .

Градиент элементарного потенциала  $\mathbf{w} = \operatorname{grad} V$  коллинеарен радиусу-вектору  $\mathbf{r}$  и направлен против него, описывая притяжение, а не отталкивание

$$\mathbf{w} = \begin{cases} -mC_1 \operatorname{sign} \mathbf{r}, & \text{если } N = 1, \\ -2mC_2 \frac{\mathbf{r}}{r^2}, & \text{если } N = 2, \\ -m(N-2)C_N \frac{\mathbf{r}}{r^N}, & \text{если } N \geq 3. \end{cases} \quad (2.13)$$

В одномерном пространстве векторы  $\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{r}$  превращаются в скаляры. Функция  $\operatorname{sign} \mathbf{r}$  равна плюс единице справа от притягивающей точки  $Q'$  и минус единице слева. В самой точке  $Q'$  гравитационное ускорение не определено.

Определим теперь потенциал однородной  $n$ -мерной плоскости  $T$  с плотностью  $\varrho$  в  $\mathbb{R}^N$ ,  $1 \leq n \leq N-1$ . Пусть это будет координатная плоскость  $x_{N-n+1}x_{N-n+2} \dots x_N$ , задаваемая уравнениями

$x_1 = x_2 = \dots = x_{N-n} = 0$ . По симметрии потенциал зависит только от координат  $x_1, \dots, x_{N-n}$ , описывающих пространство  $\mathbb{R}^{N-n}$ . Пусть  $Q \in \mathbb{R}^{N-n}$ ,  $N \geq n + 3$ . Формула (2.5) заменится на

$$V(N, n, R) = \varrho C_N U(N, n, R) \quad (2.14)$$

при

$$U(N, n, R) = \int \frac{dt_1 \cdots dt_n}{(t_1^2 + \dots + t_n^2 + R^2)^{(N-2)/2}}. \quad (2.15)$$

Здесь  $R = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{N-n}^2}$  — расстояние от  $Q$  до  $T$ ; по каждой из  $n$  переменных  $t_i$  интеграл берется от  $-\infty$  до  $\infty$ . Для ясности мы явно обозначили зависимость  $V$  от  $N, n$ . При  $R > 0$  интеграл (2.15) сходится, что легко установить переходом к сферическим координатам (см. раздел 1.3). Внутренний интеграл по  $t_n$  дается формулами (10.48), так что

$$U(N, n, R) = \begin{cases} \frac{(N-5)!! \pi}{(N-4)!!} U(N-1, n-1, R), & \text{если } N \text{ четно,} \\ \frac{2(N-5)!!}{(N-4)!!} U(N-1, n-1, R), & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (2.16)$$

С учетом связи (2.7) между  $C_N$  и  $C_{N-1}$  получим

$$V(N, n, R) = \varrho C_{N-1} U(N-1, n-1, R).$$

Продолжая процесс, придем к формуле

$$V(N, n, R) = \varrho C_{N-n} U(N-n, 0, R), \quad (2.17)$$

или, что то же,

$$V(N, n, R) = V(N-n, 0, R). \quad (2.18)$$

Иными словами, потенциал однородной  $n$ -мерной плоскости плотности  $\varrho$  в  $\mathbb{R}^N$  совпадает с потенциалом точки массы  $\varrho$  в  $\mathbb{R}^{N-n}$ .

То же верно и при  $N-n=1$ ,  $N-n=2$  при переходе к разности потенциалов и последующем предельном переходе, как это показано выше в случае  $n=1$ .



## 2.4 Дифференциальные свойства потенциала протяженного тела

Если  $Q$  лежит вне  $T$ , то подынтегральные функции в (2.3) и (2.4) аналитически зависят от координат точки  $Q$ . Действительно, правые части (2.2) и (2.13), рассматриваемые как функции от  $Q$ , вещественно-аналитичны в  $\mathbb{R}^N \setminus Q'$  и имеют особенность только при  $Q = Q'$ . При положении  $Q$  вне  $T$  совпадение  $Q$  и  $Q'$  невозможно.

Таким образом, *внешний потенциал и его градиент — вещественно-аналитические функции точки  $Q$* . Как следствие, они имеют производные всех порядков, которые можно вычислить дифференцированием под знаком интеграла.

Из этого свойства вытекает (докажите!)

$$\mathbf{w}(Q) = \text{grad } V(Q), \quad (2.19)$$

что оправдывает определение (2.3) и (2.4).

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Потенциал при  $Q \notin T$  принято называть внешним, а при  $Q \in T$  — внутренним. Обратим внимание, что это один и тот же потенциал, рассматриваемый в разных подмножествах  $\mathbb{R}^N$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Внешность компактного тела может не быть связной. Пример: шар с полостью. В общем случае множество точек вне  $T$  распадается на счетное множество областей. В каждой из них потенциал — аналитическая функция координат. По принципу аналитического продолжения она определяется однозначно, если известна в сколь угодно малой окрестности произвольной точки области. Но потенциалы в разных областях могут быть различными аналитическими функциями, непродолжимыми одна в другую. То же верно и для неограниченных тел. Так, если  $T$  — гиперплоскость, то потенциал по разные стороны от нее представляется различными аналитическими функциями.

### 2.4.1 Окрестность границы тела

Для внутреннего потенциала интегралы (2.3) и (2.4) — несобственные. Их дифференциальные свойства существенно зависят от размерностей  $N$  и  $n$  — пространства и тела  $T$ , соответственно.

При  $n = 0$  (материальная точка) вопрос исследован в разделе 2.1. Ниже считаем  $n \geq 1$ .

Сравнение (1.5) и (1.6) показывает, что при  $n = N$  на границе  $T$  (и на поверхностях разрыва плотности) по крайней мере одна из вторых производных потенциала терпит скачек. При  $n < N$   $n$ -мерная плотность отвечает бесконечной  $N$ -мерной плотности. Так что непрерывности можно ожидать только у  $V$  и  $\text{grad } V$ .

При  $N = 1$ ,  $n = 1$  подынтегральное выражение (2.3) как функция от  $x$  непрерывно, имея угловую точку при  $x = x'$ . Допустимо однократное дифференцирование под знаком интеграла. Функции  $V$ ,  $\partial V/\partial x$  непрерывны при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

При  $N = 2$  подынтегральное выражение имеет логарифмическую особенность, так что потенциал непрерывен на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ . При  $n = 2$  непрерывен и градиент, и допустимо дифференцирование под знаком интеграла (2.3). При  $n = 1$  первые производные терпят скачек.

Перейдем к общему случаю  $N \geq 2$ ,  $1 \leq n \leq N$ .

Пусть  $T$  — однородная  $n$ -мерная плоскость в  $\mathbb{R}^N$ ,  $1 \leq n \leq N$ . Мы установили в разделе 2.3, что  $T$  притягивает  $Q$  в точности как точка в  $\mathbb{R}^{N-n}$ . Поскольку внешний потенциал аналитичен, притяжение далекой от  $Q$  части  $T$  не играет роли в асимптотике  $V$  при  $Q \rightarrow T$ . Таким образом, если  $T$  — часть однородной  $n$ -мерной плоскости, то вблизи  $T$  (но, возможно, не вблизи границы  $T$  как  $n$ -мерного многообразия) поведение  $V$  оказывается таким же, как вблизи точки в  $(N - n)$ -мерном пространстве. То же верно при замене постоянной плотности на произвольную непрерывную и при замене плоскости на гладкую поверхность. Например, при  $n = N - 2$  ( $N \geq 3$ ) в согласии с (2.2)

$$V \sim -\varrho \ln s^2. \quad (2.20)$$

Здесь  $s$  — расстояние до  $T$ . Чем меньше размерность  $n$ , тем сильнее выражена сингулярность  $V$ . Внутренний потенциал бесконечен при  $n \leq N - 2$ .

Случай  $n = N - 1$  ( $N \geq 2$ ) представляет особый интерес в теории потенциала. Материальную  $(N - 1)$ -мерную поверхность в  $\mathbb{R}^N$  называют *простым слоем*. В согласии с (2.2) в окрестности  $T$  (но, возможно, не границы  $T$ )

$$V \sim -2\pi\varrho s, \quad (2.21)$$

так что потенциал простого слоя остается непрерывным при переходе через  $T$  (по крайней мере вне точек границы  $T$  как гладкого

многообразия). Однако его нормальная производная  $\partial V/\partial\nu$  в силу первой из формул (2.13) терпит скачок:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial\nu} \right|_{\nu=+0} - \left. \frac{\partial V}{\partial\nu} \right|_{\nu=-0} = -4\pi\rho. \quad (2.22)$$

Перейдем к рассмотрению потенциала  $N$ -мерного тела  $T$ , ограниченного кусочно-гладкой поверхностью, с кусочно-непрерывной плотностью. Вне зависимости от  $N$  потенциал и его градиент сохраняют непрерывность, скачок терпят лишь вторые производные (Михлин, 1977).

Вблизи изломов границы (в двумерном случае это прежде всего вершины, в трехмерном — ребра и конические точки; могут встретиться и более сложные особенности типа клюва и др.) поведение  $V$  часто (но не всегда) более сингулярно, чем вблизи гладкого участка границы. Мы покажем это на примерах.

Как уже говорилось, внешний потенциал — аналитическая функция координат. То же верно и для внутреннего потенциала в случае аналитической плотности — в частности, при постоянной плотности. Если плотность  $\rho(Q)$  имеет степень гладкости  $k \leq \infty$ , т.е. обладает непрерывными частными производными до порядка  $k$  включительно, то внутренний потенциал имеет степень гладкости не ниже  $k + 1$ . Заметим, что аналитичности или гладкости можно требовать локально, т.к. роль играет только сколь угодно малая окрестность точки  $Q$ . Для остальной части  $T$  потенциал в точке  $Q$  — внешний.

Перейдем к доказательству.

Пусть  $N = 1$ ,  $T$  — отрезок  $a \leq x \leq b$ . Согласно (2.2) и (2.3)

$$\begin{aligned} V(x) &= -C_1 \int_a^x \rho(x')(x-x') dx' - C_1 \int_x^b \rho(x')(x'-x) dx', \\ \frac{dV}{dx} &= -C_1 \int_a^x \rho(x') dx' + C_1 \int_x^b \rho(x') dx', \\ \frac{d^2V}{dx^2} &= -2C_1 \rho(x) = -4\pi \rho(x), \end{aligned} \quad (2.23)$$

так что степень гладкости  $V$  равна  $k + 2$  (а не  $k + 1$ , как при более высоких размерностях), и  $V$  аналитична при аналитичности  $\rho$ .

Пусть  $N \geq 3$ . Примем, что  $Q$  изменяется в открытом шаре  $T_0$  с началом в точке  $Q_0$  тела  $T$  и радиусом  $\varepsilon$ ;  $T_1$  — концентрический с  $T_0$  замкнутый шар радиусом  $2\varepsilon$ , лежащий в  $T$ ;  $S$  — граница шара  $T_1$ , см. рис. 2.2. Расположенную вне  $T_1$  часть  $T$  можно отбросить, т.к. создаваемый ею потенциал аналитичен в  $T_0$ .

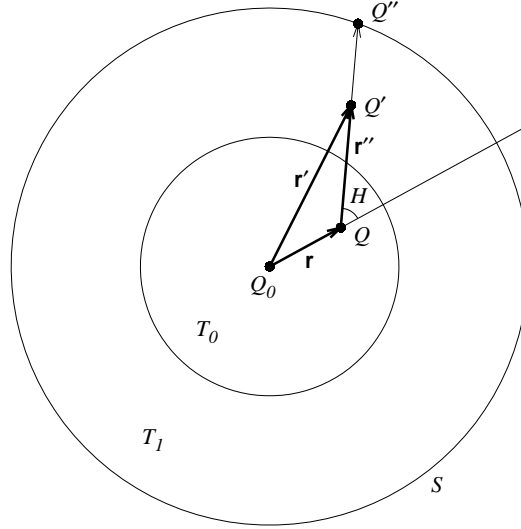


Рис. 2.2. К доказательству гладкости внутреннего потенциала. Внутренний шар  $T_0$  имеет радиус  $\varepsilon$ , внешний шар  $T_1$  —  $2\varepsilon$ .

Согласно (2.2) и (2.3)

$$V(Q) = C_N \int_{T_1} \varrho(Q') \frac{d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{N-2}}. \quad (2.24)$$

Правая часть (2.24) представляет собой интеграл со слабой особенностью, и допустимо однократное дифференцирование под знаком интеграла (*Михлин, 1977*)

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = (N-2)C_N \int_{T_1} \varrho(Q') \frac{(x'_1 - x_1) d\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^N}. \quad (2.25)$$

Перейдем от переменных интегрирования  $\mathbf{r}'$  (в векторной форме)

к  $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ , а затем к сферическим координатам с началом в  $Q$ . В силу (1.36) и (1.39)

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = (N-2)C_N \int_{\sigma} \cos \theta_2 d\sigma \int_0^{f(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')} \varrho(\mathbf{r} + \mathbf{r}'') dr''. \quad (2.26)$$

Здесь  $\sigma$  — единичная сфера,

$$d\sigma = \sin^{N-2} \theta_2 \sin^{N-3} \theta_3 \cdots \sin \theta_{N-1} d\theta_2 d\theta_3 \cdots d\theta_N$$

есть элемент «площади»  $[(N-1)$ -мерной меры]  $\sigma$ ,  $f$  — расстояние от  $Q$  до точки  $Q''$  сферы  $S$ , в которой ее пересекает продолжение вектора  $\mathbf{r}''$  с началом в  $Q$ . Иными словами,  $Q''$  совпадает с концом вектора

$$\mathbf{r} + f\mathbf{r}''/r''. \quad (2.27)$$

Приравнивая модуль вектора (2.27) числу  $2\varepsilon$ , получим квадратное уравнение, единственный положительный корень которого равен

$$f = \sqrt{4\varepsilon^2 - r^2 \sin^2 H} - r \cos H \geq \varepsilon, \quad (2.28)$$

где  $H$  — угол между векторами  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}''$ . Существенно, что  $f$  зависит только от направления вектора  $\mathbf{r}''$ , но не от его длины. Очевидно, величины  $4\varepsilon^2 - r^2 \sin^2 H$  и  $f$  отделены от нуля, а функции

$$r \cos H = x_1 \frac{x_1''}{r''} + x_2 \frac{x_2''}{r''} + \dots, \quad r^2 \sin^2 H = 1 - (r \cos H)^2$$

являются многочленами от декартовых координат точки  $Q$  и целыми функциями от сферических координат точки  $Q''$ . Поэтому интеграл (2.26) обладает по меньшей мере  $k$  непрерывными частными производными по координатам точки  $Q$  и потенциал  $V$  имеет степень гладкости не ниже  $k+1$  (то, что первая производная взята по  $x_1$ , роли не играет). Аналитичность  $V$  при аналитичности  $\varrho$  также доказана.

В случае  $N=2$  интегралы (2.24)–(2.26) переходят в

$$V(Q) = -C_2 \int_T \varrho(Q') \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 d\tau,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2C_2 \int_T \varrho(Q') \frac{x_1' - x_1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d\tau,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 2C_2 \int_{\sigma} \cos \theta_2 d\sigma \int_0^{f(\mathbf{r}, \mathbf{r}'')} \varrho(\mathbf{r} + \mathbf{r}'') dr''.$$

Последний совпадает с (2.26) с точностью до постоянного множителя, отличного от нуля.

Утверждение о гладкости внутреннего потенциала доказано.

## 2.4.2 Асимптотика на бесконечности

Важное значение имеет асимптотика потенциала на больших расстояниях от притягивающего тела.

При  $N = 1$  в силу (3.6) (см. ниже) имеем при больших  $r$  точную формулу

$$V = -MC_1 r = -2\pi M r, \quad (2.29)$$

где через  $M$  мы всегда будем обозначать общую массу тела  $T$ . Несущественная аддитивная постоянная опущена.

При больших размерностях воспользуемся представлением

$$s^2 = r^2(1 - 2\varepsilon \cos H + \varepsilon^2),$$

где  $\varepsilon = r'/r$ ;  $r, r', s$  — расстояния  $OQ, OQ', QQ'$ ;  $O$  — начало координат;  $H$  — угол между векторами  $OQ, OQ'$ . Поскольку

$$\ln s^2 = \ln r^2 - 2\varepsilon \cos H - \varepsilon^2 \cos 2H + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^{N-2}} &= \frac{1}{r^{N-2}} \times \\ &\times \left[ 1 + (N-2)\varepsilon \cos H - \frac{N-2}{2}(1 - N \cos^2 H) \varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right], \end{aligned}$$

то

$$V = -MC_2 \ln r^2 + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon}) = -M \ln r^2 + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon}) \quad (2.30)$$

при  $N = 2$ ,

$$V = \frac{C_N M}{r^{N-2}} [1 + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon})] \quad (2.31)$$

при  $N \geq 3$ . Здесь  $\tilde{\varepsilon} = r_0/r$ ,  $r_0$  — характерный размер тела  $T$ .

Асимптотика градиента потенциала выводится аналогично, с использованием (2.13).

При  $N = 1$  имеем точную формулу

$$\mathbf{w} = -2\pi M \operatorname{sign} \mathbf{r}. \quad (2.32)$$

При  $N = 2$

$$\mathbf{w} = -2M \frac{\mathbf{r}}{r^2} + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon}^2). \quad (2.33)$$

При  $N \geq 3$

$$\mathbf{w} = -M(N-2)C_N \frac{\mathbf{r}}{r^N} + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon}^N). \quad (2.34)$$

Если за  $O$  взять центр масс  $T$ , то в (2.30), (2.31), (2.33) и (2.34) степень остаточного члена повышается на единицу (докажите!).

*Вопрос.* Почему нельзя правые части (2.33) и (2.34) заменить первым слагаемым, помноженным на  $1 + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon})$ , как это сделано в (2.31)?

Обратим внимание на естественный характер асимптотических формул (2.30), (2.31), (2.33) и (2.34): с большого расстояния любое тело видится точкой.

## 2.5 Симметрия

Потенциал симметричного тела симметричен. Если тело  $T$  переходит в себя после некоторого преобразования пространства, то в себя перейдет и его потенциал. Точнее, потенциал (и его производные) инвариантны относительно указанного преобразования.

Это нетрудно доказать и формально. Пусть  $G$  — какая-либо подгруппа группы движений  $\mathbb{R}^N$  с отражениями,  $g$  — элемент группы  $G$ . Если  $Q$  — точка в  $\mathbb{R}^N$ , то через  $gQ$  будем обозначать образ  $Q$  при преобразовании  $g$ . Если  $T$  — множество точек в  $\mathbb{R}^N$ , то  $gT$  — образ  $T$  при преобразовании  $g$ . Тело  $T$  геометрически симметрично относительно подгруппы  $G$ , если

$$gT = T \quad (2.35)$$

для любого  $g \in G$ . Однако геометрической симметрии недостаточно. Нужна симметрия масс. Именно, *материальное* тело  $T$  считается симметричным, если

$$\varrho(gQ) = \varrho(Q) \quad (2.36)$$

для любого  $g \in G$ . Вне  $T$  плотность  $\varrho$  считается равной нулю. Симметрия масс влечет геометрическую симметрию. Обратное неверно. Так, шар в  $\mathbb{R}^3$  с центром в начале координат, состоящий из двух

однородных половинок разной плотности, геометрически симметричен относительно группы  $G_1$  вращений пространства, но симметрия масс относительно  $G_1$  отсутствует. Заметим, что указанный материальный шар симметричен относительно группы  $G_2$  вращений вокруг оси, являющейся осью симметрии каждой из половинок. Для однородных тел геометрическая симметрия и симметрия масс совпадают.

Элементарно доказывается, что (2.36) влечет инвариантность потенциала относительно группы  $G$ :

$$V(gQ) = V(Q) \quad (2.37)$$

для любого  $g \in G$ .

Приведем примеры симметричных материальных тел в  $\mathbb{R}^3$ .

### **Зеркальная симметрия север–юг**

Пусть материальное тело  $T$  зеркально-симметрично относительно некоторой плоскости. Примем ее за плоскость  $xy$  (в дальнейшем мы не будем оговаривать специальный выбор выделенных осей и плоскостей). Зеркальная симметрия в согласии с (2.36) означает

$$\varrho(x, y, -z) = \varrho(x, y, z), \quad \varrho(r, \pi - \theta, \varphi) = \varrho(r, \theta, \varphi) \quad (2.38)$$

в декартовых и сферических координатах, соответственно. В силу (2.37) такой же симметрией обладает и потенциал

$$V(x, y, -z) = V(x, y, z), \quad V(r, \pi - \theta, \varphi) = V(r, \theta, \varphi). \quad (2.39)$$

Ниже соотношения типа (2.39) не выписываем.

### **Поворотная симметрия север–юг**

Пусть  $T$  переходит в себя после поворота на угол  $\pi$  вокруг одной из осей, проходящих через начало и лежащих в плоскости  $xy$  — например, оси  $x$

$$\varrho(x, -y, -z) = \varrho(x, y, z), \quad \varrho(r, \pi - \theta, -\varphi) = \varrho(r, \theta, \varphi). \quad (2.40)$$

Однородный эллипсоид и брус (прямоугольный параллелепипед) обладают обоими типами симметрии север–юг относительно



своих плоскостей зеркальной симметрии. Правильная пирамида, основание которой является многоугольником с нечетным числом сторон, обладает зеркальной симметрией относительно подходящей плоскости, проходящей через вершину. Но в этой плоскости нет ни одной оси симметрии поворота на угол  $\pi$  (за исключением случая правильного тетраэдра). Напротив, брус с неравными ребрами обладает поворотной симметрией север–юг относительно подходящей оси, лежащей в плоскости, проходящей через противоположные параллельные ребра. Но эта плоскость не является плоскостью зеркальной симметрии.

### Симметрия поворота вокруг оси $z$ на дискретные углы

Пусть для некоторого натурального  $l$  тело  $T$  переходит в себя после поворота на угол  $2\pi/l$  вокруг оси  $z$

$$\varrho\left(r, \theta, \varphi + \frac{2\pi}{l}\right) = \varrho(r, \theta, \varphi). \quad (2.41)$$

Примеры: правильная пирамида и призма ( $l$  — число углов многоугольника в основании); брус ( $l = 2$ ); куб ( $l = 4$ ); трехосный эллипсоид ( $l = 2$ ); эллиптический цилиндр ( $l = 2$ ). Однородность не обязательна, но требуется соблюдение равенства (2.41).

### Осевая симметрия

Пусть  $T$  переходит в себя после поворота на произвольный угол вокруг оси  $z$ . Иначе говоря, плотность не зависит от долготы

$$\varrho = \varrho(r, \theta). \quad (2.42)$$

Примеры: круговой цилиндр, круговой конус, эллипсоид вращения.

### Сферическая симметрия

Пусть  $T$  переходит в себя после произвольного вращения пространства. Иначе говоря, плотность зависит только от радиуса

$$\varrho = \varrho(r). \quad (2.43)$$

Пример: шар, поверхности равной плотности которого суть сферы.

Перечисленные симметрии могут как поглощать друг друга (осевая симметрия влечет дискретную при любом  $l$ ; сферическая симметрия влечет осевую при любом выборе оси, проходящей через центр симметрии), так и быть независимыми (зеркальная и поворотные симметрии; симметрии дискретного поворота при  $l = 3$  и  $l = 5$ ).

В этом параграфе мы рассмотрели лишь случаи  $N = 3$ ,  $n = \dim T = 3$ . Обобщение на произвольные  $N$  и  $n$  тривиально.

## 2.6 Формулы Остроградского–Гаусса и Пуассона

Формулы (2.13) позволяют вычислить поток  $\mathcal{W}$  вектора  $\mathbf{w}$  через сферу произвольного радиуса с центром в начале координат

$$\mathcal{W} = \begin{cases} -mC_1\pi_1, & \text{если } N = 1, \\ -2mC_2\pi_2, & \text{если } N = 2, \\ -m(N-2)C_N\pi_N, & \text{если } N \geq 3. \end{cases}$$

Здесь  $\pi_N$  — площадь (мера) единичной сферы в  $\mathbb{R}^N$ . Согласно формуле Якоби (*Фихтенгольца, 1997б*, п. 676), (*Курант, 1970*)

$$(N-2)!!\pi_N = \begin{cases} (2\pi)^{N/2}, & \text{если } N \text{ четно,} \\ 2(2\pi)^{(N-1)/2}, & \text{если } N \text{ нечетно.} \end{cases} \quad (2.44)$$

В частности,

$$\pi_1 = 2, \quad \pi_2 = 2\pi, \quad \pi_3 = 4\pi, \quad \pi_4 = 2\pi^2.$$

Согласно (2.8), (2.10), (2.12) и (2.44)

$$C_N\pi_N = \begin{cases} 4\pi, & \text{если } N = 1, \\ 2\pi, & \text{если } N = 2, \\ 4\pi/(N-2), & \text{если } N \geq 3, \end{cases} \quad (2.45)$$

и окончательно

$$\mathcal{W} = -4\pi m \quad (2.46)$$

независимо от размерности  $N$ .

Нетрудно показать [см., например, (*Антонов и др.*, 1989, § 1.7)], что формула Остроградского–Гаусса (2.46) справедлива для любого протяженного тела при замене  $m$  на массу  $M$  тела для потока через произвольную кусочно-гладкую поверхность, целиком охватывающую тело. Если  $\dim T = N$  и в окрестности точки  $Q$  плотность тела непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с произвольным показателем, то из (2.46) вытекает уравнение Пуассона (1.6), см. (*Михлин*, 1977). Вне тела  $\varrho = 0$ , и уравнение Пуассона переходит в уравнение Лапласа (1.5).

Для доказательства (1.6) используется условие Липшица. Но не является ли оно излишним? Ведь при непрерывности  $\varrho$  обе части (1.6) выглядят вполне осмысленными. Более того, при  $N = 1$  условие Липшица не нужно, что следует из равенства (2.23). Однако при  $N = 3$  это уже не так, как показано в § 2.14 книги (*Гюнтер*, 1953). Из построенного там примера вытекает, что непрерывности  $\varrho$  в точке  $Q$  в общем случае недостаточно даже для существования вторых производных в этой точке. Небольшая модификация примера распространяет это утверждение на случаи  $N = 2$ ,  $N > 3$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если воспользоваться понятиями обобщенной производной и обобщенного решения уравнения Пуассона (*Михлин*, 1977), то при  $\varrho$ , суммируемой с произвольной степенью  $p > 1$ , потенциал  $V$  обладает обобщенными вторыми производными, также суммируемыми со степенью  $p > 1$ , и является обобщенным решением уравнения Пуассона (1.6).

## Глава 3

### Потенциал на прямой (линейный потенциал)

Потенциал точки  $Q'$  и его градиент в  $\mathbb{R}^1$  согласно (2.2), (2.12), (2.13) определяются формулами

$$V(x) = -2\pi m|x - x'|, \quad (3.1)$$

$$w(x) = \frac{dV(x)}{dx} = \begin{cases} 2\pi m, & \text{если } x < x', \\ -2\pi m, & \text{если } x > x'. \end{cases} \quad (3.2)$$

Определим теперь притяжение масс, распределенных вдоль прямой, так что элементу  $dx'$  отвечает масса  $dm$ . Интегрируя (3.2) от минус до плюс бесконечности, получим

$$w(x) = 2\pi [m_2(x) - m_1(x)], \quad (3.3)$$

где  $m_1$  — масса слева от  $Q$ ,  $m_2$  — масса справа. Полная масса  $M = m_1(x) + m_2(x)$  предполагается конечной. Для потенциала

$$V(x) = -2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |x - x'| dm. \quad (3.4)$$

Выразим элемент массы через плотность  $dm = \varrho(x') dx'$ . Разбивая область интегрирования точкой  $x$  на две части и обозначая  $x'$  через  $t$ , получим из (3.4)

$$V(x) = 2\pi x[m_2(x) - m_1(x)] + 2\pi \int_{-\infty}^x t \varrho(t) dt - 2\pi \int_x^{+\infty} t \varrho(t) dt. \quad (3.5)$$

### 3.1 Отрезок с произвольной плотностью

Пусть  $T$  — отрезок  $a \leq x \leq b$ . Из (3.5) вытекает

$$\frac{1}{2\pi} V(x) = \begin{cases} Mx - A, & \text{если } x \leq a, \\ -Mx + A, & \text{если } x \geq b, \\ x[m_2(x) - m_1(x)] + \\ + \int_a^x t \varrho(t) dt - \int_x^b t \varrho(t) dt, & \text{если } a \leq x \leq b, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $A = \int_a^b t \varrho(t) dt = \text{const}$ .

При интегрируемой плотности в согласии с результатами раздела 2.4 потенциал непрерывен вместе с первой производной во всем  $\mathbb{R}^1$ . Если плотность имеет гладкость  $k$ , то внутренний потенциал имеет гладкость  $k+2$ . В частности, для существования второй производной и справедливости уравнения Пуассона (2.23) достаточно непрерывности плотности.

Внешний потенциал отрезка с точностью до несущественного слагаемого совпадает с потенциалом точки той же массы.

Внутренний потенциал отрезка элементарен при плотностях  $\varrho$  из обширного множества функций, как показывает (3.6). В частности, он элементарен, если  $\varrho$  — многочлен или дробно-рациональная функция.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Согласно построениям в разделе 2.1 линейный потенциал точки  $Q'(x')$  массой  $m$  в  $\mathbb{R}^1$  можно интерпретировать как логарифмический потенциал однородной прямой  $x = x'$  с линейной плотностью  $m$  в  $\mathbb{R}^2$ , а также как ньютонов потенциал однородной плоскости  $x = x'$  с поверхностной плотностью  $m$  в  $\mathbb{R}^3$ . Поэтому линейный потенциал отрезка с плотностью  $\varrho(x)$  совпадает с логарифмическим потенциалом полосы  $a \leq x \leq b$  с плотностью  $\varrho(x)$  в  $\mathbb{R}^2$  и ньютоновским потенциалом слоя  $a \leq x \leq b$  с плотностью  $\varrho(x)$  в  $\mathbb{R}^3$ . Мы еще коснемся этого аспекта теории потенциала в главах 4, 6, 7.

## 3.2 Однородный отрезок

Пусть  $T$  — однородный отрезок  $a \leq x \leq b$ . Потенциал при  $a \leq x \leq b$  равен

$$V(x) = -2\pi\varrho \left[ \left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{(b-a)^2}{4} \right]. \quad (3.7)$$

Вне отрезка

$$V(x) = -2\pi\varrho(b-a) \left| x - \frac{a+b}{2} \right|. \quad (3.8)$$

Градиент потенциала при  $a \leq x \leq b$  равен

$$\frac{dV(x)}{dx} = -4\pi\varrho \left( x - \frac{a+b}{2} \right). \quad (3.9)$$

Вне отрезка

$$\frac{dV(x)}{dx} = -2\pi M \operatorname{sign} \left( x - \frac{a+b}{2} \right). \quad (3.10)$$

Потенциал непрерывен вместе с первой производной при всех  $x$ .

## Глава 4

# Логарифмический потенциал одномерных тел

Потенциал точки  $Q'$  в  $\mathbb{R}^2$  согласно (2.2), (2.10) определяется формулой

$$V(R) = -m \ln \frac{R^2}{R_0^2} = -2m \ln \frac{R}{R_0}. \quad (4.1)$$

В двумерном случае расстояние от  $Q'$  до  $Q$  принято обозначать большой буквой  $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ ;  $R_0$  — несущественная положительная постоянная, имеющая размерность длины. Как правило, ниже полагаем ее равной единице. В выражение для градиента (2.13)

$$\mathbf{w} = -2m \frac{\mathbf{R}}{R^2} \quad (4.2)$$

константа  $R_0$  не входит. Символом  $\mathbf{R}$  обозначен вектор  $Q'Q$  с координатами  $x - x'$ ,  $y - y'$ .

Потенциал материальной кривой  $T$  с линейной плотностью  $\alpha$  в силу (2.3) и (4.1) определяется криволинейным интегралом

$$V(Q) = V(x, y) = - \int_T \alpha(x', y') \ln [(x' - x)^2 + (y' - y)^2] ds, \quad (4.3)$$

где  $ds$  — элемент длины  $T$ , см. рис. 4.1. От кривой  $T$  достаточно потребовать лишь спрямляемости, хотя в приложениях встречаются почти исключительно кусочно-гладкие кривые.

При интегрируемой плотности  $\alpha$  потенциал (4.3) непрерывен на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , но его первые производные терпят разрыв на  $T$ .

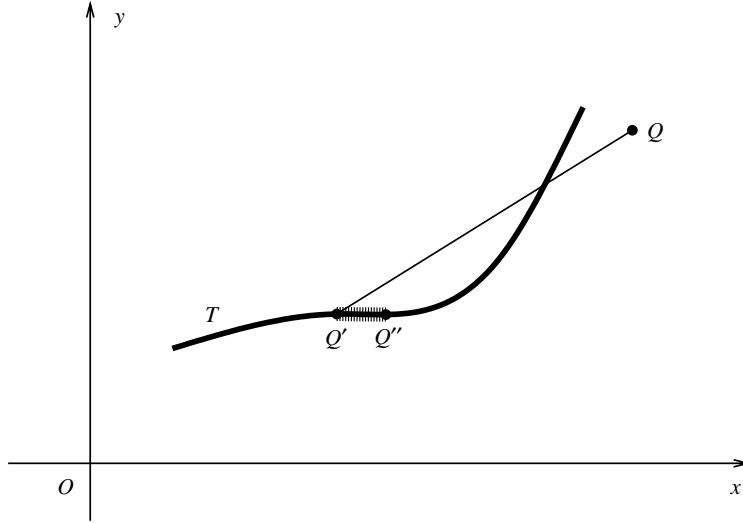


Рис. 4.1. К потенциалу кривой  $T$  в точке  $Q(x, y)$ . Притягивающий элемент  $Q'Q''$  обладает массой  $dm = \alpha(Q') ds$ ,  $ds = |Q'Q''|$ ; точка  $Q'$  имеет координаты  $(x', y')$ ;  $|Q'Q| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ .

На бесконечности согласно (2.30) имеем асимптотику

$$V \sim -M \ln R^2 + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.4)$$

Здесь  $\varepsilon = R_0/R$ , где  $R_0$  — характерный размер  $T$ . Если за начало координат взять центр масс  $T$ , то остаточный член можно заменить на  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Согласно построениям раздела 2.1 логарифмический потенциал точки  $Q(x', y')$  массой  $m$  в  $\mathbb{R}^2$  можно интерпретировать как ньютонов потенциал однородной прямой  $x = x'$ ,  $y = y'$  с линейной плотностью  $m$  в  $\mathbb{R}^3$ . Поэтому логарифмический потенциал кривой  $T$  с линейной плотностью  $\alpha(x, y)$  совпадает с ньютоновым потенциалом цилиндра, построенного на  $T$  как на образующей, с поверхностной плотностью  $\alpha(x, y)$ , независимой от  $z$ .



## 4.1 Отрезок

### 4.1.1 Общий случай

Рассмотрим отрезок  $a \leq y \leq b$  оси  $y$  с линейной плотностью  $\alpha(y)$ ;  $a < b$ . Теперь  $ds = dy'$ , см. рис. 4.2. Формула (4.3) принимает вид

$$V = - \int_a^b \alpha(y') \ln [x^2 + (y' - y)^2] dy'. \quad (4.5)$$

Пусть  $\alpha^*(y')$  — фиксированная первообразная от  $\alpha(y')$ . Полагая  $y' = t + y$  и интегрируя (4.5) по частям, получим

$$V = -\alpha^*(t + y) \ln(x^2 + t^2) \Big|_{t=a-y}^{t=b-y} + 2 \int_{a-y}^{b-y} \frac{t \alpha^*(t + y)}{x^2 + t^2} dt. \quad (4.6)$$

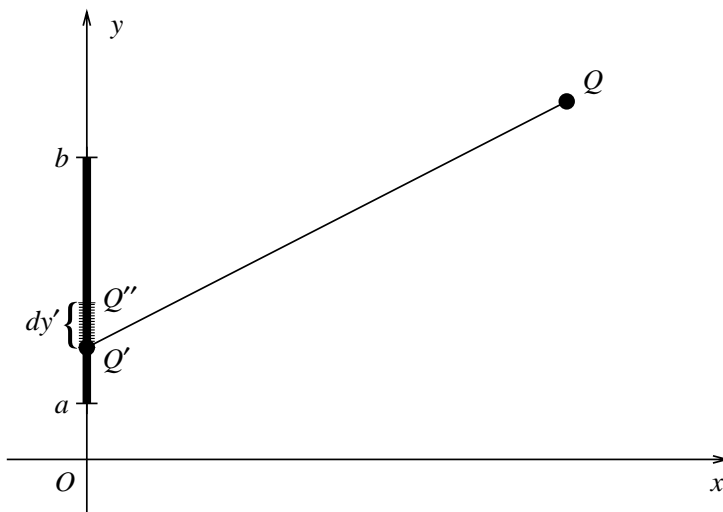


Рис. 4.2. К потенциалу отрезка в точке  $Q(x, y)$ . Притягивающий элемент  $Q'Q''$  обладает массой  $dm = \alpha(Q') dy'$ , где точка  $Q'$  имеет координаты  $(0, y')$ , точка  $Q'' = (0, y' + dy')$ .

Интеграл в (4.6) элементарен, если  $\alpha^*(y)$  — рациональная функция, в частности, если  $\alpha(y)$  — многочлен.

#### 4.1.2 Однородный отрезок

Рассмотрим однородный отрезок  $a \leq y \leq b$  оси  $y$  с постоянной линейной плотностью  $\alpha$ .

В качестве первообразной от  $\alpha(y')$  выберем  $\alpha^*(y') = (y' - y)\alpha$ . Согласно (4.6)

$$V = -\alpha t \ln(x^2 + t^2) \Big|_{t=a-y}^{t=b-y} + 2\alpha \int_{a-y}^{b-y} \frac{t^2 dt}{x^2 + t^2}.$$

Вычисляя интеграл, получим

$$\begin{aligned} \frac{V}{\alpha} &= 2(b-a) + (a-y) \ln[x^2 + (a-y)^2] - \\ &- (b-y) \ln[x^2 + (b-y)^2] + 2x \left[ \operatorname{arctg} \frac{a-y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{b-y}{x} \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Определим компоненты градиента

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= 2\alpha \left( \operatorname{arctg} \frac{a-y}{x} - \operatorname{arctg} \frac{b-y}{x} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \alpha \ln \frac{x^2 + (b-y)^2}{x^2 + (a-y)^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Формулы (4.7) показывают, что потенциал непрерывен на всей плоскости, включая сам отрезок. В силу (4.8) градиент терпит разрыв в точках отрезка. Точнее, касательная составляющая  $\partial V/\partial y$  непрерывна всюду, кроме концов отрезка; нормальная составляющая  $\partial V/\partial x$  терпит скачок при пересечении отрезка. Ясно, что эти свойства сохраняются для любой кусочно-гладкой кривой  $T$  с кусочно-непрерывной плотностью (считаем, что в точках разрыва плотности последняя непрерывна слева и справа). Роль концов отрезка играют угловые точки  $T$  и точки разрыва плотности.

Определим еще асимптотику в окрестности концевых точек. Не умаляя общности, рассмотрим окрестность точки  $Q_b(0, b)$ . Пусть

$x = \xi$ ,  $y = b + \eta$  при бесконечно малых  $\xi$ ,  $\eta$ . Т.к. сам потенциал непрерывен, установим асимптотическое поведение градиента

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= 2\alpha \left( \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi} + \operatorname{arctg} \frac{a-b-\eta}{\xi} \right), \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \alpha \ln \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 + (a-b-\eta)^2}.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Отсюда следует, что производная  $\partial V/\partial x$  ограничена, но не имеет предела при  $Q \rightarrow Q_b$ ; производная  $\partial V/\partial y$  стремится к  $-\infty$  при  $Q \rightarrow Q_b$ .

### 4.1.3 Пример неоднородного отрезка

Рассмотрим отрезок  $-a \leq x \leq a$  оси  $x$  с линейной плотностью

$$\alpha(x) = \frac{2aA}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (4.10)$$

Плотность обращается в бесконечность на концах отрезка, но масса его конечна  $M = 2\pi aA$ .

В интеграле типа (4.5) совершим замену переменной  $x' = a \cos t$

$$V = -2aA \int_0^\pi \ln [(a \cos t - x)^2 + y^2] dt.$$

Последний интеграл с точностью до обозначений совпадает с интегралом (10.50) и дается формулой (10.52)

$$V = -2M \ln \frac{F_1 + \sqrt{F_2}}{2}, \quad (4.11)$$

где

$$\begin{aligned}2F_1 &= \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, \\ 2F_2 &= x^2 + y^2 - a^2 + \sqrt{[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]}.\end{aligned}$$

Более удобны обозначения

$$\xi = \sqrt{(x^2 - a^2)^2 + y^2 (2a^2 + 2x^2 + y^2)}, \quad 2\lambda = x^2 + y^2 - a^2 + \xi, \quad (4.12)$$

и тогда

$$V = -2M \ln \frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{\lambda}}{2}. \quad (4.13)$$

Правая часть (4.13) совпадает с правой частью (4.34) при  $b = 0$ . Это не случайно: отрезок можно представить как вырожденный эллипс с нулевой малой осью, рассмотренный в разделе 4.4.2.

Приведем еще формулы для градиента потенциала

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{2Mx}{\xi} \sqrt{\frac{\lambda}{a^2 + \lambda}}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= -\frac{2My}{\xi} \sqrt{\frac{a^2 + \lambda}{\lambda}}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

В окрестности отрезка (но не его концов)  $x^2 < a^2$ , а координата  $y$  бесконечно мала, так что

$$\begin{aligned}\xi^2 &= (a^2 - x^2)^2 \left[ 1 + \frac{2(a^2 + x^2)}{(a^2 - x^2)^2} y^2 + \mathcal{O}(y^4) \right], \\ \xi &= (a^2 - x^2) + \frac{a^2 + x^2}{a^2 - x^2} y^2 + \mathcal{O}(y^4), \\ \sqrt{\lambda} &= \frac{a|y|}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \mathcal{O}(y^3).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Сравнение (4.13), (4.14) и (4.15) показывает, что потенциал и касательная производная  $\partial V/\partial x$  непрерывны на всей плоскости (за возможным исключением концов отрезка), тогда как нормальная производная  $\partial V/\partial y$  претерпевает скачок.

Исследуем поведение  $V$  и  $\text{grad } V$  в окрестности концов отрезка. По симметрии достаточно считать  $x = a + t$ ,  $s = \sqrt{t^2 + y^2}$  при бесконечно-малом  $s$ . Теперь

$$\xi^2 = s^2(4a^2 + 4at + s^2), \quad \lambda = a(s + t) + \frac{s}{2}(s + t) + \mathcal{O}(s^3).$$

Если положить  $t = -s$ , следовательно,  $y = 0$ , то получим  $\xi = s(2a - s)$ ,  $\lambda = 0$ . Поэтому разложение  $\lambda$  содержит  $s + t$  множителем:

$$\lambda = a(s + t) \left[ 1 + \frac{s}{2a} + \mathcal{O}(s^2) \right].$$

Согласно (4.13) потенциал непрерывен в точке  $(a, 0)$  и, следовательно, на всей плоскости. Подставляя главные члены разложения в (4.14), найдем асимптотику градиента

$$\frac{\partial V}{\partial x} \sim -\frac{M}{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{s+t}}{s}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} \sim -\frac{M}{\sqrt{a}} \frac{y}{s\sqrt{s+t}}.\tag{4.16}$$

Из (4.16) следует, что при  $s \rightarrow 0$  ни одна из первых производных не имеет предела.

## 4.2 Однородная прямая

Рассмотрим однородную прямую (ось  $y$ ) с постоянной линейной плотностью  $\alpha$ .

Положим в (4.7)  $a = -b$  и устремим  $b$  к бесконечности. Получим бесконечное значение потенциала. Однако физический смысл имеет лишь разность потенциалов. Например, в начале координат потенциал (4.7) при  $a = -b$  равен

$$V(0, 0) = 2\alpha b (2 - \ln b^2). \quad (4.17)$$

Вычитая (4.17) из (4.7), переходя к пределу  $b \rightarrow \infty$  и обозначая результат снова через  $V$ , получим

$$V(x) = -2\pi\alpha|x|. \quad (4.18)$$

Сравнивая (4.18) и (3.1), заключаем, что *линейный потенциал точки на прямой* совпадает с *логарифмическим потенциалом прямой на плоскости*, если положить

$$m = \alpha. \quad (4.19)$$

Соответственно, потенциал отрезка на прямой совпадает с потенциалом полосы на плоскости.

Разумеется, равенство (4.19) является следствием принятой в разделе 2.1 связи между постоянными  $C_N$ .

## 4.3 Окружность

### 4.3.1 Общий случай

Рассмотрим окружность  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$  с линейной плотностью  $\alpha(\varphi)$ . В полярных координатах  $dm = a \alpha(\varphi) d\varphi$ ,

$$V(R, \varphi) = -a \int_0^{2\pi} \alpha(\varphi') \ln [a^2 - 2aR \cos(\varphi' - \varphi) + R^2] d\varphi'. \quad (4.20)$$

### 4.3.2 Однородная окружность

Рассмотрим окружность предыдущего раздела массы  $M$  с постоянной плотностью  $\alpha$ . По симметрии потенциал зависит лишь от расстояния  $R$  до начала координат, следовательно, в (4.20) можно положить  $\varphi = 0$ :

$$V(R) = -a\alpha \int_0^{2\pi} \ln(a^2 - 2aR \cos \varphi' + R^2) d\varphi'.$$

Обозначим в этом разделе

$$\xi = \max\{a, R\}, \quad \eta = \min\left\{\frac{a}{R}, \frac{R}{a}\right\},$$

так что

$$a^2 - 2aR \cos \varphi' + R^2 = \xi^2 (1 - 2\eta \cos \varphi' + \eta^2).$$

С учетом (10.41) получаем окончательный результат

$$-V(R) = M \ln \xi^2 = \begin{cases} M \ln a^2, & \text{если } R \leq a \\ M \ln R^2, & \text{если } R \geq a. \end{cases} \quad (4.21)$$

Таким образом, окружность не притягивает внутренние точки (потенциал постоянен), а внешние точки притягивает, как точка той же массы в центре окружности.

### 4.3.3 Неоднородная окружность

**Пример 4.3.3.1.** Окружность раздела 4.3.1 с плотностью

$$\alpha = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi \quad (4.22)$$

при натуральном  $n$ . Сделаем подстановку  $\varphi' = \varphi + t$  в интеграле (4.20). С учетом (10.42)

$$V(R, \varphi) = \frac{2\pi a}{n} (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi) \eta^n. \quad (4.23)$$

Обратим внимание на убывание  $V$  при  $R \rightarrow \infty$  со скоростью  $(\alpha/R)^n$  в кажущемся противоречии с (2.30). Причина — в нулевой массе  $T$  с плотностью (4.22).

Плотность (4.22) знакопеременна. В следующем примере она положительна при достаточно большом  $A_0$ .

**Пример 4.3.3.2.** Окружность раздела 4.3.1 с плотностью, представимой равномерно сходящимся рядом Фурье

$$\alpha = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (4.24)$$

Достаточно воспользоваться результатами раздела 4.3.2 и примера 4.3.3.1:

$$V = -2\pi A_0 a \ln \xi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi a}{n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \eta^n. \quad (4.25)$$

Легко показать, что для справедливости (4.25) достаточно равномерной сходимости ряда для первообразной от  $\alpha - A_0$ . Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

**Пример 4.3.3.3.** Пусть  $T$  — дуга однородной окружности радиусом  $a$  с плотностью  $\alpha$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ . Предполагаем здесь и ниже  $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ .

Продолжим плотность  $\alpha$  на всю окружность, считая ее нулем вне указанной дуги. Ряд (4.24) для продолженной функции  $\alpha(\varphi)$  имеет коэффициенты

$$A_0 = \frac{\alpha(\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi}, \quad A_n = \frac{\alpha}{n\pi} (\sin n\varphi_2 - \sin n\varphi_1),$$

$$B_n = \frac{\alpha}{n\pi} (\cos n\varphi_1 - \cos n\varphi_2).$$

Подставляя эти значения в (4.25), получим окончательно

$$V = -\alpha(\varphi_2 - \varphi_1)a \ln \xi^2 +$$

$$+ 2\alpha a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} [\sin n(\varphi - \varphi_1) - \sin n(\varphi - \varphi_2)] \eta^n =$$

$$= -\alpha(\varphi_2 - \varphi_1)a \ln \xi^2 +$$

$$+ 4\alpha a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} \cos n \left( \varphi - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \eta^n. \quad (4.26)$$

Констатируем равномерную сходимость ряда (4.26), непрерывность  $V$  на всей плоскости и совпадение с (4.21) при  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = 2\pi$ .

Дадим другое, замкнутое, выражение потенциала (4.26) через дилוגарифм Эйлера  $L(z)$ . Общая формула (4.20) для дуги однородной окружности принимает вид

$$\begin{aligned} V(R, \varphi) &= -a\alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \ln [a^2 - 2aR \cos(\varphi' - \varphi) + R^2] d\varphi' = \\ &= -a\alpha \int_{\varphi_1 - \varphi}^{\varphi_2 - \varphi} [\ln \xi^2 + \ln(1 - 2\eta \cos t + \eta^2)] dt. \end{aligned}$$

С учетом (10.121) находим

$$\begin{aligned} V &= -a\alpha(\varphi_2 - \varphi_1) \ln \xi^2 + \\ &\quad + 2a\alpha \Im L \left[ \eta e^{i(\varphi_2 - \varphi)} \right] - 2a\alpha \Im L \left[ \eta e^{i(\varphi_1 - \varphi)} \right]. \quad (4.27) \end{aligned}$$

**Пример 4.3.3.4.** Пусть  $T$  — дуга окружности  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  с радиусом  $a$  и плотностью  $\alpha = A \cos \varphi + B \sin \varphi$ .

Поступая, как в предыдущем примере, придем к интегралу

$$\begin{aligned} V &= -a \int_{\varphi_1 - \varphi}^{\varphi_2 - \varphi} [A \cos(t + \varphi) + B \sin(t + \varphi)] \times \\ &\quad \times \ln (a^2 - 2aR \cos t + R^2) dt = \\ &= -a \int_{\varphi_1 - \varphi}^{\varphi_2 - \varphi} [\tilde{A}(\varphi) \cos t + \tilde{B}(\varphi) \sin t] \ln (a^2 - 2aR \cos t + R^2) dt \end{aligned}$$

при  $\tilde{A}(\varphi) = A \cos \varphi + B \sin \varphi$ ,  $\tilde{B}(\varphi) = -A \sin \varphi + B \cos \varphi$ . Последний интеграл дается формулами (10.30), (10.31).

Окончательно,

$$\begin{aligned} V &= a\eta(\varphi_2 - \varphi_1)\tilde{A}(\varphi) + \\ &\quad + a \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} \left\{ \tilde{A}(\varphi) \frac{1 - \eta^2}{\eta} \operatorname{arctg} \frac{\eta \sin(\varphi_i - \varphi)}{1 - \eta \cos(\varphi_i - \varphi)} + B(\varphi_i) + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1 + \eta^2}{2\eta} B(\varphi) - B(\varphi_i) \right] \ln [a^2 - 2aR \cos(\varphi_i - \varphi) + R^2] \right\}. \end{aligned}$$



ЗАМЕЧАНИЕ 1. Плотность  $\alpha$  в этом примере знакопеременна. Добавляя к ней достаточно большую постоянную, получим положительную плотность. Потенциал при  $\alpha = A_0 + A \cos \varphi + B \sin \varphi$  находится объединением последних двух примеров.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Обратим внимание, что потенциал дуги с постоянной плотностью выражается через дилогарифм, тогда как для плотности  $A \cos \varphi + B \sin \varphi$  потенциал элементарен. Более того, он элементарен, если плотность — тригонометрический многочлен любой степени без свободного члена. Действительно, неопределенный интеграл типа (4.20) интегрированием по частям сводится к интегралу от рациональной функции от косинусов и синусов.

## 4.4 Эллипс

### 4.4.1 Общий случай

Рассмотрим эллипс  $T$  с параметрическим уравнением

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \quad \text{при } a > b > 0 \quad (4.28)$$

и плотностью  $\alpha(\varphi)$ . Начнем с определения метрики

$$dx^2 + dy^2 = (a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi) d\varphi^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi) d\varphi^2,$$

где введен эксцентриситет эллипса  $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2}/a$ . Элемент массы равен

$$dm = a \alpha(\varphi) \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Потенциал эллипса дается интегралом

$$V(x, y) = -a \int_0^{2\pi} \alpha(t) \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} \times \\ \times \ln [(x - a \cos t)^2 + (y - b \sin t)^2] dt, \quad (4.29)$$

где переменную интегрирования мы, как обычно, обозначили через  $t$ .

#### 4.4.2 Пример неоднородного эллипса

Даже для однородного эллипса выражение (4.29) остается сложным и не сводится к эллиптическим интегралам. Оно упрощается для неоднородного эллипса с плотностью

$$\alpha(\varphi) = A / \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}, \quad (4.30)$$

так что

$$dm = aA d\varphi, \quad M = 2\pi aA,$$

$$V = -aA \int_0^{2\pi} \ln [(x - a \cos t)^2 + (y - b \sin t)^2] dt.$$

Пусть сначала точка  $(x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi)$  лежит на  $T$ :

$$V = -aA \int_0^{2\pi} \ln \{ [1 - \cos(\varphi - t)] [a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \cos(\varphi + t)] \} dt.$$

Дело сводится к интегралам

$$B_1 = \int_0^{2\pi} \ln(1 - \cos t) dt, \quad B_2 = \int_0^{2\pi} \ln [a^2 + b^2 - (a^2 - b^2) \cos t] dt.$$

Воспользовавшись (10.44), получим

$$V = -2M \ln \frac{a+b}{2}. \quad (4.31)$$

Внутри эллипса  $T$  потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа (1.5) с граничным условием (4.31). Поскольку правая часть (4.31) постоянна, решение тривиально: формула (4.31) справедлива и внутри эллипса.

Предположим, что внешний потенциал постоянен на софокусных с  $T$  эллипсах, т.е. является функцией  $V(\lambda)$  только одной эллиптической координаты  $\lambda$  (см. раздел 1.4.3). Согласно (1.76)

$$V = C_1 \ln \left( \sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda} \right) + C_2.$$

Постоянные  $C_1, C_2$  определяются по граничному условию (4.31) и асимптотике на бесконечности (4.4) с учетом (1.73). Окончательно,

$$V = -2M \ln \frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda}}{2}. \quad (4.32)$$

В силу единственности решения задачи Дирихле функция (4.32) действительно представляет искомый внешний потенциал эллипса.

При  $b \rightarrow 0$  эллипс неограниченно приближается к отрезку  $-a \leq x \leq a$  оси  $x$  с линейной плотностью

$$\alpha(x) = \frac{2aA}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (4.33)$$

Множитель 2 в (4.33) вызван тем, что при параметрическом задании (4.28) отрезок проходится дважды. Плотность обращается в бесконечность на концах отрезка, но масса его конечна  $M = 2\pi aA$ .

Предельный переход в (4.32) тривиален: достаточно положить  $b = 0$ :

$$V = -2M \ln \frac{\sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{\lambda}}{2}. \quad (4.34)$$

Формула (4.34) справедлива и на притягивающем отрезке  $\lambda = 0$ , где она совпадает с (4.31) при  $b = 0$ .

Мы пришли с помощью предельного перехода к результату, ранее полученному непосредственно в примере 4.1.3.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Согласно (1.71) величины  $a^2 + \lambda$ ,  $b^2 + \lambda$  зависят только от  $x$ ,  $y$ ,  $c$ . Поэтому внешний потенциал при фиксированной массе  $M$ , фокальном отрезке  $c$  и распределении плотности (4.30) одинаков для всех эллипсов (4.28), включая и фокальный отрезок при  $b = 0$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Согласно (1.59) элемент площади в координатах (1.57) равен  $abR dR d\varphi$ . Рассмотрим однородное кольцо между двумя подобными эллипсами  $R' = 1$  и  $R' = R$ . При бесконечном утончении кольца ( $R \rightarrow 1$ ), сохраняющего постоянную массу, получим  $dm = (M/2\pi) d\varphi$ , что равносильно плотности (4.30). Таким образом, эллипс с плотностью (4.30) можно считать бесконечно узким однородным кольцом между двумя бесконечно близкими подобными эллипсами.

## Глава 5

# Логарифмический потенциал двумерных тел

Потенциал плоской фигуры  $T$  с плотностью  $\varrho(x, y)$  в  $\mathbb{R}^2$  в силу (2.3) определяется интегралом

$$V(x, y) = - \iint_T \varrho(x', y') \ln [(x' - x)^2 + (y' - y)^2] d\sigma, \quad (5.1)$$

где  $\sigma$  — элемент площади. Граница  $\partial T$  (не обязательно связная) фигуры  $T$  (не обязательно односвязной) считается кусочно-гладкой кривой.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Согласно построениям раздела 2.1 логарифмический потенциал точки  $Q'(x', y')$  массы  $m$  в  $\mathbb{R}^2$  можно интерпретировать как ньютонов потенциал однородной прямой  $x = x', y = y'$  с линейной плотностью  $m$  в  $\mathbb{R}^3$ . Поэтому логарифмический потенциал двумерной фигуры  $T$  с плотностью  $\varrho(x, y)$  совпадает с ньютоновым потенциалом сплошного цилиндра с параллельными оси  $z$  образующими и с объемной плотностью  $\varrho(x, y)$ , не зависящей от  $z$ .

При интегрируемой плотности  $\varrho$  потенциал (5.1) непрерывен на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$  вместе с первыми производными.

На бесконечности согласно (2.30) имеем асимптотику

$$V \sim -M \ln R^2 + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (5.2)$$

Здесь  $\varepsilon = R_0/R$ , где  $R_0$  — характерный размер  $T$ . Если за начало координат взять центр масс  $T$ , то остаточный член можно заменить на  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

Стандартный прием вычисления двойного интеграла состоит в следующем. Переходим к подходящим криволинейным координатам. Сетка координатных линий одного из семейств разбивает  $T$  на бесконечно тонкие полоски. Разбиение должно подчиняться условию, чтобы потенциал такой полоски (как одномерного тела) был уже вычислен в предыдущей главе. Иными словами, интеграл преобразуется к повторному, причем внутренний интеграл уже вычислен ранее. Задача сведена к однократному интегралу от известной функции.

Если  $T$  — область в плоскости  $xy$ , занятая телом с постоянной плотностью  $\varrho$ , то двойной интеграл (5.1) можно свести к контурному по границе  $\partial T$  области  $T$ . Пусть  $\partial T$  — кусочно-гладкая кривая;  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  — непрерывные вместе с  $\partial\tilde{Q}/\partial x - \partial\tilde{P}/\partial y$  функции. Воспользуемся формулой Грина

$$\iint_T \left( \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{P}}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial T} \tilde{P} dx + \tilde{Q} dy. \quad (5.3)$$

В качестве  $\tilde{P}$ ,  $\tilde{Q}$  согласно (10.124) можно взять

$$\tilde{P} = -y \ln R, \quad \tilde{Q} = x \ln R, \quad \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{P}}{\partial y} = 1 + 2 \ln R$$

и получить

$$\sigma + 2 \iint_T \ln R dx dy = \int_{\partial T} \ln R (x dy - y dx). \quad (5.4)$$

Здесь  $\sigma$  — площадь области  $T$ ,  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

В начале координат  $O$  функции  $\tilde{P}$  и  $\tilde{Q}$  непрерывны, но функция  $\partial\tilde{Q}/\partial x - \partial\tilde{P}/\partial y$  обращается в минус бесконечность. Если  $O$  принадлежит области  $T$  или ее границе  $\partial T$ , то для применимости формулы Грина следует удалить точку  $O$  вместе с кругом радиусом  $\varepsilon$ . По непрерывности подынтегральных функций в контурном интеграле (5.4) последний изменится на величину порядка  $\varepsilon$ . Двойной же интеграл в (5.4) изменится на величину порядка  $\varepsilon^2 |\ln \varepsilon| < \varepsilon$ . Таким образом, формула (5.4) справедлива для любой области  $T$ , ограниченной кусочно-гладкой кривой.

Следует обобщить (5.4), совершив подстановку

$$x \mapsto x' - x, \quad y \mapsto y' - y, \quad R^2 \mapsto (x' - x)^2 + (y' - y)^2,$$

считая  $x'$ ,  $y'$  переменными, а  $x$ ,  $y$  параметрами. В результате

$$V(x, y) = M - \frac{\varrho}{2} \int_{\partial T} \ln [(x' - x)^2 + (y' - y)^2] [(x' - x) dy' - (y' - y) dx']. \quad (5.5)$$

Формулу (5.5) можно представить в виде

$$V(x, y) = M - \frac{\varrho}{2} \int_{\partial T} \ln [(x' - x)^2 + (y' - y)^2] (\mathbf{R}' - \mathbf{R}) \mathbf{n} ds. \quad (5.6)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial T$ ,  $ds$  — элемент длины  $\partial T$ .

## 5.1 Однородный прямоугольник

Рассмотрим прямоугольник  $a_1 \leq x \leq a_2$ ,  $b_1 \leq y \leq b_2$ , где  $a_1 < a_2$ ,  $b_1 < b_2$ , с постоянной плотностью  $\varrho$ . Формула (5.1) приобретает форму

$$V = -\varrho \int_{a_1}^{a_2} dx' \int_{b_1}^{b_2} \ln [(x' - x)^2 + (y' - y)^2] dy'. \quad (5.7)$$

Внутренний интеграл с точностью до знака представляет собой потенциал (4.5) отрезка единичной плотности, вычисленный в разделе 4.1.2. Поэтому можно воспользоваться формулой (4.7) с учетом изменившихся обозначений  $a \mapsto b_1$ ,  $b \mapsto b_2$ ,  $x \mapsto x - x'$

$$V = 2M - \varrho \sum_{i=1}^2 (-1)^i \int_{a_1}^{a_2} [V_1(b_i) + 2V_2(b_i)] dx',$$

где

$$V_1(b) = (b - y) \ln [(x' - x)^2 + (b - y)^2], \quad V_2(b) = (x' - x) \operatorname{arctg} \frac{b - y}{x' - x}.$$

Делаем стандартную подстановку  $x' - x = t$

$$\int_{a_1}^{a_2} V_1(b_i) dx' = (b_i - y) \int_{a_1 - x}^{a_2 - x} \ln [t^2 + (b_i - y)^2] dt,$$

$$\int_{a_1}^{a_2} V_2(b_i) dx' = \int_{a_1-x}^{a_2-x} t \operatorname{arctg} \frac{b_i - y}{t} dt.$$

Согласно (10.26)

$$\int_{a_1}^{a_2} V_1(b_i) dx' = (b_i - y) \left\{ 2(a_1 - a_2) + \sum_{k=1}^2 (-1)^k [(a_k - x)L_1 + 2(b_i - y)L_2] \right\}, \quad (5.8)$$

где

$$L_1 = \ln [(a_k - x)^2 + (b_i - y)^2], \quad L_2 = \operatorname{arctg} \frac{a_k - x}{b_i - y}.$$

Интеграл от  $V_2$  вычислим по последней из формул (10.33), чтобы избежать появления нежелательной функции  $\operatorname{sign}(a_k - x)(b_i - y)$

$$\int_{a_1}^{a_2} 2V_2(b_i) dx' = (b_i - y)(a_2 - a_1) + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \left[ (a_k - x)^2 \operatorname{arctg} \frac{b_i - y}{a_k - x} - (b_i - y)^2 \operatorname{arctg} \frac{a_k - x}{b_i - y} \right]. \quad (5.9)$$

Окончательно, получаем симметричную формулу

$$\begin{aligned} V(x, y) = & 3M - \\ & - \varrho \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k} \left\{ (a_k - x)(b_i - y) \ln [(a_k - x)^2 + (b_i - y)^2] + \right. \\ & \left. + (a_k - x)^2 \operatorname{arctg} \frac{b_i - y}{a_k - x} + (b_i - y)^2 \operatorname{arctg} \frac{a_k - x}{b_i - y} \right\}. \quad (5.10) \end{aligned}$$

К тому же результату можно прийти, используя (5.5). В правой части (5.5) — определенные интегралы по отрезкам  $a_1 \leq x' \leq a_2$  и  $b_1 \leq y' \leq b_2$ .

Легко показать, что потенциал (5.10) непрерывен на всей плоскости. Для исследования градиента

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varrho \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k} \left\{ (b_i - y) \left( 1 + \ln [(a_k - x)^2 + (b_i - y)^2] \right) + 2(a_k - x) \operatorname{arctg} \frac{b_i - y}{a_k - x} \right\}. \quad (5.11)$$

Очевидно, градиент непрерывен на всей плоскости, включая стороны и вершины прямоугольника.

## 5.2 Однородный треугольник

### 5.2.1 Потенциал в вершине треугольника

Начнем с частного случая вычисления потенциала однородного треугольника в одной из его вершин. Введем систему отсчета, в которой выделенная вершина совпадает с началом координат, а ось  $y$  параллельна противоположной стороне.

**Пример 5.2.1.1.** Задан однородный треугольник  $OQ_1Q_2$  с вершинами  $O(0, 0)$ ,  $Q_1(a, b_1)$ ,  $Q_2(a, b_2)$ , причем  $a > 0$ ,  $b_2 > b_1$ , так что обход контура  $T$  происходит в положительном направлении. Найдём потенциал  $T$  в точке  $O$ .

Применим формулу (5.1) в полярных координатах (см. рис. 5.1)

$$V(O) = -2\varrho \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{a/\cos\varphi} r \ln r \, dr,$$

где  $\varphi_i = \operatorname{arctg}(b_i/a)$ . Внутренний интеграл элементарен

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{a/\cos\varphi} r \ln r \, dr &= r^2 \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) \Big|_0^{a/\cos\varphi} = \\ &= \left( \ln a - \frac{1}{2} \right) \frac{a^2}{\cos^2\varphi} - a^2 \frac{\ln \cos\varphi}{\cos^2\varphi}. \end{aligned}$$

Вычисление внешнего интеграла сводится к (10.32)

$$V(O) = \varrho a^2 \left[ \operatorname{tg} \varphi \left( \frac{3}{2} - \ln a + \ln \cos \varphi \right) - \varphi \right]_{\varphi_1}^{\varphi_2}.$$



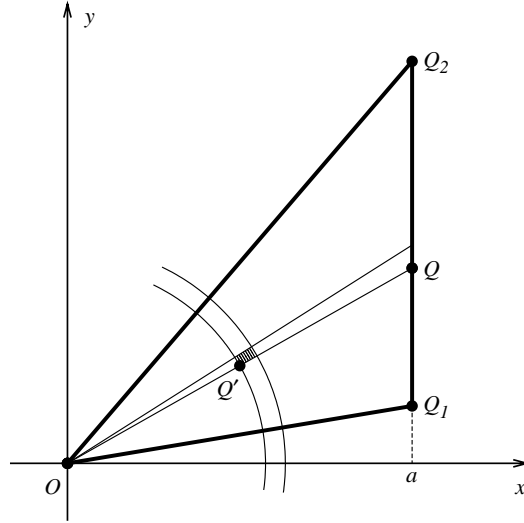


Рис. 5.1. К задаче 5.2.1.1. Элементарный криволинейный прямоугольник (заштрихован) имеет длины сторон  $dr$  и  $r d\varphi$ . Точка  $Q'$  имеет полярные координаты  $(r, \varphi)$ , точка  $Q - (a/\cos \varphi, \varphi)$ . Для обеспечения непрерывности считаем  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ .

Окончательно,

$$V(O) = \rho a^2 \left( -\varphi_0 + \frac{3s}{2a} - \frac{b_2 \ln r_2 - b_1 \ln r_1}{a} \right), \quad (5.12)$$

где  $\varphi_0$  — угол при вершине  $O$ ;  $s, r_1, r_2$  — длины сторон  $Q_1Q_2, OQ_1, OQ_2$ . Используются тождества

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{b_i}{a}, \quad \cos \varphi_i = \frac{a}{r_i}, \quad s = b_2 - b_1.$$

**Пример 5.2.1.2.** Рассмотрим задачу примера 5.2.1.1 в произвольной системе координат. Даже больше — выразим  $a, b_i$  через инвариантные величины. Площадь треугольника равна  $\frac{1}{2}as = \frac{1}{2}r_1r_2 \sin \varphi_0$ , поэтому

$$a = \frac{r_1r_2}{s} \sin \varphi_0. \quad (5.13)$$

По теореме Пифагора  $r_i^2 = a^2 + b_i^2$ , откуда  $b_2^2 - b_1^2 = r_2^2 - r_1^2$ . С учетом  $b_2 - b_1 = s$  отсюда следует  $b_2 + b_1 = (r_2^2 - r_1^2)/s$ . Мы знаем сумму и разность  $b_k$ , что дает

$$b_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - s^2}{2s}, \quad b_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + s^2}{2s}. \quad (5.14)$$

Окончательно,

$$V(O) = \frac{\varrho r_1 r_2 \sin \varphi_0}{2s^2} \left[ -2r_1 r_2 \varphi_0 \sin \varphi_0 + 3s^2 + \right. \\ \left. + (r_2^2 - r_1^2 - s^2) \ln r_1 + (r_1^2 - r_2^2 - s^2) \ln r_2 \right]. \quad (5.15)$$

Обратим внимание, что величины в правой части (5.15) не зависят ни от системы координат, ни от ориентации треугольника  $T$ .

## 5.2.2 Внутренний потенциал треугольника

Рассмотрим однородный треугольник  $Q_1 Q_2 Q_3$ . Пусть точка  $Q$  лежит внутри него. Разобьем  $Q_1 Q_2 Q_3$  на три вспомогательных треугольника  $T_i = Q Q_i Q_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$  (см. рис. 5.2). Как обычно, индекс  $i$  понимается по модулю 3:  $Q_{i+3} = Q_i$ .

Очевидно, потенциал  $T$  в  $Q$  равен сумме потенциалов треугольников  $T_i$ . Достаточно поэтому просуммировать правые части (5.15) в слегка измененных обозначениях

$$V(Q) = \frac{\varrho}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2}}{s_{i+2}^2} \left[ -2r_i r_{i+1} \varphi_{i+2} \sin \varphi_{i+2} + 3s_{i+2}^2 + \right. \\ \left. + (r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2) \ln r_i + (r_i^2 - r_{i+1}^2 - s_{i+2}^2) \ln r_{i+1} \right]. \quad (5.16)$$

Здесь  $r_i = Q Q_i$ ,  $s_i = Q_{i+1} Q_{i+2}$ ,  $\varphi_i$  — угол между векторами  $\overrightarrow{Q Q_{i+1}}$  и  $\overrightarrow{Q Q_{i+2}}$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** При положении  $Q$  на внутренней части какой-либо стороны, например,  $Q_1 Q_2$ , остаются лишь два треугольника. Формула (5.16) остается справедливой, сохраняя фактически два слагаемых, поскольку теперь  $\varphi_3 = \pi$ . При положении  $Q$  в одной из вершин, например, в  $Q_1$ , остается один треугольник. Формула (5.16) по-прежнему справедлива, сохраняя одно слагаемое, поскольку теперь  $r_1 = 0$ .

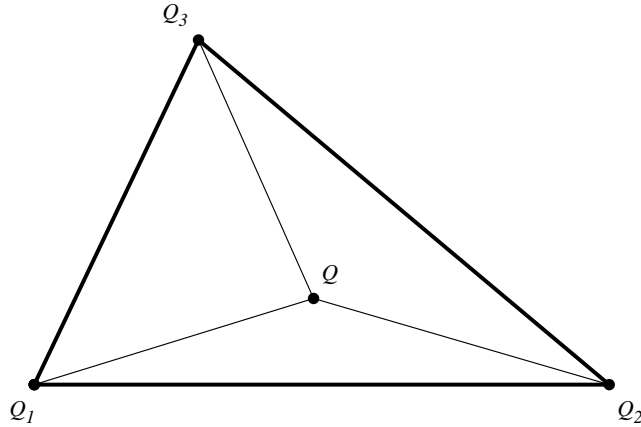


Рис. 5.2. К потенциалу треугольника. Случай положения точки  $Q$  внутри треугольника.

### 5.2.3 Внешний потенциал треугольника

Пусть точка  $Q$  лежит вне однородного треугольника  $Q_1Q_2Q_3$ . Построим треугольники  $T_i = QQ_iQ_{i+1}$ . Легко убедиться (см. рис. 5.3), что потенциал  $T$  в  $Q$  равен сумме потенциалов  $T_i$  с коэффициентами  $\pm 1$ .

Коэффициенты зависят от положения  $Q$  в одной из 6 областей, на которые плоскость разбивается продолжениями сторон треугольника.

Пусть  $Q$  лежит, как на рис. 5.3 слева. В понятных обозначениях

$$V(Q) = V(QQ_2Q_3) + V(QQ_3Q_1) - V(QQ_2Q_1).$$

При положении  $Q$ , как на рис. 5.3 справа,

$$V(Q) = V(QQ_2Q_3) - V(QQ_2Q_1) - V(QQ_1Q_3).$$

Условимся считать, что потенциал меняет знак при перемене ориен-

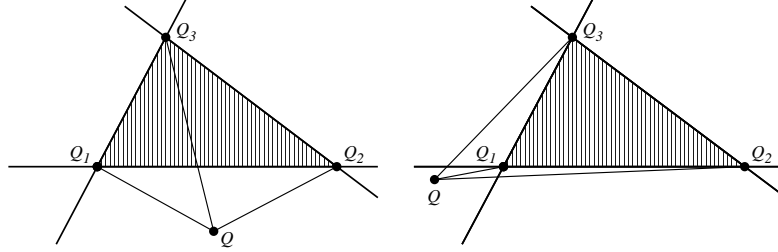


Рис. 5.3. К потенциалу треугольника. Два топологически различных случая положения точки  $Q$  вне треугольника.

тации треугольника. Тогда обе вышеприведенные формулы можно записать в виде

$$V(Q) = V(QQ_1Q_2) + V(QQ_2Q_3) + V(QQ_3Q_1).$$

То же верно во всех шести областях.

Окончательно, формула (5.16) остается справедливой и для внешнего потенциала, если  $\varphi_i$  считать положительным при вращении  $QQ_{i+1}$  к  $QQ_{i+2}$  против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае. Угол  $\varphi_i$  можно определить аналитически, рассматривая скалярное и векторное произведение векторов  $\overrightarrow{QQ_{i+1}}$ ,  $\overrightarrow{QQ_{i+2}}$ .

Резюмируем. Пусть треугольник  $Q_1Q_2Q_3$  имеет правую ориентацию. Формула (5.16) справедлива как для внутреннего, так и для внешнего потенциала при следующих значениях переменных:

$$\begin{aligned} s_i &= \sqrt{(x_{i+2} - x_{i+1})^2 + (y_{i+2} - y_{i+1})^2}, \\ r_i &= \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \\ \cos \varphi_i &= \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+2}) + (y - y_{i+1})(y - y_{i+2})}{r_{i+1}r_{i+2}}, \\ \sin \varphi_i &= \frac{(x - x_{i+1})(y - y_{i+2}) - (x - x_{i+2})(y - y_{i+1})}{r_{i+1}r_{i+2}}, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где  $-\pi < \varphi \leq \pi$ . Индекс  $i$  считается по модулю 3.

### 5.3 Однородный многоугольник

Пусть  $T$  — однородный  $n$ -угольник  $Q_1Q_2 \dots Q_n$ ; ограничивающая его ломаная не имеет самопересечений и обходит  $T$  в положительном направлении. Выпуклость  $T$  не обязательна.

Действуя, как в разделах 5.2.2, 5.2.3, представим потенциал  $T$  в точке  $Q$  суммой потенциалов ориентированных треугольников  $T_i = QQ_iQ_{i+1}$ . Индекс  $i$  понимается по модулю  $n$ :  $i + n \equiv i$ . Легко убедиться по индукции, что учет ориентации оставляет в конце концов вклад в потенциал только от  $T$ .

Таким образом, для потенциала многоугольника справедлива формула (5.16) при суммировании по  $i$  от 1 до  $n$ .

### 5.4 Круг

Рассмотрим круг  $R \leq a$  с плотностью  $\varrho(R, \varphi)$ . В полярных координатах

$$V(R, \varphi) = - \int_0^a R' dR' \int_0^{2\pi} \varrho(R', \varphi') \times \\ \times \ln [R'^2 - 2RR' \cos(\varphi' - \varphi) + R^2] d\varphi'. \quad (5.18)$$

Пусть плотность  $\varrho$  допускает мультипликативное разделение переменных  $\varrho = \varrho_1(R) \varrho_2(\varphi)$ . Тогда

$$V(R, \varphi) = - \int_0^a R' \varrho_1(R') dR' \int_0^{2\pi} \varrho_2(\varphi') \times \\ \times \ln [R'^2 - 2RR' \cos(\varphi' - \varphi) + R^2] d\varphi'. \quad (5.19)$$

#### 5.4.1 Круг с радиальным изменением плотности

Рассмотрим круг  $R \leq a$  с плотностью  $\varrho(R)$ , зависящей лишь от  $R$ .

В (5.19) можно положить  $\varrho_1(R') = \varrho(R')$ ,  $\varrho_2(\varphi') = 1$ . Внутренний интеграл представляет потенциал однородной окружности и с точностью до обозначений совпадает с (4.21). Считая  $R < a$  и обозначая  $R' = t$ , найдем для внутреннего потенциала

$$V(R) = -2\pi \ln R^2 \int_0^R \varrho(t) t dt - 2\pi \int_R^a \varrho(t) t \ln t^2 dt. \quad (5.20)$$

Для внешнего потенциала первый из интегралов (5.20) следует брать в пределах от нуля до  $a$ , а второй отсутствует: при  $R > a$

$$V(R) = -M \ln R^2. \quad (5.21)$$

Таким образом, тело с круговым распределением масс и точка той же массы в центре круга притягивают внешние точки одинаково.

Внутренний потенциал круга элементарен для широкого множества плотностей, в частности, при полиномиальной зависимости  $\varrho$  от  $R$ .

### 5.4.2 Однородный круг

Рассмотрим круг  $R \leq a$  с постоянной плотностью  $\varrho$ .

Интеграл (5.20) элементарен. Внутренний потенциал однородного круга равен

$$V(R) = -\pi \varrho R^2 - \pi \varrho a^2 (\ln a^2 - 1). \quad (5.22)$$

Сила притяжения линейно зависит от  $R$ .

### 5.4.3 Круг с синусоидальной плотностью

**Пример 5.4.3.1.** Пусть

$$\varrho = \varrho_1(R) \varrho_2(\varphi), \quad \varrho_2(\varphi) = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi, \quad (5.23)$$

при натуральном  $n$ . Внутренний интеграл (5.19) с точностью до обозначений совпадает с (4.23). Считая  $R < a$  и обозначая  $R' = t$ , найдем для внутреннего потенциала

$$V(R, \varphi) = \frac{2\pi}{n} (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi) \times \\ \times \left[ \int_0^R \frac{t^{n+1}}{R^n} \varrho_1(t) dt + \int_R^a \frac{R^n}{t^{n-1}} \varrho_1(t) dt \right]. \quad (5.24)$$

Для внешнего потенциала второй из интегралов (5.24) исчезает, а первый берется в пределах от 0 до  $a$ . Потенциал (5.24) элементарен для широкого класса функций  $\varrho_1$  — в частности, дробно-рациональных.

Пусть  $\varrho_1 = \text{const}$ . Можно считать  $\varrho_1 = 1$ . Тогда для внутреннего потенциала при  $R \leq a$

$$V(R, \varphi) = \frac{2\pi R^2}{n} (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi) \times \\ \times \left[ \frac{2n}{n^2 - 4} - \frac{R^{n-2}}{(n-2)a^{n-2}} \right], \quad (5.25)$$

если  $n \neq 2$ . При  $n = 2$  имеем

$$V(R, \varphi) = \pi (A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi) R^2 \left( \frac{1}{4} - \ln \frac{R}{a} \right). \quad (5.26)$$

Для внешнего потенциала при всех натуральных  $n$

$$V(R, \varphi) = \frac{2\pi}{n(n+2)} (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi) \frac{a^{n+2}}{R^n}. \quad (5.27)$$

Обратим внимание на убывание  $V$  при  $R \rightarrow \infty$  вопреки асимптотике (2.30). Причина — в нулевой массе  $T$  с плотностью (5.23).

**Пример 5.4.3.2.** Пусть

$$\varrho = \varrho_1(R) \varrho_2(\varphi), \quad \varrho_2(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (5.28)$$

Ясно, что потенциал выразится рядом с общим членом, определяемым формулой (5.24). Если  $\varrho_1 = 1$ , то общий член дается формулами (5.25)–(5.27).

Ряд (5.28) может не быть сходящимся. Достаточно интегрируемости  $\varrho_2$  (и тогда  $A_n, B_n$  ограничены) и интегрируемости  $\varrho_1^\sigma$  при  $\sigma > 1$ . Тогда по неравенству Гёльдера (*Бабич и др., 1964*), (*Михлин, 1977*) из (5.24) следует, что общий член ряда для потенциала есть величина порядка

$$\mathcal{O} \left( n^{-\frac{2\sigma-1}{\sigma}} \right),$$

так что ряд для потенциала сходится абсолютно и равномерно.

## 5.5 Сплошной эллипс

Рассмотрим сплошной эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

с постоянной плотностью  $\rho$ . Заполним область  $T$  внутри граничного эллипса  $\mathcal{E}$  семейством подобных ему эллипсов  $\mathcal{E}(q)$  с полуосями  $aq, bq$ .

Пусть сначала точка  $Q(x, y)$  лежит вне  $\mathcal{E}$ . Воспользуемся эллиптическими координатами параграфа 1.4.3, отнесенными к эллипсу  $\mathcal{E}(q)$ . Координата  $\lambda(q)$  согласно (1.69) определится как корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2q^2 + \lambda(q)} + \frac{y^2}{b^2q^2 + \lambda(q)} = 1. \quad (5.29)$$

Заклученная внутри эллипса  $\mathcal{E}(q)$  масса равна

$$M(q) = \pi abq^2 \rho.$$

Масса элементарного кольца между  $\mathcal{E}(q)$  и  $\mathcal{E}(q + dq)$  равна

$$dM = 2\pi ab\rho q dq. \quad (5.30)$$

Его внешний потенциал согласно замечанию на с. 91 дается формулой (4.32) при замене  $M, a, b$  на  $dM, aq, bq$ . Поэтому во внешней точке  $Q$  потенциал равен

$$V = -4\pi ab\rho \int_0^1 q \ln \frac{\sqrt{a^2q^2 + \lambda(q)} + \sqrt{b^2q^2 + \lambda(q)}}{2} dq. \quad (5.31)$$

Сделаем подстановку

$$t = \frac{\lambda(q)}{q^2}, \quad \sqrt{a^2q^2 + \lambda(q)} = q\sqrt{a^2 + t}, \quad \sqrt{b^2q^2 + \lambda(q)} = q\sqrt{b^2 + t},$$

$$\ln \frac{\sqrt{a^2q^2 + \lambda(q)} + \sqrt{b^2q^2 + \lambda(q)}}{2} = \ln \frac{q}{2} + \ln \left( \sqrt{a^2 + t} + \sqrt{b^2 + t} \right).$$

Уравнение (5.29) позволяет выразить  $q$  через  $x, y, t$

$$q^2 = \frac{x^2}{a^2 + t} + \frac{y^2}{b^2 + t}, \quad -2q dq = \left[ \frac{x^2}{(a^2 + t)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + t)^2} \right] dt.$$

Выражение (5.31) принимает вид

$$V = -4\pi ab\rho \int_0^1 q \ln \frac{q}{2} dq -$$

$$- 2\pi ab\rho \int_\lambda^\infty \left[ \frac{x^2}{(a^2 + t)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + t)^2} \right] \times$$

$$\times \ln \left( \sqrt{a^2 + t} + \sqrt{b^2 + t} \right) dt. \quad (5.32)$$



Во втором интеграле нижний предел отвечает  $q = 1$  и равен  $\lambda = \lambda(1) > 0$ , так что  $\lambda$  соответствует граничному эллипсу  $\mathcal{E}$  и дается формулой (1.71) при  $c^2 = a^2 - b^2$ . Верхний предел отвечает  $q = 0$ , когда согласно (1.71) при замене  $a, b$  нулями  $\lambda(0) = x^2 + y^2 > 0$ ,  $t = \infty$ .

Первый из интегралов (5.32) элементарен

$$\int_0^1 q \ln \frac{q}{2} dq = \frac{q^2}{4} \left( 2 \ln \frac{q}{2} - 1 \right) \Big|_0^1 = -\frac{1 + \ln 4}{4},$$

а второй дается формулой (10.49). В результате

$$V = \pi ab(1 + \ln 4)\varrho - 2\pi ab\varrho \left[ \left( \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} \right) \ln \Lambda + \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + \lambda}} + \frac{y^2}{\sqrt{b^2 + \lambda}} \right) \right],$$

где

$$\Lambda(\lambda) = \sqrt{a^2 + \lambda} + \sqrt{b^2 + \lambda}.$$

С учетом (1.69) получим окончательное выражение для внешнего потенциала

$$V = 2\pi ab\varrho \left[ \frac{1}{2} - \ln \frac{\Lambda}{2} - \frac{1}{\Lambda} \left( \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + \lambda}} + \frac{y^2}{\sqrt{b^2 + \lambda}} \right) \right]. \quad (5.33)$$

Потенциал на граничном эллипсе дается предельным переходом  $\lambda \rightarrow 0$  в (5.33), сводящимся к подстановке  $\lambda = 0$ :

$$V = 2\pi ab\varrho \left[ \frac{1}{2} - \ln \frac{a+b}{2} - \frac{1}{a+b} \left( \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) \right]. \quad (5.34)$$

Правая часть (5.34) определена при всех  $x, y$ . Вычислим действие на нее оператора Лапласа

$$\Delta V = -4\pi\varrho.$$

Сравнивая с (1.6), убеждаемся, что функция (5.34) удовлетворяет внутри  $T$  уравнению Пуассона. В силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона (см. с. 16) внутренний потенциал  $T$  дается формулой (5.34). Как и потенциал круга, он квадратичен и принимает наибольшее значение в центре.

## Глава 6

# Ньютонов потенциал одномерных тел

Потенциал материальной кривой  $T$  с линейной плотностью  $\alpha$  в  $\mathbb{R}^3$  в силу (2.3) определяется криволинейным интегралом

$$V(Q) = V(x, y, z) = \int_T \frac{\alpha(x', y', z') ds}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}, \quad (6.1)$$

где  $ds$  — элемент длины  $T$ . Кривая  $T$  предполагается спрямляемой (в приложениях почти всегда — кусочно-гладкой), а  $\alpha$  — интегрируемой.

Потенциал (6.1) обращается в бесконечность на кривой  $T$ , так что имеет смысл только внешний потенциал. Последний вещественно-аналитичен во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$  вне кривой  $T$ . При стремлении  $Q$  к гладкому участку  $T$  с непрерывной плотностью потенциал согласно (2.20) имеет логарифмическую особенность

$$V(Q) \sim -\alpha \ln s^2, \quad (6.2)$$

где  $s$  — расстояние от  $Q$  до  $T$ .

На бесконечности согласно (2.31) имеем асимптотику

$$V \sim \frac{M}{r} [1 + \mathcal{O}(\varepsilon)]. \quad (6.3)$$

Здесь  $\varepsilon = r_0/r$ , где  $r_0$  — характерный размер  $T$ . Если за начало координат взять центр масс  $T$ , то остаточный член можно заменить на  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

## 6.1 Прямолинейный отрезок

### 6.1.1 Однородный отрезок

Пусть  $T$  — отрезок оси  $z$ , расположенный между точками  $Q_1(0, 0, a)$  и  $Q_2(0, 0, b)$ ,  $a < b$ . Линейная плотность отрезка равна  $\alpha$ . Потенциал в точке  $Q$  с цилиндрическими координатами  $R$ ,  $\varphi$  и  $z$  согласно (6.1) равен

$$V(R, z) = \alpha \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{R^2 + (t - z)^2}},$$

или окончательно

$$V(R, z) = \alpha \ln \frac{b - z + \sqrt{R^2 + (b - z)^2}}{a - z + \sqrt{R^2 + (a - z)^2}}, \quad R \neq 0. \quad (6.4)$$

В точках отрезка ( $R = 0$ ,  $a \leq z \leq b$ ) в согласии с общей теорией раздела 2.4.1 потенциал (6.4) обращается в бесконечность (логарифмическая сингулярность). На оси  $z$  вне отрезка особенностей, естественно, нет:

$$V(0, z) = \begin{cases} \alpha \ln \frac{b - z}{a - z}, & \text{если } z < a, \\ \alpha \ln \frac{z - a}{z - b}, & \text{если } z > b. \end{cases} \quad (6.5)$$

Первая из формул (6.5) — результат подстановки  $R = 0$  в (6.4), вторая — предельного перехода  $R \rightarrow 0$ .

Исследуем поведение потенциала вблизи  $T$ . Пусть  $Q$  приближается к одной из внутренних точек  $T$ . Считаем  $z$  фиксированным,  $a < z < b$ ,  $R \rightarrow 0$ . Преобразуем формулу (6.4)

$$\begin{aligned} & \frac{b - z + \sqrt{R^2 + (b - z)^2}}{a - z + \sqrt{R^2 + (a - z)^2}} = \\ & = \frac{2(b - z) + 2^{-1}(b - z)^{-1}R^2 + \mathcal{O}(R^4)}{2^{-1}(z - a)^{-1}R^2 - 8^{-1}(z - a)^{-3}R^4 + \mathcal{O}(R^6)} = \\ & = \frac{4(z - a)(b - z)}{R^2} \left[ 1 + \frac{R^2}{4(z - a)^2} + \frac{R^2}{4(b - z)^2} + \mathcal{O}(R^4) \right], \\ V & = \alpha \left[ \ln \frac{4(z - a)(b - z)}{R^2} + \frac{(z - a)^2 + (b - z)^2}{4(z - a)^2(b - z)^2} R^2 + \mathcal{O}(R^4) \right] \quad (6.6) \end{aligned}$$

в согласии с асимптотикой (2.20).

Пусть теперь  $Q$  приближается к одному из концов отрезка, например, к точке  $Q_1$ . Малыми величинами будут  $\zeta = z - a$ ,  $s = \sqrt{x^2 + y^2 + \zeta^2}$ . Тогда

$$b - z + \sqrt{R^2 + (b - z)^2} = 2(b - a) \left[ 1 - \frac{\zeta}{b - a} + \frac{s^2 - \zeta^2}{4(b - a)^2} + \mathcal{O}(s^3) \right],$$

$$a - z + \sqrt{R^2 + (a - z)^2} = s - \zeta,$$

$$V = \alpha \left[ \ln \frac{2(b - a)}{s - \zeta} - \frac{\zeta}{b - a} + \frac{s^2 - 3\zeta^2}{4(b - a)^2} + \mathcal{O}(s^3) \right]. \quad (6.7)$$

Обратим внимание, что  $s \geq \zeta$ , причем  $s = \zeta$  только при  $R = 0$ ,  $z > a$ . В этом случае (6.7) показывает, что  $V = \infty$ , как и должно быть для внутренней точки отрезка. При  $\zeta = -s$  формула (6.7) согласуется с первой из формул (6.5).

### 6.1.2 Неоднородный отрезок

**Пример 6.1.2.1.** Отрезок оси  $z$  между точками  $\pm a$ , где  $a > 0$ , с исчезающей на концах линейной плотностью

$$\alpha(z) = A \left( 1 - \frac{z^2}{a^2} \right).$$

В определяющем интеграле

$$V(R, z) = \frac{A}{a^2} \int_{-a}^a \frac{a^2 - z'^2}{\sqrt{(z - z')^2 + R^2}} dz'$$

сделаем замену  $z' - z = t$  и представим его в форме

$$V(R, z) = \frac{A}{a^2} \int_{-a-z}^{a-z} \left[ \frac{a^2 + R^2 - z^2}{\sqrt{t^2 + R^2}} - \frac{2zt}{\sqrt{t^2 + R^2}} - \sqrt{t^2 + R^2} \right] dt.$$

С учетом (10.15)

$$V = \frac{A}{2a^2} \left[ (3z - a)\sqrt{(z + a)^2 + R^2} - (3z + a)\sqrt{(z - a)^2 + R^2} + \right. \\ \left. + (2a^2 + R^2 - 2z^2) \ln \frac{\sqrt{(a - z)^2 + R^2} + a - z}{\sqrt{(a + z)^2 + R^2} - a - z} \right].$$

На оси  $z$  вне  $T$  логарифмический член надо преобразовать по типу (6.5).

Другим способом (как предел потенциала вытянутого эллипсоида вращения) потенциал отрезка вычислен в примере 8.5.8.

**Пример 6.1.2.2.** Отрезок оси  $z$  между точками  $\pm a$ , где  $a > 0$ , с интегрируемой сингулярностью на концах

$$\alpha(z) = A \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)^{-1/2}.$$

В определяющем интеграле сделаем стандартную подстановку  $z' = a \cos t$ :

$$V(R, z) = Aa \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{(z - a \cos t)^2 + R^2}}. \quad (6.8)$$

Интеграл (6.8) с точностью до обозначений совпадает с (10.53), так что можно воспользоваться формулой (10.58):

$$V(R, z) = BK(k). \quad (6.9)$$

Здесь

$$k = \sqrt{\frac{\gamma(a - z\gamma)}{z(1 - \gamma^2)}}, \quad B = 2A \sqrt{\frac{a\gamma}{z(1 - \gamma^2)}}, \quad (6.10)$$

где

$$\gamma = \frac{R^2 + z^2 + a^2 - \sqrt{(R^2 + z^2 + a^2)^2 - 4a^2z^2}}{2az}. \quad (6.11)$$

Модуль эллиптического интеграла  $k$  всегда меньше единицы. При малых  $z$  в (6.10), (6.11) следует исключить сингулярность. Достаточно представить (6.11) в форме

$$\gamma = \frac{2az}{R^2 + z^2 + a^2 + \sqrt{(R^2 + z^2 + a^2)^2 - 4a^2z^2}}. \quad (6.12)$$

Громоздкие выражения  $B$  и  $k$  через декартовы координаты можно упростить, если перейти к бисферическим координатам (1.143). В слегка измененных обозначениях

$$R = \frac{a \sin \theta}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}, \quad z = \frac{a \operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \xi - \cos \theta}.$$

Функции (6.11), (6.10) принимают вид

$$\gamma = \operatorname{th} \frac{\xi}{2}, \quad 1 - \gamma^2 = \operatorname{ch}^{-2} \frac{\xi}{2}, \quad k = \sin \frac{\theta}{2}, \quad B = A\sqrt{2(\operatorname{ch} \xi - \cos \theta)},$$

что позволяет записать (6.9) в виде

$$V = A\sqrt{2(\operatorname{ch} \xi - \cos \theta)} K\left(\sin \frac{\theta}{2}\right). \quad (6.13)$$

На оси  $z$  (по симметрии можно считать  $R = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $z = a \operatorname{cth}(\xi/2)$ ,  $\xi > 0$ ) потенциал элементарен

$$V(0, z) = A\pi \operatorname{sh} \frac{\xi}{2} = \frac{Aa\pi}{\sqrt{z^2 - a^2}}. \quad (6.14)$$

В горизонтальной плоскости

$$z = \xi = 0, \quad R = a \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}},$$

откуда

$$V(R, 0) = \frac{2Aa}{\sqrt{R^2 + a^2}} K\left(\frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}\right). \quad (6.15)$$

**Пример 6.1.2.3.** Отрезок оси  $z$  между точками  $\pm a$ , где  $a > 0$ , с линейной плотностью по закону полукруга

$$\alpha(z) = A\sqrt{1 - \frac{z^2}{a^2}}.$$

Выражение потенциала в произвольной точке очень громоздко. Ограничимся положением пробной точки на полярной оси и перпендикулярной ей плоскости симметрии. В этих частных случаях результат без особого труда получается непосредственно.

1°. Пробная точка  $Q(0, 0, z)$  на оси  $z$ ,  $z > a$ :

$$\begin{aligned} V &= A \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \frac{dt}{z - t} = Aa \int_0^\pi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{z - a \cos \varphi} = \\ &= \frac{A}{a} \int_0^\pi \frac{a^2 - a^2 \cos^2 \varphi}{z - a \cos \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{A}{a} \int_0^\pi \left( \frac{a^2 - z^2}{z - a \cos \varphi} + z + a \cos \varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{\pi A}{a} (z - \sqrt{z^2 - a^2}) = \frac{\pi Aa}{z + \sqrt{z^2 - a^2}}, \end{aligned}$$

где в конце использовано (10.43).

2°. Пробная точка  $Q(x, y, 0)$  в плоскости симметрии:

$$\begin{aligned} V &= A \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{t^2}{a^2}} \frac{dt}{\sqrt{R^2 + t^2}} = Aa \int_0^\pi \frac{\sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 \cos^2 \varphi}} = \\ &= \frac{2A}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 \sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{2A}{k} [K(k) - E(k)], \end{aligned}$$

где

$$k = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}}.$$

## 6.2 Прямая

### 6.2.1 Однородная прямая

Рассмотрим однородную прямую (ось  $z$ ) с постоянной линейной плотностью  $\alpha$ . Действуя, как в разделе 4.2, положим в (6.4)  $a = -b$  и устремим  $b$  к бесконечности. Получим бесконечное значение потенциала. Как и в разделе 4.2, вычислим значение (6.4) в фиксированной точке  $R = 1, z = 0$ :

$$V(1, 0) = \alpha \ln \frac{\sqrt{b^2 + 1} + b}{\sqrt{b^2 + 1} - b}, \quad (6.16)$$

образуем разность потенциалов (6.4) и (6.16) и перейдем к пределу  $b \rightarrow \infty$ . Обозначая результат снова через  $V$ , получим потенциал бесконечной прямой в виде

$$V(R, z) = \overline{V(R)} = -\alpha \ln R^2. \quad (6.17)$$

Выражение (6.17), как и следовало ожидать, совпадает с логарифмическим потенциалом точки (4.1) при  $m = \alpha$  с учетом (2.10).

### 6.2.2 Неоднородная прямая

**Пример 6.2.1.** Неоднородная прямая с линейной плотностью

$$\alpha(z) = \frac{A}{1 + z^2/c^2}, \quad c > 0.$$

Масса находится без труда

$$M = \pi A c.$$

Удобно воспользоваться сплюснутыми сфероидальными координатами (1.126, 1.131)

$$\begin{aligned} x &= c\sqrt{(\sigma^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, \\ y &= c\sqrt{(\sigma^2 + 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \\ z &= c\sigma\eta. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Плотность

$$\alpha(\sigma, \eta) = \frac{A}{1 + \sigma^2\eta^2}$$

не зависит от угла  $\varphi$ , так что потенциал ротационно симметричен.

Как установлено в разделе 1.5.2, функция (1.135)

$$V = \left( D \operatorname{arctg} \sigma + C_1 \right) \frac{\sigma}{\sigma^2 + \eta^2} + \left( \frac{D}{2} \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} + C_2 \right) \frac{\eta}{\sigma^2 + \eta^2}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа. Подберем произвольные постоянные  $C_1, C_2, D$  для согласования с заданной плотностью отрезка.

Плотность и потенциал четны относительно  $z$  и не меняются при замене  $\sigma \mapsto -\sigma$  или  $\eta \mapsto -\eta$ . Поэтому  $C_1 = C_2 = 0$ .

Для определения  $D$  установим асимптотику  $V$  при фиксированном  $z$  и  $R = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$ . Согласно (6.18)

$$\eta^2 = 1 - \frac{R^2}{c^2(\sigma^2 + 1)},$$

так что  $\eta \rightarrow 1, c\sigma \rightarrow z$ ,

$$\eta \approx 1 - \frac{R^2}{2(c^2 + z^2)}, \quad \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \approx \frac{R^2}{4(c^2 + z^2)}.$$

В результате получаем главный член асимптотики  $V$

$$V \approx -\frac{D}{2(1 + \sigma^2)} \ln R^2 \approx -\frac{D}{1 + z^2/c^2} \ln R.$$

В соответствии с выражением (2.20) в окрестности  $T$  асимптотически  $V \approx -2\alpha \ln R$ , следовательно,  $D = 2A$ .



Окончательно,

$$V = \frac{A}{\sigma^2 + \eta^2} \left( 2\sigma \operatorname{arctg} \sigma + \eta \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right). \quad (6.19)$$

Получим еще асимптотику вне симметричного относительно оси  $z$  конуса со сколь угодно малым, но фиксированным углом раствора: при  $r \rightarrow \infty$

$$\sigma \approx \frac{r}{c}, \quad V \approx \frac{\pi A c}{r} = \frac{M}{r}.$$

В горизонтальной плоскости симметрии потенциал можно без труда найти и непосредственным интегрированием:

$$V(R, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A dz}{(1 + z^2/c^2)\sqrt{R^2 + z^2}} = 2Ac^2 \int_0^1 \frac{dt}{c^2(1 - t^2) + R^2 t^2}$$

(подстановка  $t = z/\sqrt{R^2 + z^2}$  с учетом четности подынтегральной функции). При  $R < c$  получается

$$V(R, 0) = \frac{Ac}{\sqrt{c^2 - R^2}} \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - R^2}}{c - \sqrt{c^2 - R^2}},$$

что согласуется с общей формулой, где в данном случае  $\sigma = 0$ ,  $\eta = \sqrt{1 - R^2/c^2}$ .

При  $R > c$

$$V(R, 0) = \frac{2Ac}{\sqrt{R^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{R^2 - c^2}}{c} = \frac{2Ac}{\sqrt{R^2 - c^2}} \arccos \frac{c}{R},$$

что тоже согласуется с общей формулой, на этот раз при  $\eta = 0$ ,  $\sigma = \sqrt{(R^2/c^2) - 1}$ . На самом деле разделение двух случаев  $R < c$  и  $R > c$  фиктивно. Из интегрального представления ясно, что мы имеем дело с одной аналитической функцией.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Тело  $T$  (прямая) неограничено. Однако плотность столь быстро убывает на бесконечности, что полная масса конечна. Асимптотика (2.31) остается справедливой при условии удаления малого конуса, охватывающего ось  $z$ .

**Пример 6.2.2.** Неоднородная прямая (ось  $z$ ) с линейной плотностью

$$\alpha(z) = A \cos kz, \quad k > 0.$$

В определяющем интеграле совершим простейшую подстановку (сдвиг):

$$\begin{aligned} V &= A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kz' dz'}{\sqrt{(z-z')^2 + R^2}} = A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos k(t+z) dt}{\sqrt{t^2 + R^2}} = \\ &= A \cos kz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kt dt}{\sqrt{t^2 + R^2}} - A \sin kz \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kt dt}{\sqrt{t^2 + R^2}}. \end{aligned}$$

Оба интеграла сходятся, хотя неабсолютно. Второй равен нулю по симметрии. Первый выражается через одну из бесселевых функций, а именно функцию Макдональда  $K_0$  (Ватсон, 1949)

$$V = 2A \cos kz K_0(kR). \quad (6.20)$$

## 6.3 Окружность

### 6.3.1 Общий случай

Рассмотрим окружность  $x = a \cos \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi$ ,  $z = 0$  с линейной плотностью  $\alpha(\varphi)$ . В цилиндрических координатах элемент массы  $dm = a \alpha(\varphi) d\varphi$ ,

$$V(R, \varphi, z) = a \int_0^{2\pi} \frac{\alpha(\varphi') d\varphi'}{\sqrt{a^2 - 2aR \cos(\varphi' - \varphi) + R^2 + z^2}}. \quad (6.21)$$

Совершим замену переменных

$$t = (\varphi' - \varphi - \pi)/2, \quad \varphi' = 2t + \varphi + \pi.$$

В результате

$$V = \frac{2a}{\sqrt{(a+R)^2 + z^2}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\alpha(2t + \varphi + \pi) dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \quad (6.22)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{4aR}{(a+R)^2 + z^2}}, \quad t_1 = -\frac{\pi + \varphi}{2}, \quad t_2 = \frac{\pi - \varphi}{2}, \quad t_2 - t_1 = \pi.$$

Очевидно,  $0 \leq k \leq 1$ , причем  $k = 0$  на оси  $z$  (при  $R = 0$ ),  $k = 1$  на самой окружности  $T$  ( $R = a$ ,  $z = 0$ ).

Иногда предпочтительнее замена переменных  $\varphi' - \varphi = \theta$  и представление

$$V = \Phi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\alpha(\theta + \varphi) d\theta}{\sqrt{1 - 2p \cos \theta + p^2}}, \quad (6.23)$$

где  $\Phi > 0$ ,

$$\begin{aligned} \Phi^2(R, z) &= \frac{2a^2}{a^2 + R^2 + z^2 + \sqrt{(a^2 + R^2 + z^2)^2 - 4a^2R^2}} = \\ &= \frac{a^2 + R^2 + z^2 - \sqrt{(a^2 + R^2 + z^2)^2 - 4a^2R^2}}{2R^2}, \\ p &= \frac{2aR}{a^2 + R^2 + z^2 + \sqrt{(a^2 + R^2 + z^2)^2 - 4a^2R^2}} = \\ &= \frac{a^2 + R^2 + z^2 - \sqrt{(a^2 + R^2 + z^2)^2 - 4a^2R^2}}{2aR} = \frac{R}{a} \Phi^2, \\ \theta_1 &= -\varphi, \quad \theta_2 = 2\pi - \varphi, \quad \theta_2 - \theta_1 = 2\pi. \end{aligned}$$

Очевидно,  $p \geq 0$ , причем  $p = 0$  при  $R = 0$ ;  $p \rightarrow 0$  при  $z^2 \rightarrow \infty$ . При  $R > 0$  величина  $p$  убывает с ростом  $z^2$ , так что

$$p \leq p|_{z=0} = \min \left\{ \frac{R}{a}, \frac{a}{R} \right\}.$$

Таким образом,  $0 \leq p \leq 1$ , причем  $p = 1$  на самой окружности  $T$  ( $R = a, z = 0$ ).

### 6.3.2 Однородная окружность

Пусть  $\alpha$  постоянна. Интеграл (6.22) распространен на промежутки длины  $\pi$ , равной периоду подынтегральной функции. Его можно заменить на промежуток  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Окончательно,

$$V(R, z) = \frac{4a\alpha}{\sqrt{(a+R)^2 + z^2}} K(k). \quad (6.24)$$

На окружности  $k = 1$ , что приводит к логарифмической сингулярности. При малом расстоянии  $s = \sqrt{(R-a)^2 + z^2}$  точки  $Q$  от окружности

$$k^2 = 1 - \frac{s^2}{4a^2} + \dots, \quad k'^2 = \frac{s^2}{4a^2} + \dots$$

Пользуясь разложением (10.72), найдем асимптотику (6.24)

$$V(R, z) \sim 2\alpha \ln \frac{8a}{s}. \quad (6.25)$$

На оси  $z$  потенциал элементарен

$$V(0, z) = \frac{2\pi a\alpha}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (6.26)$$

### 6.3.3 Неоднородная окружность

**Пример 6.3.3.1.** Окружность раздела 6.3.1 с плотностью

$$\alpha(\varphi) = A \cos n\varphi + B \sin n\varphi$$

при натуральном  $n$ . В интеграле (6.23)

$$\alpha(\theta + \varphi) = (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi) \cos n\theta + (B \cos n\varphi - A \sin n\varphi) \sin n\theta.$$

Интегрирование возможно по промежутку  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . По симметрии слагаемое, содержащее  $\sin n\theta$ , пропадает. Остается

$$V = \Phi(A \cos n\varphi + B \sin n\varphi) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta d\theta}{\sqrt{1 - 2p \cos \theta + p^2}}.$$

С учетом (10.45) получаем окончательный результат

$$V(R, \varphi, z) = 2\pi\Phi g_n(p) p^n (A \cos n\varphi + B \sin n\varphi), \quad (6.27)$$

где  $g_n$  определяется формулой (10.5).

**Пример 6.3.3.2.** Окружность раздела 6.3.1 с плотностью, представимой рядом Фурье

$$\alpha(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \quad (6.28)$$

Комбинируя предыдущие результаты, получим

$$\begin{aligned} V(R, \varphi, z) &= \frac{4aA_0}{\sqrt{(a+R)^2 + z^2}} K(k) + \\ &+ 2\pi\Phi \sum_{n=1}^{\infty} g_n(p) p^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi). \end{aligned} \quad (6.29)$$

На самой окружности  $V = \infty$ . Вне окружности  $p < 1$  и ряд (6.29) согласно оценке (10.8) сходится со скоростью геометрической прогрессии. Поэтому можно опустить требование сходимости ряда (6.28), заменив его существованием коэффициентов Фурье  $A_n, B_n$ , т.е. интегрируемостью  $\alpha$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Для единообразия свободный член ряда (6.29) можно заменить на

$$4\Phi A_0 K(p).$$

### 6.3.4 Дуга однородной окружности

Рассмотрим дугу однородной окружности раздела (6.3.1) с плотностью  $\alpha$ , расположенную между точками с азимутами  $\varphi_1, \varphi_2$ ,  $\varphi_1 < \varphi_2$ ,  $\varphi_2 - \varphi_1 \leq 2\pi$ . Интеграл (6.21) берется по дуге  $\varphi_1 \leq \varphi' \leq \varphi_2$ , а (6.22) — по дуге  $t_1 \leq t \leq t_2$  при

$$t_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi - \pi}{2}, \quad t_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi - \pi}{2}, \quad t_2 - t_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2},$$

так что

$$V = \frac{2a\alpha}{\sqrt{(a+R)^2 + z^2}} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}.$$

Окончательно,

$$V(R, \varphi, z) = \frac{2a\alpha}{\sqrt{(a+R)^2 + z^2}} [F(t_2, k) - F(t_1, k)], \quad (6.30)$$

где  $F$  — неполный эллиптический интеграл первого рода.

В частности, на оси  $z$

$$V(0, \varphi, z) = \frac{a\alpha(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sqrt{a^2 + z^2}}. \quad (6.31)$$

Для полной окружности  $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$ , следовательно,  $t_2 - t_1 = \pi$ , так что (6.30) переходит в (6.24).

## 6.4 Эллипс

### 6.4.1 Общий случай

Рассмотрим эллипс  $T$  с параметрическим уравнением

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi, \quad z = 0 \quad (6.32)$$

и плотностью  $\alpha(\varphi)$ . Не умаляя общности, считаем  $a > b > 0$ . Как и в разделе 4.4.1 определяем элемент массы

$$dm = a \alpha(\varphi) \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi.$$

Здесь  $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2} / a$  — эксцентриситет.

Потенциал эллипса дается интегралом

$$V(Q) = a \int_0^{2\pi} \frac{\alpha(\varphi) \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} d\varphi}{\sqrt{(x - a \cos \varphi)^2 + (y - b \sin \varphi)^2 + z^2}}. \quad (6.33)$$

### 6.4.2 Неоднородный эллипс

**Пример 6.4.2.1.** Как и в разделе 4.4.1, простейшим случаем оказывается распределение плотности в виде

$$\alpha(\varphi) = A / \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}, \quad (6.34)$$

так что  $dm = aA d\varphi$ ,  $M = 2\pi aA$ ,

$$V(Q) = aA \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{(x - a \cos \varphi)^2 + (y - b \sin \varphi)^2 + z^2}}. \quad (6.35)$$

Очевидно, интеграл (6.35) сводится к эллиптическим. Но его приведение к стандартной форме затруднительно. Проще идти обходным путем.

Перейдем к эллипсоидальным координатам  $u, v, w$  (см. раздел 1.5.3). Положим

$$p(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda}. \quad (6.36)$$

В примере 1.5.3.4 показано, что функция

$$\begin{aligned}
V(u, v, w) &= \\
&= \frac{M}{\pi} \int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)[1 - p(x, y, z, \lambda)]}} = \\
&= \frac{M}{\pi} \int_u^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda - u)(\lambda - v)(\lambda - w)}} \quad (6.37)
\end{aligned}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне эллипса  $T$ . Кроме того, она обладает нужной асимптотикой (1.204) в окрестности  $T$  и (1.205) на бесконечности. Следовательно, функция (6.37) и является искомым потенциалом  $T$ . Согласно (1.198) она просто выражается через полный эллиптический интеграл

$$V = \frac{2M}{\pi\sqrt{u-w}} K(k) \quad (6.38)$$

при

$$k = \sqrt{\frac{v-w}{u-w}}.$$

Заметим, что  $u-w$  отделена от нуля. Согласно (1.159)  $0 \leq k \leq 1$ . Значение  $k=1$  принимается только при  $u=v=-c^2$ , что отвечает эллипсу  $T$ .

**Пример 6.4.2.2.** Пусть

$$\alpha(\varphi) = \frac{A \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}, \quad (6.39)$$

так что  $dm = aA \cos \varphi d\varphi$ ,  $M = 0$ . В примере 1.5.3.5 показано, что функция (1.209) удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне эллипса  $T$ . Асимптотика на бесконечности (1.211) согласуется с нулевой массой. Асимптотика при  $Q \rightarrow T$  дается формулой (1.210)

$$U_5 \sim \frac{\cos \varphi}{a\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}} \ln \frac{1}{s} = \frac{\alpha}{Aa^2} \ln \frac{1}{s}.$$

Сравнивая с (6.2), убеждаемся, что  $V = 2Aa^2 U_5$  представляет искомый потенциал эллипса. Окончательно,

$$V(Q) = \frac{4xAa^2}{(v-w)\sqrt{u-w}} \left[ K \cos^2 \theta - \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} U \right]. \quad (6.40)$$

Здесь

$$U = (E - K) F(\theta, k') + K E(\theta, k'),$$

$$k^2 = \frac{v - w}{u - w}, \quad k'^2 = \frac{u - v}{u - w},$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{a^2 + w}{v - w}, \quad \cos^2 \theta = \frac{v - w}{a^2 + v}, \quad \sin^2 \theta = \frac{a^2 + w}{a^2 + v},$$

где все возводимые в квадрат величины считаются неотрицательными. Неуказанный модуль полных эллиптических интегралов принимается равным  $k$ .

**Пример 6.4.2.3.** Гауссово кольцо.

Гауссовым кольцом именуют материальный эллипс, совпадающий с кеплеровской орбитой планеты, элемент массы которого пропорционален времени, проводимому планетой в элементе длины  $ds$ ; полная масса гауссова кольца равна массе планеты. Астрономический смысл кольца описан в монографии (*Субботин, 1968*). Время можно заменить средней аномалией  $t$ : пропорциональным времени углом, увеличивающимся на  $2\pi$  за период обращения планеты, и тогда

$$dm = M/(2\pi) dt.$$

Связь средней и эксцентрической аномалий дается уравнением Кеплера

$$\varphi - \varepsilon \sin \varphi = t.$$

Окончательное выражение для элемента массы и для плотности:

$$dm = \frac{M}{2\pi} (1 - \varepsilon \cos \varphi) d\varphi, \quad \alpha = \frac{M(1 - \varepsilon \cos \varphi)}{2\pi a \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}. \quad (6.41)$$

Представим плотность в форме

$$\alpha = \frac{A_1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}} + \frac{A_2 \cos \varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}}$$

при

$$A_1 = \frac{M}{2\pi a}, \quad A_2 = -\frac{M\varepsilon}{2\pi a}.$$

Таким образом, потенциал гауссова кольца дается суммой функций (6.38) и (6.40) с заменой  $A$  на  $A_1$  и  $A_2$ , соответственно.



Окончательно,

$$V(Q) = \frac{2M}{\pi\sqrt{u-w}}K - \frac{2Max\varepsilon}{\pi(v-w)\sqrt{u-w}} \left[ K \cos^2 \theta - \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \theta}} U \right]. \quad (6.42)$$

Смысл обозначений тот же, что и в примере 6.4.2.2.

## Глава 7

# Ньютонов потенциал двумерных тел

Потенциал материальной поверхности  $T$  с поверхностной плотностью  $\beta$  в  $\mathbb{R}^3$  в силу (2.3) определяется поверхностным интегралом

$$V(Q) = V(x, y, z) = \iint_T \frac{\beta(x', y', z') d\sigma}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}}, \quad (7.1)$$

где  $d\sigma$  — элемент площади  $T$ . Граница  $\partial T$  (не обязательно связная) фигуры  $T$  (не обязательно односвязной) считается кусочно-гладкой кривой.

При интегрируемой плотности  $\beta$  потенциал (7.1) непрерывен во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ , но его первые производные терпят разрыв при пересечении  $T$ .

На бесконечности согласно (2.31) имеем асимптотику

$$V \sim \frac{M}{r} [1 + \mathcal{O}(\varepsilon)]. \quad (7.2)$$

Здесь  $\varepsilon = r_0/r$ , где  $r_0$  — характерный размер  $T$ . Если за начало координат взять центр масс  $T$ , то остаточный член можно заменить на  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

Если  $T$  — область в плоскости  $xy$ , занятая телом с постоянной плотностью  $\beta$ , то двойной интеграл (7.1) можно свести к контурному по границе  $\partial T$  области  $T$ . Пусть  $\partial T$  — кусочно-гладкая кривая;

$\tilde{P}, \tilde{Q}$  — непрерывные вместе с  $\partial\tilde{Q}/\partial x - \partial\tilde{P}/\partial y$  функции. Воспользуемся формулой Грина

$$\iint_T \left( \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{P}}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial T} \tilde{P} dx + \tilde{Q} dy. \quad (7.3)$$

В качестве  $\tilde{P}, \tilde{Q}$  согласно (10.129) можно взять

$$\tilde{P} = -\frac{yr}{x^2 + y^2}, \quad \tilde{Q} = \frac{xr}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial\tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial\tilde{P}}{\partial y} = \frac{1}{r}$$

и получить

$$\iint_T \frac{dx dy}{r} = \int_{\partial T} \frac{r(x dy - y dx)}{x^2 + y^2}. \quad (7.4)$$

Формула (7.4) выведена в предположении, что начало координат  $O$  лежит вне  $T$ . В случае попадания  $O$  внутрь  $T$  вырежем круг  $T_\varepsilon$  малого радиуса  $\varepsilon$  с центром в  $O$ , целиком лежащий в  $T$ . Вычислим двойной интеграл по  $T_\varepsilon$ , переходя к полярным координатам

$$\iint_{T_\varepsilon} \frac{dx dy}{r} = \int_0^\varepsilon \frac{R dR}{\sqrt{R^2 + z^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \left( \sqrt{z^2 + \varepsilon^2} - |z| \right) < 2\pi\varepsilon,$$

что исчезает при  $\varepsilon \rightarrow 0$  равномерно по  $z$ .

К правой части (7.4) следует добавить интеграл по окружности, проходимой по часовой стрелке

$$- \int_{\partial T_\varepsilon} \frac{r(x dy - y dx)}{x^2 + y^2} = - \int_0^{2\pi} \sqrt{\varepsilon^2 + z^2} d\varphi = -2\pi \sqrt{\varepsilon^2 + z^2} \rightarrow -2\pi|z|.$$

Поэтому в случае  $O \in \text{int } T$  формулу (7.4) следует модифицировать

$$\iint_T \frac{dx dy}{r} = -2\pi|z| + \int_{\partial T} \frac{r(x dy - y dx)}{x^2 + y^2}. \quad (7.5)$$

Пусть  $O$  принадлежит границе  $T$ . Легко убедиться, что интеграл справа в (7.4) сходится. Однако к нему следует теперь добавить интеграл по дуге радиусом  $\varepsilon$  и затем перейти к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Если  $O$  находится на гладком участке  $\partial T$ , то в (7.5) надо  $2\pi$  заменить на  $\pi$ . В случае угловой точки следует  $2\pi$  заменить на угол  $\varphi_0$ , на который надо повернуть по часовой стрелке касательную к  $\partial T$  в точке  $O$ , направленную назад, до совмещения с касательной, направленной вперед (рис. 7.1).

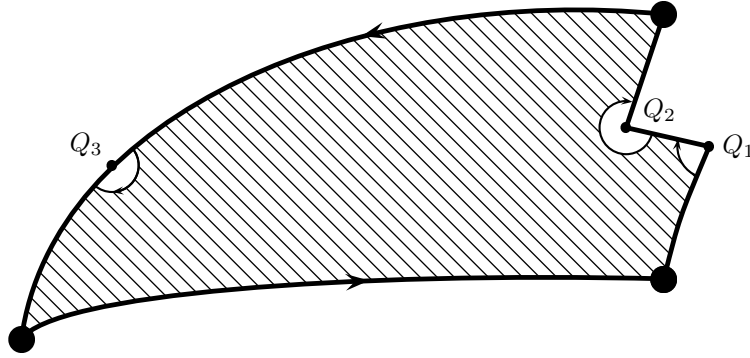


Рис. 7.1. К модификации формулы Грина. Угол  $\varphi_0$  в угловых точках  $Q_1$  и  $Q_2$  и в точке гладкости  $Q_3$  равен  $\pi/2$ ,  $3\pi/2$ ,  $\pi$ , соответственно.

Следует обобщить (7.4), совершив подстановку

$$x \mapsto x' - x, \quad y \mapsto y' - y, \quad r \mapsto s = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2},$$

считая  $x'$ ,  $y'$  переменными, а  $x$ ,  $y$ ,  $z$  параметрами. В результате

$$V(x, y, z) = \beta \int_{\partial T} s \frac{(x' - x) dy' - (y' - y) dx'}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}. \quad (7.6)$$

Формулу (7.6) можно представить в виде

$$V(x, y, z) = \beta \int_{\partial T} \frac{s(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\mathbf{n}}{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} ds. \quad (7.7)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к кривой  $\partial T$ ,  $ds = \sqrt{dx'^2 + dy'^2}$  — элемент длины  $\partial T$  (но не дифференциал функции  $s$ ).

Если проекция  $Q(x, y, 0)$  точки  $Q(x, y, z)$  на плоскость  $xy$  попадает внутрь или на границу области  $T$ , то справа в (7.6) и (7.7) следует добавить слагаемое  $-2\pi|z|$  или  $-\varphi_0|z|$  в соответствии со сказанным по поводу формулы (7.5). Однако если точка  $Q$  сама лежит в плоскости  $xy$ , то никакая модификация не требуется.

## 7.1 Однородный прямоугольник

Пусть  $T$  — однородный прямоугольник поверхностной плотности  $\beta$  с вершинами  $Q_{ik}(a_i, b_k, 0)$ , где  $i, k = 1, 2$ ;  $a_1 < a_2$ ,  $b_1 < b_2$ . По общей теории в согласии с (7.1)

$$V = \beta \int_{b_1}^{b_2} dy' \int_{a_1}^{a_2} \frac{dx'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2}}.$$

Внутренний интеграл совпадает с потенциалом (6.4) однородного отрезка, ориентированного параллельно оси  $x$

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx'}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2}} = \sum_{i=1}^2 (-1)^i V_i,$$

где

$$V_i = \ln \left[ c_i + \sqrt{(y' - y)^2 + e_i^2} \right], \quad c_i = a_i - x, \quad e_i = \sqrt{c_i^2 + z^2}.$$

Таким образом,

$$V = \beta \sum_{i=1}^2 (-1)^i \int_{b_1 - y}^{b_2 - y} \ln \left( c_i + \sqrt{t^2 + e_i^2} \right) dt.$$

Остается воспользоваться формулой (10.28)

$$V = \beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k} (F_{ik} + 2zG_{ik}). \quad (7.8)$$

Здесь

$$F_{ik} = (a_i - x) \ln(b_k - y + s_{ik}) + (b_k - y) \ln(a_i - x + s_{ik}),$$

$$G_{ik} = \operatorname{arctg} \frac{z(b_k - y)}{\left(\sqrt{(a_i - x)^2 + z^2} + a_i - x\right) \left(\sqrt{(a_i - x)^2 + z^2} + s_{ik}\right)},$$

где  $s_{ik} = \sqrt{(a_i - x)^2 + (b_k - y)^2 + z^2}$ .

Определим еще градиент потенциала. По симметрии достаточно ограничиться компонентами по осям  $y$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} = \beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k+1} & \left[ \ln(a_i - x + s_{ik}) + \frac{a_i - x}{s_{ik}} + \right. \\ & \left. + \frac{(b_k - y)^2}{(a_i - x + s_{ik})s_{ik}} + \frac{z^2}{(a_i - x + s_{ik})s_{ik}} \right]. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Здесь последнее слагаемое отвечает производной от последнего слагаемого (7.8).

Сумма трех последних слагаемых в (7.9) равна единице, что пропадает при суммировании по  $i, k$ . Окончательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k+1} \ln(a_i - x + s_{ik}) = \\ &= \beta \ln \frac{(a_2 - x + s_{21})(a_1 - x + s_{12})}{(a_1 - x + s_{11})(a_2 - x + s_{22})}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Перейдем к вертикальной производной

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k} \left[ \frac{z(a_i - x)}{(a_i - x)^2 + z^2} + 2G_{ik} \right].$$

Первое слагаемое (вне арктангенса) пропадает при суммировании по  $k$ . Окончательно,

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\beta \sum_{i,k=1}^2 (-1)^{i+k} G_{ik}. \quad (7.11)$$

Очевидно, потенциал  $V$  непрерывен во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Производная  $\partial V / \partial y$  непрерывна всюду за исключением сторон  $Q_{11}Q_{21}$  и  $Q_{12}Q_{22}$ . Пусть, например,  $Q(x, y, z)$  лежит в окрестности неконцевой точки отрезка  $Q_{11}Q_{21}$

$$x = a + u, \quad y = b_1 + v,$$

где  $a_1 < a < a_2$ , а  $u, v, z$  бесконечно малы. Под знаком логарифма в (7.10) лишь один множитель становится бесконечно малым

$$a_1 - x + s_{11} \sim \frac{v^2 + z^2}{2(a_2 - a_1)}.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial V(a + u, b_1 + v, z)}{\partial y} = -\beta \ln(v^2 + z^2) + W \quad (7.12)$$

в согласии с (2.20). Через  $W$  мы обозначаем различные регулярные функции координат.

Исследуем теперь поведение  $\partial V/\partial y$  в окрестности вершин, например, в окрестности  $Q_{11}$

$$x = a_1 + u, \quad y = b_1 + v.$$

По-прежнему особенность вносит лишь величина

$$a_1 - x + s_{11} \sim -u + \sqrt{u^2 + v^2 + z^2},$$

$$\frac{\partial V(a_1 + u, b_1 + v, z)}{\partial y} = -\beta \ln\left(-u + \sqrt{u^2 + v^2 + z^2}\right) + W. \quad (7.13)$$

Из (7.12), (7.13) заключаем, что  $\partial V/\partial y$  непрерывна всюду в  $\mathbb{R}^3$ , за исключением сторон  $Q_{11}Q_{22}$  и  $Q_{12}Q_{22}$ , где она обращается в плюс бесконечность.

Переходим к вертикальной производной  $\partial V/\partial z$ . Исследуем сначала окрестность внутренней точки  $Q(a, b, 0)$  прямоугольника

$$x = a + u, \quad y = b + v, \quad a_1 < a < a_2, \quad b_1 < b < b_2.$$

Сингулярность в (7.11) содержат лишь слагаемые при  $i = 1$  и  $k = 1, 2$ . Поскольку

$$\sqrt{(a_1 - x)^2 + z^2} + a_1 - x \sim \frac{z^2}{2(a - a_1)},$$

то

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\beta \operatorname{arctg} \frac{A_1}{z} - 2\beta \operatorname{arctg} \frac{A_2}{z} + W, \quad (7.14)$$

где здесь и ниже  $A_k$  — положительные константы.

Таким образом, при пересечении  $T$  производная  $\partial V/\partial z$  терпит скачок

$$\frac{\partial V^+}{\partial z} - \frac{\partial V^-}{\partial z} = -4\pi\beta$$

в согласии с (2.22).

В окрестности точки внутри отрезка  $Q_{11}Q_{21}$

$$x = a + u, \quad y = b_1 + v, \quad a_1 < a < a_2$$

сингулярны те же слагаемые. Поскольку

$$\sqrt{(a_1 - x)^2 + z^2} + a_1 - x \sim \frac{z^2}{2(a - a_1)},$$

то

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 2\beta \operatorname{arctg} \frac{A_3 v}{z} - 2\beta \operatorname{arctg} \frac{A_4}{z} + W.$$

Таким образом,  $\partial V/\partial z$  ограничена, но не имеет предела при независимом стремлении  $v, z$  к нулю.

Наконец, в окрестности вершины  $Q_{11}$

$$\begin{aligned} x &= a_1 + u, \quad y = b_1 + v, \quad b_1 - y = -v, \quad s_{11} = \sqrt{u^2 + v^2 + z^2}, \\ (a_1 - x)^2 + z^2 &= u^2 + z^2, \quad \sqrt{(a_1 - x)^2 + z^2} + a_1 - x = \sqrt{u^2 + z^2} - u, \\ \sqrt{(a_1 - x)^2 + z^2} + s_{11} &= \sqrt{u^2 + z^2} + \sqrt{u^2 + v^2 + z^2}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= 2\beta \operatorname{arctg} \frac{zv}{(\sqrt{u^2 + z^2} - u)(\sqrt{u^2 + z^2} + \sqrt{u^2 + v^2 + z^2})} - \\ &\quad - 2\beta \operatorname{arctg} \frac{A_5 z}{(\sqrt{u^2 + z^2} - u)}. \end{aligned}$$

По-прежнему  $\partial V/\partial z$  ограничена, но не имеет предела при  $Q \rightarrow Q_{11}$ .

## 7.2 Однородный треугольник

### 7.2.1 Потенциал над вершиной треугольника

Потенциал треугольника построим по схеме, примененной в разделе 5.2 в случае логарифмического потенциала.



Задан однородный треугольник  $OQ_1Q_2$  с вершинами  $O(0, 0, 0)$ ,  $Q_1(a, b_1, 0)$ ,  $Q_2(a, b_2, 0)$  и поверхностной плотностью  $\beta$ , причем  $a > 0$ ,  $b_2 > b_1$ , так что обход контура  $T$  происходит в положительном направлении (рис. 5.1). Найдем потенциал  $T$  в точке  $Q(0, 0, z)$ .

По аналогии с разделом 5.2.1

$$V(Q) = \beta \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{a/\cos \varphi} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}},$$

где  $\varphi_i = \arctg(b_i/a)$ . Внутренний интеграл равен

$$\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + z^2} - |z|,$$

так что

$$V = \beta V_1 - \beta |z| (\varphi_2 - \varphi_1),$$

где

$$V_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 \varphi} + z^2} d\varphi.$$

Интеграл берется подстановкой

$$t = \tg \varphi, \quad \cos^{-2} \varphi = 1 + t^2, \quad dt = (1 + t^2) d\varphi :$$

$$V_1 = \int_{b_1/a}^{b_2/a} \frac{\sqrt{a^2 + z^2 + a^2 t^2}}{1 + t^2} dt.$$

Остается воспользоваться формулой (10.18)

$$V = -\beta |z| (\varphi_2 - \varphi_1) + a\beta \ln \frac{b_2 + \sqrt{a^2 + z^2 + b_2^2}}{b_1 + \sqrt{a^2 + z^2 + b_1^2}} + \\ + \beta z \left( \arctg \frac{b_2 z}{a \sqrt{a^2 + z^2 + b_2^2}} - \arctg \frac{b_1 z}{a \sqrt{a^2 + z^2 + b_1^2}} \right). \quad (7.15)$$

Правая часть (7.15) координатно-зависима. Перейдем к инвариант-

ным величинам из раздела 5.2.1. К формулам (5.13), (5.14) добавим еще очевидную  $a^2 + b_i^2 = r_i^2$ . Соотношение (7.15) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{V}{\beta} = & -|z|\varphi_0 + \frac{r_1 r_2 \sin \varphi_0}{s} \ln \frac{r_2^2 - r_1^2 + s^2 + 2s\sqrt{r_2^2 + z^2}}{r_2^2 - r_1^2 - s^2 + 2s\sqrt{r_1^2 + z^2}} + \\ & + z \left[ \operatorname{arctg} \frac{(r_2^2 - r_1^2 + s^2)z}{2r_1 r_2 \sin \varphi_0 \sqrt{r_2^2 + z^2}} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arctg} \frac{(r_2^2 - r_1^2 - s^2)z}{2r_1 r_2 \sin \varphi_0 \sqrt{r_1^2 + z^2}} \right]. \end{aligned} \quad (7.16)$$

## 7.2.2 Потенциал треугольника

В случае общего положения точки  $Q(x, y, z)$  поступаем, как в разделе 5.2.2. Если проекция  $Q_0(x, y, 0)$  точки  $Q$  попадает внутрь треугольника с вершинами  $Q_1, Q_2, Q_3$ , то  $V$  будет суммой трех потенциалов треугольников  $QQ_1Q_2, QQ_2Q_3, QQ_3Q_1$

$$\begin{aligned} \frac{V}{\beta} = & -2\pi|z| + \\ & + \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2}}{s_{i+2}} \times \right. \\ & \times \ln \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2 + 2s_{i+2}\sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}}{r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2 + 2s_{i+2}\sqrt{r_i^2 + z^2}} + \\ & + z \left[ \operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2)z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}} - \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2)z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_i &= Q_0 Q_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \\ s_i &= Q_{i+1} Q_{i+2} = \sqrt{(x_{i+2} - x_{i+1})^2 + (y_{i+2} - y_{i+1})^2}, \end{aligned}$$

$\varphi_i$  — угол между векторами  $\overrightarrow{Q_0Q_{i+1}}$  и  $\overrightarrow{Q_0Q_{i+2}}$ :

$$\begin{aligned}\cos \varphi_i &= \frac{(x_{i+1} - x)(x_{i+2} - x) + (y_{i+1} - y)(y_{i+2} - y)}{r_{i+1}r_{i+2}}, \\ \sin \varphi_i &= \frac{(x_{i+1} - x)(y_{i+2} - y) - (y_{i+1} - y)(x_{i+2} - x)}{r_i r_{i+1}}.\end{aligned}\tag{7.18}$$

Напомним, что треугольник  $Q_1Q_2Q_3$  обладает правой ориентацией, а индекс  $i$  считается по модулю 3.

Пусть проекция  $Q_0$  лежит вне треугольника. По-прежнему считаем формулы (7.18) справедливыми с учетом ориентации, допуская  $-\pi < \varphi_i \leq \pi$ .

Формулы (7.17) остаются верными, если отбросить первое слагаемое справа. Для большей общности можно заменить его на

$$-|z|(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3),\tag{7.19}$$

так что сумма углов будет равна  $2\pi$  при внутреннем положении точки  $Q_0$  и равна 0 при внешнем.

При пересечении точкой  $Q_0$  границы треугольника некоторые слагаемые (7.17), содержащие арктангенс, терпят разрыв. Пусть, например,  $z > 0$  остается постоянной, а  $Q_0$  пересекает сторону  $Q_1Q_2$ . При движении изнутри треугольника наружу  $\sin \varphi_3 \rightarrow +0$ , а при движении снаружи внутрь  $\sin \varphi_3 \rightarrow -0$ . Выражение в квадратных скобках (7.17) стремится, соответственно, к  $+\pi$  и  $-\pi$ , а после умножения на  $z$  — к  $+z\pi$  и  $-z\pi$ . В сумме с величиной (7.19) получаем в пределе  $-z\pi$  независимо от направления движения.

Аналогичны рассуждения при движении  $Q_0$  наружу через вершину — например,  $Q_1$ . В этом случае  $r_1 \rightarrow 0$ ,

$$s_3^2 + r_1^2 - r_2^2 = (s_3 - r_2)(s_3 + r_2) + r_1^2 < Cr_1,$$

поскольку модуль разности двух сторон треугольника меньше третьей стороны. Поэтому при  $i = 1$  сингулярно лишь первое слагаемое в квадратных скобках, и оно меняется скачком от  $+\pi/2$  к  $-\pi/2$ . Таково же поведение члена при  $i = 3$ . В результате сумма (7.17) непрерывна.

При  $z = 0$  слагаемое (7.19) исчезает, а в (7.17) остаются лишь логарифмические члены.

### 7.3 Однородный многоугольник

Пусть  $T$  — лежащий в плоскости  $xy$  однородный  $n$ -угольник  $Q_1Q_2 \dots Q_n$ ; ограничивающая его ломаная не имеет самопересечений и обходит  $T$  в положительном направлении. Выпуклость  $T$  не обязательна.

Действуя так же, как в разделе 5.3, представим потенциал  $T$  в точке  $Q$  суммой потенциалов ориентированных треугольников  $T_i = Q_0Q_iQ_{i+1}$ . Здесь  $Q_0$  — проекция  $Q$  на плоскость  $xy$ , индекс  $i$  понимается по модулю  $n$ ,  $i + n \equiv i$ . Учет ориентации, как мы убедились в разделе 5.3, оставляет в конце концов вклад в потенциал только от  $T$ .

Таким образом, для потенциала многоугольника справедлива формула (7.17) при суммировании по  $i$  от 1 до  $n$ . Первое слагаемое справа в общем случае следует заменить на

$$-|z|(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n). \quad (7.20)$$

### 7.4 Однородная плоскость

Пусть  $T$  — материальная плоскость  $z = 0$  с постоянной поверхностной плотностью  $\beta$ . Получим потенциал  $T$  как предел потенциала прямоугольника при неограниченном увеличении его размеров. По симметрии  $V$  зависит лишь от  $z$ . Поэтому достаточно рассмотреть потенциал прямоугольника из раздела 7.1 при  $a_2 = b_2 = -a_1 = -b_1 = a$  в точке  $Q(0, 0, z)$ . Формула (7.8) существенно упрощается

$$\begin{aligned} \frac{V}{4\beta} = & a \ln \frac{s+a}{s-a} + \\ & + z \left[ \operatorname{arctg} \frac{az}{(\sqrt{a^2+z^2}+a)(\sqrt{a^2+z^2}+s)} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arctg} \frac{az}{(\sqrt{a^2+z^2}-a)(\sqrt{a^2+z^2}+s)} \right], \quad (7.21) \end{aligned}$$

где  $s = \sqrt{2a^2 + z^2}$ .

При  $a \rightarrow \infty$ , очевидно,  $V \rightarrow \infty$ . Для получения разумного ре-

зультата вычтем из правой части ее значение при  $z = 0$ . Первое слагаемое справа в (7.21) перейдет в

$$a \ln \frac{(\sqrt{2}-1) \left[ 1 + \sqrt{2 \left( 1 + \frac{z^2}{2a^2} \right)} \right]}{(\sqrt{2}+1) \left[ -1 + \sqrt{2 \left( 1 + \frac{z^2}{2a^2} \right)} \right]} \sim a \ln \frac{1 + \frac{z^2(2-\sqrt{2})}{4a^2}}{1 + \frac{z^2(2+\sqrt{2})}{4a^2}},$$

что стремится к нулю при  $a \rightarrow \infty$ . Первое слагаемое внутри квадратной скобки также исчезает в пределе. Во втором слагаемом

$$\begin{aligned} & \frac{az}{(\sqrt{a^2+z^2}-a)(\sqrt{a^2+z^2}+s)} = \\ & = \frac{z}{a(\sqrt{1+z^2/a^2}-1)(\sqrt{1+z^2/a^2}+\sqrt{2+z^2/a^2})} \sim \frac{2a}{z(1+\sqrt{2})}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\operatorname{arctg} \frac{az}{(\sqrt{a^2+z^2}-a)(\sqrt{a^2+z^2}+s)} \rightarrow \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} z.$$

Окончательно,

$$V(z) = -2\pi\beta|z|, \quad (7.22)$$

что с точностью до обозначений осей совпадает с потенциалом точки в  $\mathbb{R}^1$ , см. формулу (3.1).

Выведем (7.22) другим путем, отправляясь от потенциала бесконечной прямой. Именно,

$$V(z) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}}.$$

Внутренний интеграл есть потенциал прямой единичной линейной плотности. Он дается формулой (6.17) при  $\alpha = 1$  (рассуждения, связанные с расходимостью и переходом к разности потенциалов, опускаем):

$$V(z) = -\beta \int_{-\infty}^{\infty} \ln(t^2 + z^2) dt. \quad (7.23)$$

Интеграл (7.23) расходится. Вычисляя  $V(z) - V(0)$  и обозначая результат снова через  $V(z)$ , получим согласно (10.26)

$$V(z) = -\beta t \ln \left( 1 + \frac{z^2}{t^2} \right) - 2\beta z \operatorname{arctg} \frac{t}{z} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -2\pi\beta|z|,$$

что совпадает с (7.22).

## 7.5 Круг

Рассмотрим однородный круг  $T$  радиуса  $a$

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad z = 0 \quad (7.24)$$

с поверхностной плотностью  $\beta$ . По симметрии можно считать, что пробная точка  $Q(x, y, z) = Q(-R, 0, z)$  лежит на оси  $x$ ,  $R \geq 0$ . Пусть  $R < a$ . Справедливо представление  $V$  интегралом (7.6) по граничной окружности с добавочным слагаемым  $-2\pi\beta|z|$

$$V = -2\pi\beta|z| + \beta \oint F_1 \frac{(x' + R) dy' - y' dx'}{(x' + R)^2 + y'^2},$$

где  $F_1 = \sqrt{(x' + R)^2 + y'^2 + z^2}$ . Перейдем к параметрическому заданию граничной окружности

$$\begin{aligned} x' &= a \cos \psi, & y' &= a \sin \psi, \\ (x' + R) dy' - y' dx' &= a(a + R \cos \psi) d\psi. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Получим

$$V = -2\pi\beta|z| + \beta a \int_0^{2\pi} F_1 F_2 d\psi \quad (7.26)$$

при

$$F_1 = \sqrt{a^2 + R^2 + z^2 + 2aR \cos \psi}, \quad F_2 = \frac{a + R \cos \psi}{a^2 + R^2 + 2aR \cos \psi}.$$

По симметрии интеграл можно брать в пределах от 0 до  $\pi$ , умножая на два. Перейдем к половинному углу  $\varphi = \psi/2$ ,  $\cos \psi = 1 - 2 \sin^2 \varphi$ , и избавимся от переменных величин в числителе

$$F_1 = \sqrt{(R + a)^2 + z^2 - 4aR \sin^2 \varphi},$$

$$F_2 = \frac{1}{2a} + \frac{a^2 - R^2}{2a [(R+a)^2 - 4aR \sin^2 \varphi]},$$

$$F_1 F_2 = \frac{F_1}{2a} + \frac{(a^2 - R^2) F_1^2}{2a F_1 [(R+a)^2 - 4aR \sin^2 \varphi]}.$$

В результате

$$V = -2\pi\beta|z| + 2\beta \int_0^{\pi/2} \left\{ F_1 + \frac{a^2 - R^2}{F_1} \left[ 1 + \frac{z^2}{(R+a)^2 - 4aR \sin^2 \varphi} \right] \right\} d\varphi. \quad (7.27)$$

Последний интеграл — линейная комбинация полных эллиптических интегралов

$$B E(k) + \frac{a^2 - R^2}{B} K(k) + \frac{(a^2 - R^2)z^2}{B(R+a)^2} \Pi(\nu, k)$$

при

$$B = \sqrt{(R+a)^2 + z^2}, \quad k = \sqrt{\frac{4aR}{(R+a)^2 + z^2}}, \quad k' = \sqrt{\frac{(R-a)^2 + z^2}{(R+a)^2 + z^2}},$$

$$\nu = -\frac{4aR}{(R+a)^2}, \quad -1 \leq \nu \leq -k^2.$$

Положим

$$\sin \theta = \frac{a-R}{(a+R)k'}, \quad \cos \theta = \frac{|z|k}{(a+R)k'}, \quad 1 - k'^2 \sin^2 \theta = -\nu. \quad (7.28)$$

В принятом предположении ( $R < a$ )

$$0 < \sin \theta \leq 1, \quad (7.29)$$

причем  $\sin \theta = 1$  лишь при  $z = 0$  или  $R = 0$ .

Используя (10.98), получим окончательно

$$V(R, z) = 2\beta B \left[ \frac{a-R}{a+R} K(k) + E(k) \right] + 2\beta|z| \left\{ [K(k) - E(k)] F(\theta, k') - K(k) E(\theta, k') - \frac{\pi}{2} \right\}. \quad (7.30)$$

Представление (7.30) выведено при  $R < a$ . В частности, при  $z = 0$  равенство (7.30) определяет внутренний потенциал  $T$ .

Внешний потенциал по общей теории аналитически зависит от  $R$ . Таковы же и функции  $B, k^2, k'^2, \nu$ , причем  $k^2 < 1, 0 < k'^2 \leq 1$ . Заметим, что  $k'^2 = 1$  только при  $R = 0$ .

Несколько сложнее обстоит дело с углом  $\theta$ , определяемом согласно (7.28). Примем, что  $-\pi/2 < \theta \leq \pi/2$ . Особенность  $\theta$  возможна лишь при  $R = 0$ , когда  $k' = 1, \theta = \pi/2$ . Точка  $(0, 0)$  принадлежит  $T$ , так что следует считать  $z \neq 0$  при  $R = 0$ . По принципу аналитического продолжения формула (7.30) остается справедливой для внешнего потенциала, причем  $R = 0$  — устранимая особенность.

Упростим представление (7.30) для некоторых специальных положений точки  $Q$ .

**1°.** Пробная точка на оси симметрии,  $R = 0$ . Непосредственно получается

$$V(0, z) = 2\pi\beta(\sqrt{a^2 + z^2} - |z|) = \frac{2\pi\beta a^2}{\sqrt{a^2 + z^2} + |z|}.$$

То же самое следует из общей формулы при  $R = 0, k = 0, k' = 1, \theta = \pi/2$ .

Аналитичность  $V$  в окрестности  $R = 0$  очевидна. Более того, из (7.26) следует, что  $V$  разлагается по четным степеням  $R$ . В самом деле, подынтегральная функция зависит от  $\varphi$  через посредство  $\cos 2\varphi$ , и замена  $R \mapsto -R, \varphi \mapsto \pi/2 - \varphi$  оставляет ее инвариантной. Подстановка  $\varphi' = \pi/2 - \varphi$  в свою очередь не меняет интеграла. Поэтому

$$V(R, z) = V(-R, z).$$

**2°.** Пробная точка над/под краем круга,  $R = a$ . Согласно (7.26) находим

$$\begin{aligned} V(a, z) &= 2\beta \int_0^{\pi/2} \left( \sqrt{z^2 + 4a^2 \cos^2 \varphi} - |z| \right) d\varphi = \\ &= 2\beta \int_0^{\pi/2} \left( \sqrt{z^2 + 4a^2 - 4a^2 \sin^2 \varphi} - |z| \right) d\varphi = \\ &= 2\beta \left( \sqrt{z^2 + 4a^2} E(k) - \frac{\pi}{2} |z| \right), \end{aligned}$$



где

$$k = \frac{2a}{\sqrt{z^2 + 4a^2}}.$$

Это совпадает с общей формулой при  $R = a$ ,  $\theta = 0$  и только что указанном  $k$ .

Обратим внимание, что при  $R = a$  в формуле (7.27) возникает неопределенность: расходящийся к бесконечности интеграл умножается на нуль.

**3°.** Потенциал в плоскости круга (внутренний и внешний). Согласно (7.30)

$$V(R, 0) = 2\beta[(a - R)K(k) + (a + R)E(k)],$$

где

$$k = \frac{2\sqrt{aR}}{a + R}.$$

**Пример 7.5.1.** Пример неоднородного круга.

Рассмотрим круг

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad z = 0$$

с поверхностной плотностью

$$\beta = A\sqrt{a^2 - R^2},$$

где  $R^2 = x^2 + y^2$ . Потенциал круга вычислен далее в примере 8.5.7 как предел потенциала эллипсоида вращения.

## 7.6 Сплошной эллипс

Пусть  $T$  — сплошной эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad z = 0$$

с поверхностной плотностью

$$\beta = A\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Потенциал эллипса будет вычислен в примере 8.5.6 как предел потенциала эллипсоида.

## 7.7 Однородная сфера

Пусть  $T$  — однородная сфера радиуса  $a$  с постоянной поверхностной плотностью  $\beta$ . Масса сферы равна

$$M = 4\pi a^2 \beta.$$

Перейдем к сферическим координатам (1.108) с началом в центре сферы. По симметрии потенциал зависит только от  $r$ . Проще всего найти его, используя уравнение Лапласа (1.5). Согласно (1.113) общее решение (1.5), зависящее лишь от  $r$ , есть

$$V(r) = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Вне сферы асимптотика на бесконечности (7.2) влечет  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = M$ . Внутри сферы  $C_1 = 0$  по непрерывности в центре сферы,  $C_2 = M/a$  по непрерывности  $V$  на сфере  $r = a$ .

Итак,

$$V(r) = \begin{cases} M/a, & \text{если } r \leq a, \\ M/r, & \text{если } r \geq a. \end{cases} \quad (7.31)$$

Таким образом, сфера не притягивает внутренних точек, а внешние притягивает как точка той же массы в центре сферы.

## Глава 8

# Ньютонов потенциал трехмерных тел

Потенциал трехмерного тела  $T$  с плотностью  $\varrho$  в  $\mathbb{R}^3$  определяется объемным интегралом

$$V(Q) = \iiint_T \frac{\varrho(x', y', z') d\tau}{s}, \quad (8.1)$$

где  $s = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$ ,  $d\tau$  — элемент объема.

При интегрируемой плотности  $\varrho$  потенциал (8.1) вместе с первыми производными непрерывен во всем  $\mathbb{R}^3$ , разрывы терпят вторые производные при пересечении  $T$  и на поверхностях разрыва плотности.

На бесконечности согласно (2.31) имеем асимптотику

$$V \sim \frac{M}{r} [1 + \mathcal{O}(\varepsilon)]. \quad (8.2)$$

Здесь  $\varepsilon = r_0/r$ , где  $r_0$  — характерный размер  $T$ . Если за начало координат взять центр масс  $T$ , то остаточный член можно заменить на  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ .

При постоянной плотности  $\varrho$ , как и в плоском случае, интегрирование по  $T$  можно свести к интегрированию по его границе  $\partial T$ ,

предполагаемой кусочно-гладкой. Достаточно применить формулу Остроградского–Гаусса

$$\begin{aligned} \iiint_T \left( \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \iint_{\partial T} \tilde{P} dy dz + \tilde{Q} dz dx + \tilde{R} dx dy \end{aligned} \quad (8.3)$$

с функциями

$$\tilde{P} = \frac{x}{r}, \quad \tilde{Q} = \frac{y}{r}, \quad \tilde{R} = \frac{z}{r}, \quad \frac{\partial \tilde{P}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial z} = \frac{2}{r}$$

из формулы (10.128) и получить

$$\iiint_T \frac{2}{r} dx dy dz = \iint_{\partial T} \frac{x dy dz + y dz dx + z dx dy}{r}. \quad (8.4)$$

Формулы (8.4) выведены в предположении, что начало координат  $O$  лежит вне  $T$ . В случае попадания  $O$  внутрь  $T$  вырежем шар  $T_\varepsilon$  малого радиуса  $\varepsilon$  с центром в  $O$ , целиком лежащий в  $T$ . Вычислим тройной интеграл по  $T_\varepsilon$ , переходя к сферическим координатам:

$$\iiint_{T_\varepsilon} \frac{2 dx dy dz}{r} = 4\pi \int_0^\varepsilon 2r dr = 4\pi\varepsilon^2,$$

что стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Что касается поверхностного интеграла по сфере  $\partial T_\varepsilon$ , то подынтегральные функции там ограничены, и интеграл стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поэтому формула (8.4) верна без всяких ограничений.

Следует обобщить (8.4), совершив подстановку

$$\begin{aligned} x \mapsto x' - x, \quad y \mapsto y' - y, \quad z \mapsto z' - z, \\ r \mapsto s = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}, \end{aligned}$$

считая  $x', y', z'$  переменными, а  $x, y, z$  параметрами. В результате

$$\begin{aligned} V(Q) = \frac{\rho}{2} \times \\ \times \iint_{\partial T} \frac{(x' - x) dy' dz' + (y' - y) dz' dx' + (z' - z) dx' dy'}{s}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Напомним, что интегрирование осуществляется по ориентированной внешней поверхности  $\partial T$ .

Формулу (8.5) можно представить в виде

$$V(Q) = \frac{\rho}{2} \iint_{\partial T} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{n}}{s} d\sigma. \quad (8.6)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\partial T$ ,  $d\sigma$  — элемент площади  $\partial T$ .

## 8.1 Однородный брус

Потенциал однородного прямоугольника (7.8) нам удалось вычислить непосредственно. Для нахождения потенциала бруса (прямоугольного параллелепипеда) необходимо взять интеграл по  $z'$  от правой части (7.8), в которой  $z$  следует заменить на  $z' - z$ . Интеграл от арктангенса представляется настолько сложным, что мы решили пойти обходным путем.

Для сокращения формул в разделе 7.1 мы обозначали координаты параллельных сторон прямоугольника одной буквой с индексом, принимающим два значения. Здесь мы пойдем дальше, обозначая декартовы координаты в  $\mathbb{R}^3$  через  $x_1, x_2, x_3$ .

Рассмотрим однородный брус плотности  $\rho$ . В подходящих координатах точки бруса удовлетворяют неравенствам

$$-a_i \leq x_i \leq a_i \quad (8.7)$$

при  $a_i > 0$ . По общей теории

$$\begin{aligned} V(Q) &= V(x_1, x_2, x_3) = \\ &= \rho \iiint \frac{dx'_1 dx'_2 dx'_3}{\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)^2}}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

где интегрирование по каждой переменной  $x'_i$  здесь и ниже осуществляется по отрезку  $[-a_i, a_i]$ .

По симметрии (раздел 2.5) можно считать  $x_i \geq 0$ , поскольку

$$V(\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3) = V(x_1, x_2, x_3). \quad (8.9)$$

Воспользуемся выражением (8.5), представляющим  $V$  суммой интегралов по граням бруса

$$V(Q) = \frac{\varrho}{2} \times \sum_{i=1}^3 \sum_{i'=1}^2 b_{ii'} \iint \frac{dt_{i+1} dt_{i+2}}{\sqrt{b_{ii'}^2 + (t_{i+1} - x_{i+1})^2 + (t_{i+2} - x_{i+2})^2}}. \quad (8.10)$$

Здесь  $b_{ii'} = a_i + (-1)^{i'} x_i$ . Индекс  $i$  понимается по модулю 3:  $i \equiv i+3$ . Например,

$$x_4 = x_1, \quad x_5 = x_2, \quad x_6 = x_3.$$

Представление (8.10) справедливо при любом положении точки  $Q$ . Каждый из шести интегралов (8.10) представляет собой интеграл по плоской области. Сведем его к интегралу по контуру, т.е. по ребрам бруса, применяя формулу (7.4). Теперь результат зависит от положения  $Q$  относительно  $T$ .

Введем множество  $T_1$ , продолжая каждую грань бруса до бесконечности вдоль соответствующей оси. Замкнутая область  $T_1$  (трехмерный крест, похожий также на противотанковый «ёж») изображена на рис. 8.1 Для наглядности рис. 8.2 дает его двумерный аналог. Аналогия неполная: дополнение  $T_1$  в  $\mathbb{R}^3$  есть многосвязная область, в то время как дополнение  $T_1$  в  $\mathbb{R}^2$  образует четыре изолированные области.

Аналитически  $T$  задается совокупностью неравенств (8.7). Точка  $Q$  лежит в  $T$ , если выполнены все три неравенства (8.7). Точка  $Q$  лежит в  $T_1$ , если выполнены два из этих неравенств. Точка  $Q$  лежит вне  $T_1$ , если выполнено не более одного из неравенств (8.7).

1°. Пусть  $Q \notin T_1$ . Формула (7.4) применима без добавочного члена

$$V = \frac{\varrho}{2} \sum_{i,j,i',j'} b_{ii'} b_{i+j,j'} V^*, \quad (8.11)$$

где

$$V^* = \int \frac{\sqrt{b_{ii'}^2 + b_{i+j,j'}^2 + (t_{i-j} - x_{i-j})^2}}{b_{i+j,j'}^2 + (t_{i-j} - x_{i-j})^2} dt_{i-j}.$$

Индекс  $i$  принимает значения 1, 2, 3;  $j$  — значения 1, -1;  $i'$  и  $j'$  — значения 1, 2. Индексы  $i, j$  понимаются по модулю 3. Последний интеграл с точностью до обозначений совпадает с (10.19).

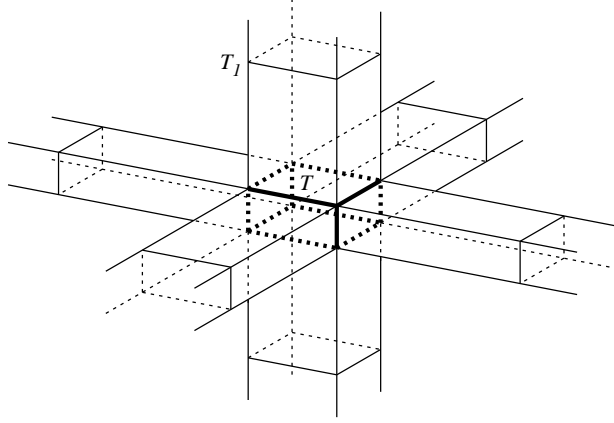


Рис. 8.1. Брус  $T$  и трехмерный крест  $T_1$ .

Окончательно,

$$V = \frac{\varrho}{2} \sum_{i,j,i',j',k} b_{ii'} (F + \Phi). \quad (8.12)$$

Здесь

$$F = (-1)^{k-1} b_{i+j,j'} \ln [(-1)^{k-1} b_{i-j,k} + G],$$

$$\Phi = b_{ii'} \operatorname{arctg} \frac{b_{ii'} b_{i-j,k}}{b_{i+j,j'} G},$$

где

$$G = \sqrt{b_{ii'}^2 + b_{i+j,j'}^2 + b_{i-j,k}^2}.$$

Индекс  $i$  принимает значения 1, 2, 3;  $j$  — значения 1, -1;  $i', j'$  и  $k$  — значения 1, 2. Индексы  $i, j$  понимаются по модулю 3.

**2°.** Пусть  $Q \in \operatorname{int} T_1$ ,  $Q \notin T$ . Для определенности пусть для некоторого  $i$

$$0 \leq x_{i+1} < a_{i+1}, \quad 0 \leq x_{i+2} < a_{i+2}, \quad x_i > a_i. \quad (8.13)$$

Напомним, что принято соглашение  $x_i \geq 0$ .

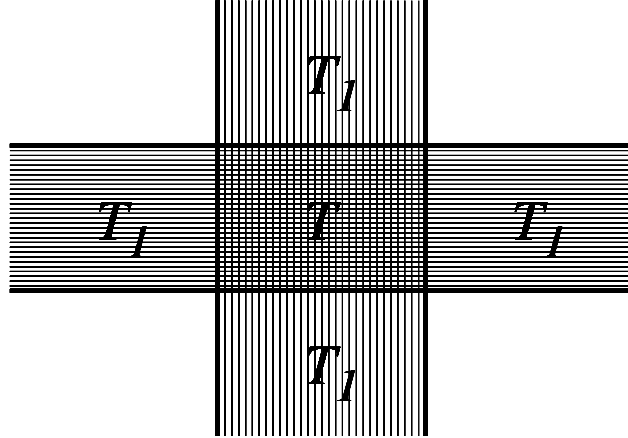


Рис. 8.2. Прямоугольник  $T$  и двумерный крест  $T_1$ .

Согласно (7.5) справа в (8.11), (8.12) необходимо добавить слагаемое

$$\zeta = -\pi \varrho \sum_{i'=1}^2 b_{ii'} |b_{ii'}| = -4\pi \varrho a_i x_i. \quad (8.14)$$

Обратим внимание, что индекс  $i$  фиксирован, и суммирование по нему не производится.

**3°.** Пусть точка  $Q$  лежит на границе  $T_1$ , но не на ребре, вне  $T$ . Для определенности пусть для некоторого  $i$

$$x_i > a_i, \quad x_{i+1} = a_{i+1}, \quad 0 \leq x_{i+2} < a_{i+2},$$

или

$$x_i > a_i, \quad 0 \leq x_{i+1} < a_{i+1}, \quad x_{i+2} = a_{i+2}.$$

Тогда

$$\zeta = -2\pi \varrho a_i x_i. \quad (8.15)$$



4°. Пусть  $Q \notin T$  находится на ребре  $T_1$ :

$$x_i > a_i, \quad x_{i+1} = a_{i+1}, \quad x_{i+2} = a_{i+2}.$$

Тогда

$$\zeta = -\pi \varrho a_i x_i. \quad (8.16)$$

5°. Пусть  $Q \in \text{int } T$ . Добавка (8.14) возникает при каждом  $i$ , причем  $b_{ii'} = |b_{ii'}|$ . Поэтому

$$\zeta = -2\pi \varrho \sum_{i=1}^3 (a_i^2 + x_i^2). \quad (8.17)$$

6°. Пусть  $Q$  принадлежит внутренности грани бруса:

$$x_i = a_i, \quad 0 \leq x_{i+1} < a_{i+1}, \quad 0 \leq x_{i+2} < a_{i+2}.$$

Тогда

$$\zeta = -\pi \varrho (4a_i^2 + a_{i+1}^2 + a_{i+2}^2 + x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2). \quad (8.18)$$

7°. Пусть  $Q$  принадлежит внутренности ребра бруса:

$$0 \leq x_i < a_i, \quad x_{i+1} = a_{i+1}, \quad x_{i+2} = a_{i+2}.$$

Тогда

$$\zeta = -\frac{\pi \varrho}{2} (a_i^2 + x_i^2 + 4a_{i+1}^2 + 4a_{i+2}^2). \quad (8.19)$$

8°. Пусть, наконец,  $Q$  совпадает с вершиной бруса:

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3.$$

Тогда

$$\zeta = -\pi \varrho (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2). \quad (8.20)$$

## 8.2 Однородный тетраэдр

Пусть  $T$  — однородный тетраэдр  $Q_1Q_2Q_3Q_4$ , изображенный на рис. 8.3. Примем, что он обладает правой ориентацией. Именно, выберем содержащую точки  $Q_1, Q_2, Q_3$  плоскость за ориентированную плоскость  $x'y'$  (нам удобнее обозначать оси координат буквами со штрихами). Считаем, что треугольник  $Q_1Q_2Q_3$  обладает правой ориентацией, т.е. обход  $Q_1Q_2Q_3$  происходит против часовой стрелки, если смотреть с вершины  $Q_4$ , расположенной в верхнем полупространстве  $z' > 0$ . Этому условия всегда можно добиться, нумеруя вершины надлежащим образом.

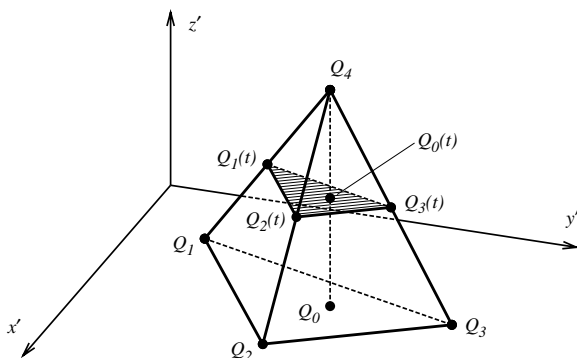


Рис. 8.3. Правоориентированный тетраэдр  $Q_1Q_2Q_3Q_4$ . Заштриховано сечение  $Q_1(t)Q_2(t)Q_3(t)$  тетраэдра плоскостью  $z' = z(1 - t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Изображен также перпендикуляр  $Q_4Q_0(t)Q_0$ , опущенный из  $Q_4$  на основание.

### 8.2.1 Потенциал в вершине тетраэдра

Обозначим координаты  $Q_i$  через  $(x_i, y_i, 0)$  для  $i = 1, 2, 3$  и через  $(x, y, z)$ ,  $z > 0$  для  $i = 4$ .

Разобьем тетраэдр  $Q_1Q_2Q_3Q_4$  на бесконечно тонкие слои толщиной  $z dt$  (рис. 8.3). Потенциал слоя равен потенциалу треугольника  $Q_1(t)Q_2(t)Q_3(t)$ , вырезанного в тетраэдре плоскостью  $z' = (1 - t)z$ , с поверхностной плотностью  $\rho z dt$ . Потенциал же

треугольника в точке  $Q_4$  определен формулой (7.17) с модификацией (7.19). Только вместо треугольника  $Q_1Q_2Q_3$  мы должны рассматривать подобный ему  $Q_1(t)Q_2(t)Q_3(t)$ . Точки  $Q_0(t)$  и  $Q_0 = Q_0(1)$  — пересечения проходящей через  $Q_4$  прямой, параллельной оси  $z$ , с плоскостями  $z' = (1-t)z$  и  $z' = 0$  — также расположены с сохранением подобия. Поэтому в формуле (7.17) нужно сделать подстановку

$$r_i \mapsto tr_i, \quad s_i \mapsto ts_i, \quad \varphi_i \mapsto \varphi_i, \quad z \mapsto tz.$$

Выражения под знаком логарифма и арктангенса не изменятся.

В результате правую часть (7.17) следует умножить на  $qzt dt$  и проинтегрировать по  $t$  от 0 до 1:

$$\begin{aligned} \frac{2V(Q_4)}{qz} &= -z(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2}}{s_{i+2}} \times \right. \\ &\quad \times \ln \frac{r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2 + 2s_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}}{r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2 + 2s_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} + \\ &\quad + z \left[ \operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 + s_{i+2}^2) z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_{i+1}^2 + z^2}} - \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{(r_{i+1}^2 - r_i^2 - s_{i+2}^2) z}{2r_i r_{i+1} \sin \varphi_{i+2} \sqrt{r_i^2 + z^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

### 8.2.2 Потенциал тетраэдра

Пусть теперь  $Q(x, y, z)$  — произвольная точка внутри тетраэдра  $T$ . Потенциал в  $Q$  будет суммой потенциалов четырех правоориентированных тетраэдров  $T_n$ :  $T_1 = Q_2Q_4Q_3Q$ ,  $T_2 = Q_3Q_4Q_1Q$ ,  $T_3 = Q_1Q_4Q_2Q$ ,  $T_4 = Q_1Q_2Q_3Q$ .

Запишем полученный результат аналитически. Фиксируем  $n$ . Тетраэдру  $T_n$  поставим в соответствие набор перестановок  $(ijkn)$  из четырех символов (1234). Каждому  $T_n$  отвечают три перестановки  $(ijk)$  (из возможных шести), а именно те, для которых перестановка  $(ijkn)$  — четная. Первое слагаемое справа в (8.21) можно

записать как сумму по трем перестановкам, а сумма по  $i$  в (8.21) — это фактически сумма по трем допустимым перестановкам  $(ijk)$ . К ней надо добавить еще сумму по  $n$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{2V(Q)}{\varrho} = & - \sum \tilde{z}_n |\tilde{z}_n| \varphi_{nij} + \\ & + \sum \left\{ \frac{\tilde{z}_n r_{ni} r_{nj} \sin \varphi_{nij}}{s_{ij}} \ln \frac{r_{nj}^2 - r_{ni}^2 + s_{ij}^2 + 2s_{ij} R_j}{r_{nj}^2 - r_{ni}^2 - s_{ij}^2 + 2s_{ij} R_j} + \right. \\ & + \tilde{z}_n^2 \left[ \operatorname{arctg} \frac{(r_{nj}^2 - r_{ni}^2 + s_{ij}^2) \tilde{z}_n}{2r_{ni} r_{nj} R_j \sin \varphi_{nij}} - \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{arctg} \frac{(r_{nj}^2 - r_{ni}^2 - s_{ij}^2) \tilde{z}_n}{2r_{ni} r_{nj} R_j \sin \varphi_{nij}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Здесь приняты следующие обозначения. Пусть  $S_n$  — плоскость, содержащая грань  $Q_i Q_j Q_k$  тетраэдра  $T_n$  (она же — грань  $T$ );  $Q_{n0}$  — проекция  $Q$  на  $S_n$ . Тогда

$$\tilde{z}_n = |QQ_{n0}|, \quad r_{ni} = |Q_{n0}Q_i|, \quad R_i = |QQ_i|, \quad s_{ij} = |Q_i Q_j|,$$

$\varphi_{nij}$  — угол между векторами  $\overrightarrow{Q_{n0}Q_i}$  и  $\overrightarrow{Q_{n0}Q_j}$ . Причина, по которой вместо  $\tilde{z}_n^2$  мы написали  $\tilde{z}_n |\tilde{z}_n|$ , скоро выяснится.

Каждая сумма содержит 12 слагаемых: по три допустимых перестановки  $(ijk)$  для каждого из четырех значений  $n$ .

Нам осталось лишь выразить параметры  $\tilde{z}_n, r_{ni}, \dots$  через координаты точек  $Q_n(x_n, y_n, z_n), Q(x, y, z)$  в произвольной системе отсчета.

Обозначим через  $\mathbf{l}_n$  орт нормали к  $S_n$ , направленный внутрь  $T$ . Очевидно,

$$\mathbf{l}_n = \frac{\overrightarrow{Q_i Q_j} \times \overrightarrow{Q_i Q_k}}{|\overrightarrow{Q_i Q_j} \times \overrightarrow{Q_i Q_k}|}, \quad \tilde{z}_n = \overrightarrow{Q_i Q} \cdot \mathbf{l}_n = \frac{(\overrightarrow{Q_i Q_j}, \overrightarrow{Q_i Q_k}, \overrightarrow{Q_i Q})}{|\overrightarrow{Q_i Q_j} \times \overrightarrow{Q_i Q_k}|},$$

где круглыми скобками обозначено смешанное произведение трех векторов. По определению точки  $Q_{n0}$

$$\overrightarrow{Q_i Q_{n0}} = \overrightarrow{Q_i Q} - \tilde{z}_n \mathbf{l}_n.$$

Вычислим скалярный квадрат, а также скалярное и векторное произведения

$$\begin{aligned} |Q_i Q_{n0}|^2 &= R_i^2 - z_n^2, \quad \overrightarrow{Q_i Q_{n0}} \cdot \overrightarrow{Q_j Q_{n0}} = \overrightarrow{Q_i Q} \cdot \overrightarrow{Q_j Q} - z_n^2, \\ \overrightarrow{Q_i Q_{n0}} \times \overrightarrow{Q_j Q_{n0}} &= \overrightarrow{Q_i Q} \times \overrightarrow{Q_j Q} + z_n (\overrightarrow{Q_j Q} - \overrightarrow{Q_i Q}) \times \mathbf{l}_n = \\ &= \overrightarrow{Q_i Q} \times \overrightarrow{Q_j Q} - z_n \overrightarrow{Q_i Q_j} \times \mathbf{l}_n. \end{aligned}$$

Векторы  $\overrightarrow{Q_i Q_{n0}}$  и  $\overrightarrow{Q_j Q_{n0}}$  лежат в ортогональной вектору  $\mathbf{l}_n$  плоскости, следовательно, их векторное произведение коллинеарно  $\mathbf{l}_n$ :

$$\overrightarrow{Q_i Q_{n0}} \times \overrightarrow{Q_j Q_{n0}} = \Phi \mathbf{l}_n.$$

Умножая это равенство скалярно на  $\mathbf{l}_n$ , получим

$$\Phi = (\overrightarrow{Q_i Q}, \overrightarrow{Q_j Q}, \mathbf{l}_n).$$

От координат точки  $Q$  величина  $\Phi$  зависит не квадратично, а линейно. Действительно, представим  $\overrightarrow{Q_j Q} = \overrightarrow{Q_i Q} - \overrightarrow{Q_i Q_j}$ , откуда

$$\Phi = -(\overrightarrow{Q_i Q}, \overrightarrow{Q_i Q_j}, \mathbf{l}_n).$$

Важно, что мы вычислили не модуль векторного произведения, а его компоненту вдоль вектора  $\mathbf{l}_n$ . Теперь однозначно определяются углы:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{nij} &= \frac{\overrightarrow{Q_i Q} \cdot \overrightarrow{Q_j Q} - z_n^2}{\sqrt{(R_i^2 - z_n^2)(R_j^2 - z_n^2)}}, \\ \sin \varphi_{nij} &= \frac{(\overrightarrow{Q_i Q}, \overrightarrow{Q_j Q}, \mathbf{l}_n)}{\sqrt{(R_i^2 - z_n^2)(R_j^2 - z_n^2)}}. \end{aligned}$$

Дадим в заключение рабочие формулы, выражающие параметры через исходные координаты:

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}, \\ R_i &= \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_{ijk} &= (y_j - y_i)(z_k - z_j) - (y_k - y_i)(z_j - z_i), \\
\eta_{ijk} &= (z_j - z_i)(x_k - x_j) - (z_k - z_i)(x_j - x_i), \\
\zeta_{ijk} &= (x_j - x_i)(y_k - y_j) - (x_k - x_i)(y_j - y_i), \\
\lambda_{ijk} &= \sqrt{\xi_{ijk}^2 + \eta_{ijk}^2 + \zeta_{ijk}^2}, \\
\tilde{z}_n &= \frac{(x - x_i)\xi_{ijk} + (y - y_i)\eta_{ijk} + (z - z_i)\zeta_{ijk}}{\lambda_{ijk}}, \\
r_{ni} &= \sqrt{R_i^2 - \tilde{z}_n^2}, \\
\cos \varphi_{nij} &= \frac{(x - x_i)(x - x_j) + (y - y_i)(y - y_j) + (z - z_i)(z - z_j) - \tilde{z}_n^2}{r_{ni}r_{nj}}, \\
\sin \varphi_{nij} &= -\frac{\Psi_{nij}}{r_{ni}r_{nj}\lambda_{ijk}}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\Psi_{nij} &= \left( \overrightarrow{Q_i Q_j}, \overrightarrow{Q_i Q_k}, \overrightarrow{Q_i Q_l} \times \overrightarrow{Q_i Q_m} \right) = \\
&= \left( \overrightarrow{Q_i Q_j} \cdot \overrightarrow{Q_i Q_k} \right) \left( \overrightarrow{Q_i Q_j} \cdot \overrightarrow{Q_i Q_l} \right) - |\overrightarrow{Q_i Q_j}|^2 \left( \overrightarrow{Q_i Q_k} \cdot \overrightarrow{Q_i Q_l} \right) = \\
&= [(x - x_i)(x_j - x_i) + \dots] [(x_j - x_i)(x_k - x_i) + \dots] - \\
&\quad - [(x_j - x_i)^2 + \dots] [(x - x_i)(x_k - x_i) + \dots],
\end{aligned}$$

где точками обозначены аналогичные члены с  $y, z$ . При выводе формулы для  $\Psi_{nij}$  мы воспользовались тождеством

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{ab})(\mathbf{bc}) - (\mathbf{ac})\mathbf{b}^2.$$

Заметим, что  $\mathbf{l}_n, \tilde{z}_n$  не зависят от перестановки  $(ijk)$ .

Формула (8.22) доказана в предположении, что точка  $Q$  лежит внутри тетраэдра.

Пусть это не так. Тем не менее формула (8.22) остается справедливой. Для доказательства рассуждаем так, как в разделе 7.2.2. Трехмерный случай менее нагляден, поэтому мы несколько модифицируем рассмотрение.

Пусть  $Q$  лежит на грани (но не ребрах и вершинах)  $Q_1 Q_2 Q_3$  (рис. 8.4). Тогда  $V(Q)$  будет суммой потенциалов трех правоориентированных тетраэдров  $T_1 = Q_2 Q_4 Q_3 Q, T_2 = Q_3 Q_4 Q_1 Q,$

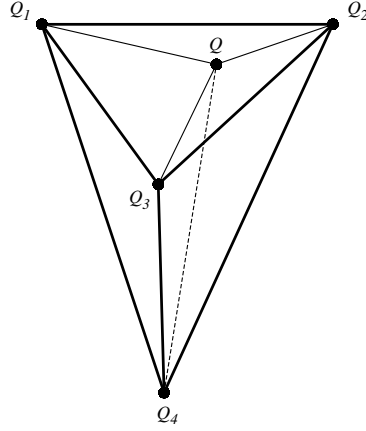


Рис. 8.4. Положение притягиваемой точки  $Q$  на грани  $Q_1Q_2Q_3$ .

$T_3 = Q_1Q_4Q_2Q$ . Тетраэдр  $T_4 = Q_1Q_2Q_3Q$  выродился в плоский треугольник, дающий нулевой вклад в потенциал. В формуле (8.22) тетраэдру  $T_4$  отвечают слагаемые при  $n = 4$ . Очевидно,  $\tilde{z}_4 = 0$ , так что эти слагаемые вносят нулевой вклад в  $V(Q)$ .

Изменим слегка положение точки  $Q$  (рис. 8.4), отодвинув ее немного во внешнее по отношению к  $T$  пространство. Тогда  $V(Q)$  будет суммой потенциалов  $T_1, T_2, T_3$  минус потенциал *левоориентированного* тетраэдра  $T_4 = Q_1Q_2Q_3Q$ . Очевидно,  $\Psi_{4ij}$  при малом шевелении  $Q$  знака не меняет, а  $\tilde{z}_4$  становится отрицательным. Формула (8.22) по-прежнему сохраняется. По принципу аналитического продолжения она верна во всем внешнем пространстве, а по непрерывности — на границе  $T$ .

Итак, формула (8.22) описывает потенциал  $T$  во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

### 8.3 Однородный многогранник

Всякий многогранник можно разбить на конечное число тетраэдров. Иногда разбиение упрощается добавлением брусков. Таким образом, по формулам предыдущих параграфов потенциал однородного многогранника выражается через элементарные функции.

Можно вывести и явную формулу для потенциала однородного  $k$ -гранника. Обозначим  $T = S_1 S_2 \dots S_k$ , где  $S_i$  — ориентированная грань  $T$ , так что нормаль к  $S_i$  считается направленной наружу. Многогранник  $T$  не обязательно выпуклый, но его грани не должны пересекаться.

Воспользуемся представлением (8.6)

$$V = \frac{\varrho}{2} \sum_{i=1}^k \iint_{S_i} \frac{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{n}_i}{s} d\sigma. \quad (8.23)$$

Здесь  $\mathbf{n}_i$  — единичный вектор нормали к  $S_i$ ,  $d\sigma$  — элемент площади  $S_i$ . Скалярное произведение  $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{n}_i$  под знаком интеграла (8.23) равно расстоянию от  $Q$  до  $S_i$  со знаком минус, если точка  $Q$  расположена в направлении внешней нормали  $\mathbf{n}_i$ , и со знаком плюс в противном случае. Поэтому  $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \mathbf{n}_i$  не зависит от координат точки интегрирования  $Q'$ . Обозначая  $\mu_i = (\mathbf{r}'_i - \mathbf{r}) \mathbf{n}_i$ , где  $\mathbf{r}'_i$  — радиус-вектор произвольной точки  $S_i$ , перепишем (8.23) в виде

$$V = \frac{\varrho}{2} \sum_{i=1}^k \mu_i \iint_{S_i} \frac{d\sigma}{s}. \quad (8.24)$$

Интеграл по грани  $S_i$  представляет собой потенциал многоугольника единичной плотности, вычисленный в разделе 7.3. Обозначая его через  $V_i$ , получим окончательно

$$V(Q) = \frac{\varrho}{2} \sum_{i=1}^k \mu_i V_i(Q). \quad (8.25)$$

## 8.4 Тело сферической структуры

**Пример 8.4.1.** Рассмотрим сначала случай пространства  $\mathbb{R}^3$ , заполненного материей плотности  $\varrho(r)$ , зависящей лишь от расстояния  $r$ . Функцию  $\varrho(r)$  считаем кусочно-гладкой и отвечающей конечной массе

$$M = 4\pi \int_0^\infty r^2 \varrho(r) dr. \quad (8.26)$$

По симметрии  $V$  зависит только от  $r$ .



Определяющий интеграл (8.1) запишем в сферических координатах

$$V(r) = \int_0^\infty \varrho(r') dr' \iint_\sigma \frac{r'^2 d\sigma}{\sqrt{r^2 - 2rr' \cos H + r'^2}}. \quad (8.27)$$

Здесь  $H$  — угол между радиус-векторами точек  $Q, Q'$ ;  $d\sigma$  — элемент площади единичной сферы  $\sigma$ , по которой проводится внутреннее интегрирование. Внутренний интеграл определяет потенциал сферы единичной плотности радиусом  $r'$ , найденный ранее, см. формулы (7.31). В результате

$$V(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \varrho(t) t^2 dt + 4\pi \int_r^\infty \varrho(t) t dt. \quad (8.28)$$

Последний интеграл абсолютно сходится при условии конечности массы (8.26).

Выражение для градиента содержит лишь один интеграл

$$\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{4\pi}{r^2} \int_0^r \varrho(t) t^2 dt = -\frac{M(r)}{r^2}, \quad (8.29)$$

где  $M(r)$  — масса тела внутри сферы радиусом  $r$ . Таким образом, *внешние слои тела сферической структуры не притягивают внутренних точек.*

При интегрируемой  $\varrho$  функции (8.28) и (8.29) непрерывны всюду. Потенциал имеет обычную асимптотику на бесконечности. Действительно, формула (8.28) представима в виде

$$V(r) = \frac{M}{r} - \frac{4\pi}{r} \int_r^\infty \varrho(t) t(t-r) dt.$$

Последний интеграл стремится к нулю при  $r \rightarrow \infty$ .

**Пример 8.4.2.** Шар  $T$  конечных размеров  $r \leq a$ .

Этот пример сводится к предыдущему при  $\varrho(r) = 0$ , если  $r > a$ . Внутренний потенциал  $T$  дается модификацией (8.28)

$$V(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \varrho(t) t^2 dt + 4\pi \int_r^a \varrho(t) t dt, \quad \text{если } r \leq a. \quad (8.30)$$

Для внешнего потенциала второй из интегралов исчезает, а первый берется в пределах от 0 до  $a$ :

$$V(r) = \frac{M}{r}, \quad \text{если } r \geq a. \quad (8.31)$$

**Пример 8.4.3.** Однородный шар радиусом  $a$ . Оба интеграла (8.30) элементарны, если  $\varrho$  — рациональная функция от  $r$ . Если  $\varrho$  — многочлен, то и интегралы — многочлены от  $r$ . В частности, для однородного шара внутренний потенциал равен

$$V(r) = \frac{2\pi}{3} \varrho(3a^2 - r^2). \quad (8.32)$$

Очевидно,  $V$  и  $\partial V/\partial r$  непрерывны во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

## 8.5 Тело эллипсоидальной структуры

Простота шара обусловлена тем, что все искомые величины являются функциями только одной сферической координаты  $r$ . В случае однородного эллипсоида задача также сводится к функциям от одной из эллипсоидальных координат (раздел 1.5.3), а именно от соответствующей расстоянию (в квадрате)  $u$ . Это имеет место и для неоднородного эллипсоида с подходящим распределением масс.

**Пример 8.5.1.** Фиксируем базовый эллипсоид с положительными полуосями  $a, b, c$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (8.33)$$

Предположим, что пространство  $\mathbb{R}^3$  заполнено материей, причем эллипсоиды, подобные базовому (8.33), являются поверхностями равной плотности. Иными словами, плотность

$$\varrho = \varrho(t) \quad (8.34)$$

зависит лишь от  $t$ , где

$$t = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Как и в предыдущем параграфе, считаем  $\varrho$  кусочно-гладкой и удовлетворяющей условию конечности полной массы. Совершая подстановку  $x = ax', y = by', z = cz'$  и затем переходя к сферическим координатам, найдем

$$M = 2\pi abc \int_0^\infty \varrho(t) \sqrt{t} dt. \quad (8.35)$$

Нам понадобится также первообразная от плотности

$$\varrho^*(t) = \int_t^\infty \varrho(t') dt'. \quad (8.36)$$

По условию (8.35) интеграл (8.36) сходится.

Как и в разделе 6.4.2, воспользуемся эллипсоидальными координатами  $u, v, w$  и построениями примера 1.5.3.1. Обозначим

$$\begin{aligned} p(x, y, z, \lambda) &= \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda}, \\ t = p(x, y, z, 0) &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}, \\ g(\lambda) &= \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}. \end{aligned} \quad (8.37)$$

В согласии с (1.178) образуем функцию

$$V(x, y, z) = \pi abc \int_0^\infty \frac{\varrho^*(p(x, y, z, \lambda)) d\lambda}{g(\lambda)}. \quad (8.38)$$

Докажем, что выражение (8.38) дает искомый потенциал.

ШАГ 1. Непрерывность.

Величина

$$\varrho^*(p(x, y, z, \lambda)) = \int_{p(x, y, z, \lambda)}^\infty \varrho(t') dt'$$

при всех  $\lambda \geq 0$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  положительна, непрерывна и ограничена. Следовательно,  $V$  непрерывна во всем пространстве  $\mathbb{R}^3$ .

ШАГ 2. Уравнение Пуассона (1.6).

Предположим сначала, что плотность ограничена и непрерывна вместе с первой производной. Тогда

$$\frac{d\varrho^*}{dp} = -\varrho(p), \quad \frac{d^2\varrho^*}{dp^2} = -\varrho'(p)$$

непрерывны, и  $d\varrho^*/dp$  ограничена. Поэтому справедлива формула (1.182), так что

$$\Delta V = 4\pi \frac{d\varrho^*(p(x, y, z, 0))}{dp} = -4\pi \varrho(t). \quad (8.39)$$

Таким образом, функция (8.38) удовлетворяет уравнению Пуассона. Если  $\varrho$  обладает лишь кусочной гладкостью, то (8.39) выполнено почти всюду.

ШАГ 3. Асимптотика на бесконечности.

Мы установим ее при добавочном условии

$$\varrho^*(t) \leq \begin{cases} A, & \text{если } t \leq 1, \\ At^{-1/2-\sigma}, & \text{если } t \geq 1. \end{cases} \quad (8.40)$$

при  $\sigma > 0$ . Граничное значение  $t = 1$  выбрано для удобства и не умаляет общности. Условие (8.40) естественно. Если тело  $T$  в действительности ограничено, то  $\varrho(t)$  и  $\varrho^*(t)$  равны нулю, начиная с некоторого  $t_0$ , и (8.40) заведомо выполняется. Если  $T$  неограничено, то для сходимости интеграла (8.35) естественно потребовать убывания  $\varrho(t)$  со скоростью  $t^{-3/2-\sigma}$ , что влечет убывание  $\varrho^*(t)$  со скоростью  $t^{-1/2-\sigma}$ .

Из (8.40) следует

$$\varrho^*(p(x, y, z, \lambda)) \leq \begin{cases} A, & \text{если } \lambda \geq r^2 - a^2, \\ A[p(x, y, z, \lambda)]^{-1/2-\sigma}, & \text{если } \lambda \leq r^2 - a^2. \end{cases}$$

Здесь принято  $c \leq b \leq a$ , что не ограничивает общности. Интеграл (8.38) оценивается сверху разбиением промежутка интегрирования на два

$$A \int_0^{r^2-a^2} p^{-1/2-\sigma} \frac{d\lambda}{g(\lambda)} + A \int_{r^2-a^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{g(\lambda)}. \quad (8.41)$$

Ограничение для первого из интегралов (8.41):

$$\begin{aligned} \int_0^{r^2-a^2} \left( \frac{r^2}{a^2 + \lambda} \right)^{-1/2-\sigma} \frac{d\lambda}{g(\lambda)} &\leq \frac{a^{2\sigma}}{c^{2\sigma} r^{1+2\sigma}} \int_0^{r^2-a^2} (c^2 + \lambda)^{\sigma-1} d\lambda = \\ &= \frac{a^{2\sigma}}{\sigma c^{2\sigma} r^{1+2\sigma}} [(c^2 + r^2 - a^2)^\sigma - c^{2\sigma}] \leq \frac{a^{2\sigma}}{\sigma c^{2\sigma} r}. \end{aligned}$$

Для второго:

$$\int_{r^2-a^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{(c^2 + \lambda)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{r^2 + c^2 - a^2}} \leq \frac{3}{r}$$

при  $5r^2 \geq 9(a^2 - c^2)$ .

Итак, при  $r \rightarrow \infty$

$$V(x, y, z) \leq \frac{C}{r}.$$

Таким образом, функция (8.38) представляет искомый потенциал.

**Пример 8.5.2.** Пусть  $T$  — сплошной эллипсоид, ограниченный поверхностью (8.33) с кусочно-гладкой плотностью  $\varrho$ , зависящей лишь от  $t$ . Эллипсоид  $T$  можно считать частным случаем предыдущего примера. Теперь

$$M = 2\pi abc \int_0^1 \varrho(t) \sqrt{t} dt,$$

а для  $t \in [0, 1]$

$$\varrho^*(t) = \int_t^1 \varrho(t') dt'.$$

Обе функции  $\varrho(t)$ ,  $\varrho^*(t)$  можно определить и для  $t > 1$ , считая их равными нулю. Но мы избежим значений  $t > 1$ .

Потенциал  $T$  дается формулой (8.38) с незначительными изменениями

$$V(x, y, z) = \pi abc \int_u^\infty \frac{\varrho^*(p) d\lambda}{g(\lambda)}. \quad (8.42)$$

Здесь  $u = 0$  для внутреннего потенциала; для внешнего потенциала  $u = u(x, y, z)$  — положительный корень уравнения

$$p(x, y, z, u) = 1. \quad (8.43)$$

Существование и единственность решения уравнения (8.43) для точки  $Q(x, y, z)$ , лежащей вне  $T$ , следует из  $p(x, y, z, 0) > 1$ ,  $p(x, y, z, \infty) = 0$ ,  $\partial p(x, y, z, \lambda)/\partial \lambda < 0$  при  $0 \leq \lambda < \infty$ . На самом эллипсоиде  $u = 0$ .

**Пример 8.5.3.** Пусть  $T$  — однородный сплошной эллипсоид, ограниченный поверхностью (8.33). Для него при  $0 \leq t \leq 1$

$$\varrho = \text{const}, \quad \varrho^*(t) = (1 - t)\varrho. \quad (8.44)$$

Масса  $T$  равна

$$M = \frac{4}{3}\pi abc\varrho.$$

Формула (8.42) для потенциала принимает вид

$$V(x, y, z) = \pi \rho abc \int_u^\infty \frac{1 - p(x, y, z, \lambda)}{g(\lambda)} d\lambda. \quad (8.45)$$

Как видно, внутренний потенциал — квадратичная функция координат

$$V = A_0 - A_1 x^2 - A_2 y^2 - A_3 z^2. \quad (8.46)$$

Коэффициенты  $A_i$  выражаются через эллиптические интегралы и зависят от параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Внешний потенциал выражается через эллиптические интегралы, аргументы которых — сложные функции декартовых координат.

**Пример 8.5.4.** Пусть  $T$  — тело примера 8.5.3, являющееся сжатым эллипсоидом вращения  $a = b > c$ . Все интегралы, на которые разбивается (8.45), сводятся к интегралам (10.20)–(10.22). В результате

$$V = \frac{\pi \rho ac}{\varepsilon^3} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{c^2 + u}}{a\varepsilon} \right) \left( 2\varepsilon^2 + \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{a^2} \right) + \varepsilon \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{c^2 + u}}{a(a^2 + u)} - \frac{2\varepsilon z^2}{a\sqrt{c^2 + u}} \right], \quad (8.47)$$

где  $\varepsilon = \sqrt{a^2 - c^2}/a$  — эксцентриситет меридионального сечения.

**Пример 8.5.5.** Пусть  $T$  — эллипсоид вращения предыдущего примера, но вытянутый  $a = b < c$ . С помощью интегралов (10.23)–(10.25) получим

$$V = \frac{\pi \rho a^2}{\varepsilon^3} \left[ \left( -\varepsilon^2 + \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{2c^2} \right) \ln \frac{\sqrt{c^2 + u} - c\varepsilon}{\sqrt{c^2 + u} + c\varepsilon} - \varepsilon \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{c^2 + u}}{c(a^2 + u)} + \frac{2\varepsilon z^2}{c\sqrt{c^2 + u}} \right], \quad (8.48)$$

где  $\varepsilon = \sqrt{c^2 - a^2}/c$  — эксцентриситет меридионального сечения.

В примере 4.4.2 мы вычислили логарифмический потенциал отрезка, рассматривая последний как предельный случай эллипсов. Аналогично найдем потенциал сплошного эллипса как предельной фигуры сплошного эллипсоида.

**Пример 8.5.6.** Пусть  $T'$  — однородный сплошной эллипсоид примера 8.5.3. Фиксируем полуоси  $a$ ,  $b$  и устремим  $c$  к нулю. Одновременно устремим объемную плотность  $\rho$  к бесконечности так, чтобы полная масса оставалась неизменной. В пределе получим сплошной эллипс с поверхностной плотностью  $\beta$ . Для ее определения запишем условие равенства масс бесконечно малого участка предельного сплошного эллипса  $T$  и бесконечно малого цилиндра сплошного эллипсоида  $T'$

$$\beta d\sigma = 2z\rho d\sigma = 2c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \frac{3M}{4\pi abc} d\sigma,$$

откуда

$$\beta = \frac{3M}{2\pi ab} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Переходя в (8.45) к пределу  $c \rightarrow 0$ , получим потенциал сплошного эллипса

$$V(x, y, z) = \frac{3M}{4} \int_u^\infty \frac{1 - p(x, y, z, \lambda)}{g(\lambda)} d\lambda, \quad (8.49)$$

где теперь

$$p(x, y, z, \lambda) = \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{\lambda}, \quad g(\lambda) = \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)\lambda},$$

$u$  — положительный корень уравнения (8.43).

**Пример 8.5.7.** Как и в примере 8.5.6, рассмотрим предельный случай сжатого эллипсоида вращения примера 8.5.4 при  $c \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $M = \text{const}$ . Получим круг

$$x^2 + y^2 \leq a^2, \quad z = 0$$

с поверхностной плотностью

$$\beta = \frac{3M}{2\pi a^3} \sqrt{a^2 - R^2},$$

где  $R^2 = x^2 + y^2$ . Потенциал круга определяется формулой (8.47), в которой надо перейти к пределу  $c \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 1$ ,  $c\rho \rightarrow 3M/(4\pi a^2)$ :

$$V = \frac{3M}{4a} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - \text{arctg} \frac{\sqrt{u}}{a} \right) \frac{2a^2 + 2z^2 - R^2}{a^2} + \frac{R^2\sqrt{u}}{a(a^2 + u)} - \frac{2z^2}{a\sqrt{u}} \right]. \quad (8.50)$$

Здесь  $u$  — положительный корень уравнения (8.43), т.е.

$$2u = r^2 - a^2 + \sqrt{(r^2 - a^2)^2 + 4a^2 z^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

**Пример 8.5.8.** Рассмотрим теперь предельный случай вытянутого эллипсоида вращения примера 8.5.5 при  $a \rightarrow 0$ ,  $\varrho \rightarrow \infty$ ,  $M = \text{const}$ . Получим отрезок

$$x^2 + y^2 = 0, \quad -c \leq z \leq c$$

с линейной плотностью

$$\alpha = \frac{3M}{4c} \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right),$$

определяемой из условия

$$\alpha dz = \pi(x^2 + y^2)\varrho dz = \pi a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \frac{3M}{4\pi a^2 c} dz.$$

Переходя к пределу в выражении (8.48) при  $a \rightarrow 0$ ,  $\varrho \rightarrow \infty$ ,  $\varrho a^2 \rightarrow (3M)/(4\pi c)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 1$ , получим

$$V = \frac{3M}{4c} \left[ \frac{2z^2 - R^2 - 2c^2}{2c^2} \ln \frac{\sqrt{c^2 + u} - c}{\sqrt{c^2 + u} + c} + \frac{2z^2 u - R^2(c^2 + u)}{cu\sqrt{c^2 + u}} \right]. \quad (8.51)$$

Здесь  $u$  — положительный корень уравнения (8.43), т.е.

$$2u = r^2 - c^2 + \sqrt{(r^2 - c^2)^2 + 4c^2 R^2}, \quad R^2 = x^2 + y^2, \quad r^2 = R^2 + z^2.$$



## Глава 9

# Потенциал некоторых правильных тел в $N$ -мерном пространстве

Поскольку одномерный случай тривиален, а двумерный стоит особняком, считаем в этой главе  $N \geq 3$ .

### 9.1 Однородная сфера

Рассмотрим сферу  $T$  радиусом  $a$  с постоянной плотностью  $\beta$ . Масса сферы равна

$$M = \beta \pi_N a^{N-1}, \quad (9.1)$$

где  $\pi_N$  дается формулой (2.44). По симметрии потенциал зависит лишь от  $r$ . Вне и внутри сферы он удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dr} \left( r^{N-1} \frac{dV}{dr} \right) = 0, \quad (9.2)$$

где мы воспользовались выражением (1.43) для радиальной части оператора Лапласа. Отсюда

$$\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^{N-1}}. \quad (9.3)$$

Внутри сферы  $A = 0$  по регулярности потенциала в точке  $O$ . Вне сферы  $A = -M(N-2)C_N$  согласно асимптотике (2.34). С учетом (2.45) получаем  $A = -4\pi\beta a^{N-1}$ . Далее,  $V = B_0$  внутри  $T$ ,

$V = -Ar^{-N+2}/(N-2) + B_1$  вне  $T$ . По асимптотике (2.31)  $B_1 = 0$ . По непрерывности  $B_0 = -Aa^{-N+2}/(N-2)$ . Окончательно,

$$V(r) = \begin{cases} \frac{4\pi\beta}{N-2}a & \text{при } r \leq a, \\ \frac{4\pi\beta a^{N-1}}{(N-2)r^{N-2}} & \text{при } r \geq a, \end{cases} \quad (9.4)$$

что можно представить также в форме

$$V(r) = \begin{cases} \frac{C_N M}{a^{N-2}} & \text{при } r \leq a, \\ \frac{C_N M}{r^{N-2}} & \text{при } r \geq a. \end{cases} \quad (9.5)$$

Мы видим, что сфера не оказывает воздействия на внутренние точки, а внешние притягивает как материальная точка той же массы, помещенная в центр сферы.

## 9.2 Тело сферической структуры

Пусть  $T$  — шар радиусом  $a$  с плотностью  $\varrho$ , зависящей лишь от  $r$ .

В сферически симметричном случае элемент объема равен произведению площади (меры) сферы на элемент длины вдоль радиуса. Площадь сферы дается формулой (9.1) при  $\beta = 1$ . Таким образом,  $dm' = \pi_N r'^{N-1} \varrho(r') dr'$ ,

$$M(r) = \pi_N \int_0^r r'^{N-1} \varrho(r') dr', \quad M = \pi_N \int_0^a r'^{N-1} \varrho(r') dr', \quad (9.6)$$

где  $M(r)$  — масса шара радиусом  $r$ ,  $M$  — масса  $T$ .

Обозначим через  $U(r, a)$  потенциал (9.4) сферы радиусом  $a$  с единичной плотностью. Искомый потенциал представится интегралом

$$V(r) = \int_0^a U(r, r') \varrho(r') dr'.$$

Пусть  $0 < r < a$ . Разобьем интеграл на два: от 0 до  $r$  и от  $r$  до  $a$

$$V(r) = \frac{4\pi}{(N-2)r^{N-2}} \int_0^r r'^{N-1} \varrho(r') dr' + \frac{4\pi}{N-2} \int_r^a r' \varrho(r') dr', \quad (9.7)$$

что с учетом первой из формул (9.6) можно представить в виде

$$V(r) = \frac{C_N M(r)}{r^{N-2}} + \frac{4\pi}{N-2} \int_r^a r' \varrho(r') dr'. \quad (9.8)$$

При  $r = 0$  исчезает первый из интегралов справа. При  $r \geq a$  исчезает второй, а в первом следует верхний предел заменить на  $a$  и получить

$$V(r) = \frac{C_N M}{r^{N-2}}. \quad (9.9)$$

Таким образом, шар притягивает внешние точки как материальная точка той же массы, помещенная в его центре.

### 9.3 Однородный шар радиусом $a$

Интегралы (9.7) элементарны при дробно-рациональной плотности и сводятся к многочленам при полиномиальной плотности. Вычислим их при  $\varrho = \text{const}$ . Внешний потенциал дается формулой (9.9), достаточно поэтому ограничиться внутренним.

При  $0 \leq r \leq a$

$$V(r) = 2\pi\varrho \left( \frac{a^2}{N-2} - \frac{r^2}{N} \right), \quad (9.10)$$

что можно представить в форме

$$V(r) = \frac{C_N M}{2} \left[ \frac{N}{a^{N-2}} - \frac{(N-2)r^2}{a^N} \right], \quad (9.11)$$

поскольку масса шара согласно (9.6) равна

$$M = \frac{\pi_N a^n}{N} \varrho = \frac{4\pi a^n}{N(N-2)C_N} \varrho.$$

Очевидно,  $V$  и  $dV/dr$  непрерывны при  $r = a$ , а  $d^2V/dr^2$  терпит скачок.

### 9.4 Тело эллипсоидальной структуры

По симметричным формулам в трехмерном случае можно предположить, что потенциал сплошного эллипсоида приводится к однократному интегралу в пространстве произвольной размерности. Покажем это.

**Пример 9.4.1.** Фиксируем базовый эллипсоид с положительными полуосями  $a_i$

$$\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1. \quad (9.12)$$

Введем вспомогательную переменную  $\lambda \geq 0$ , а также две переменные, связанные с декартовыми координатами

$$p(x_i, \lambda) = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i^2 + \lambda}, \quad t = p(x_i, 0) = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{a_i^2}. \quad (9.13)$$

Пусть пространство  $\mathbb{R}^N$  заполнено материей с плотностью, зависящей лишь от  $t$

$$\varrho = \varrho(t). \quad (9.14)$$

Поверхности равной плотности суть эллипсоиды, подобные базовому (9.12). Как обычно, считаем  $\varrho$  кусочно-гладкой и удовлетворяющей условию конечности полной массы. Для ее вычисления совершим сначала подстановку  $x_i = a_i y_i$  с якобианом  $A = a_1 a_2 \cdots a_N$  и затем перейдем к сферическим координатам (см. раздел 1.3) с якобианом (1.39)

$$M = A \pi_N \int_0^\infty r^{N-1} \varrho(t) dr.$$

Переходя к интегрированию по  $t = r^2$ , получим окончательно

$$M = \frac{A \pi_N}{2} \int_0^\infty t^{(N-2)/2} \varrho(t) dt. \quad (9.15)$$

Образует функцию

$$V(x_i) = \pi A \int_0^\infty \frac{\varrho^*(p) d\lambda}{g(\lambda)}, \quad (9.16)$$

где  $g(\lambda) = \sqrt{(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda) \cdots (a_N^2 + \lambda)}$  и введена первообразная от плотности

$$\varrho^*(t) = \int_t^\infty \varrho(t') dt'. \quad (9.17)$$

По условию (9.15) интеграл (9.17) сходится.

Докажем, что выражение (9.16) дает искомый потенциал.

ШАГ 1. Непрерывность.

Величина

$$\varrho^*(p(x_i, \lambda)) = \varrho^* \left( \frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \dots + \frac{x_N^2}{a_N^2 + \lambda} \right)$$

при всех  $\lambda \geq 0$ ,  $(x_i) \in \mathbb{R}^N$  непрерывна и ограничена. Следовательно,  $V$  непрерывна во всем пространстве  $\mathbb{R}^N$ .

ШАГ 2. Уравнение Пуассона (1.6).

Найдем действие оператора Лапласа на функцию (9.16).

Опираясь на (1.4), с учетом  $\varrho^{*'}(p) = -\varrho(p)$  вычислим сначала

$$\begin{aligned} -\Delta \varrho^*(p) &= 4 \varrho'(p) \left[ \frac{x_1^2}{(a_1^2 + \lambda)^2} + \dots + \frac{x_N^2}{(a_N^2 + \lambda)^2} \right] + \\ &+ 2 \varrho(p) \left[ \frac{1}{a_1^2 + \lambda} + \dots + \frac{1}{a_N^2 + \lambda} \right], \end{aligned}$$

что можно представить в форме

$$\frac{\Delta \varrho^*(p)}{g(\lambda)} = 4 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{\varrho(p)}{g(\lambda)} \right]. \quad (9.18)$$

В точках гладкости плотности как функции от  $x_i$  допустимо двукратное дифференцирование под знаком интеграла (9.16). Принимая во внимание (9.18), получим

$$\Delta V = 4\pi A \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{\varrho(p)}{g(\lambda)} \right] d\lambda = -4\pi \varrho(t),$$

что и требовалось.

ШАГ 3. Асимптотика на бесконечности.

Как и в примере 8.5.1, мы установим ее при добавочном условии

$$\varrho^*(t) \leq \begin{cases} B, & \text{если } t \leq 1, \\ Bt^{-N/2+1-\sigma}, & \text{если } t \geq 1. \end{cases} \quad (9.19)$$

Условие (9.19) выполнено, если тело  $T$  ограничено, или  $\varrho(t)$  убывает со скоростью  $t^{-N/2-\sigma}$ .

Из (9.19) следует

$$\varrho^*(p(x_i, \lambda)) \leq \begin{cases} B, & \text{если } \lambda \geq r^2 - a_1^2, \\ B(p(x_i, \lambda))^{-N/2+1-\sigma}, & \text{если } \lambda \leq r^2 - a_1^2. \end{cases}$$

Здесь принято, что  $a_i$  расположены в убывающем порядке, что не ограничивает общности. Интеграл (9.16) оценивается сверху разбиением промежутка интегрирования на два

$$B \int_0^{r^2-a_1^2} p^{-N/2+1-\sigma} \frac{d\lambda}{g(\lambda)} + B \int_{r^2-a_1^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{g(\lambda)}. \quad (9.20)$$

Ограничение для первого из интегралов (9.20):

$$\begin{aligned} \int_0^{r^2-a_1^2} \left( \frac{r^2}{a_1^2 + \lambda} \right)^{-N/2+1-\sigma} \frac{d\lambda}{g(\lambda)} &\leq r^{-N+2-2\sigma} \left( \frac{a_1}{a_N} \right)^N \times \\ &\times \int_0^{r^2-a_1^2} (a_1^2 + \lambda)^{\sigma-1} d\lambda = \frac{r^{-N+2}}{\sigma} \left( \frac{a_1}{a_N} \right)^N \left( 1 - \frac{a_1^{2\sigma}}{r^{2\sigma}} \right). \end{aligned}$$

Ограничение для второго:

$$\int_{r^2-a_1^2}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_N^2 + \lambda)^{N/2}} = \frac{2}{N-2} (r^2 + a_N^2 - a_1^2)^{1-N/2} \leq \frac{2^{N/2}}{N-2} r^{2-N}$$

при  $r^2 \geq 2(a_1^2 - a_N^2)$ . Итак, при  $r \rightarrow \infty$

$$V(x, y, z) \leq \frac{C}{r^{N-2}},$$

что согласуется с асимптотикой (2.31). Таким образом, функция (9.16) представляет искомый потенциал.

Мы видим, что  $N$ -мерный случай практически не отличается от трехмерного. Поэтому мы можем не столь подробно останавливаться на случаях конечного и однородного эллипсоида.

**Пример 9.4.2.** Пусть  $T$  — сплошной эллипсоид, ограниченный поверхностью (9.12). Для него  $\varrho$  отлично от нуля лишь при  $0 \leq t \leq 1$ . Теперь

$$M = \frac{A\pi_N}{2} \int_0^1 t^{(N-2)/2} \varrho(t) dt, \quad (9.21)$$

а для  $t \in [0, 1]$

$$\varrho^*(t) = \int_t^1 \varrho(t') dt'. \quad (9.22)$$

Обе функции  $\varrho(t)$ ,  $\varrho^*(t)$  равны нулю для  $t > 1$ .

Потенциал  $T$  дается формулой

$$V(x_i) = \pi A \int_u^\infty \frac{\varrho^*(p) d\lambda}{g(\lambda)}. \quad (9.23)$$

Здесь  $u = 0$  для внутреннего потенциала; для внешнего  $u = u(x_i)$  — положительный корень уравнения

$$p(x_i, u) = 1. \quad (9.24)$$

Существование и единственность решения (9.24) для точки  $Q(x_i)$ , лежащей вне эллипсоида  $T$ , следует из  $p(x_i, 0) > 1$ ,  $p(x_i, \infty) = 0$ ,  $\partial p(x_i, s)/\partial \lambda < 0$  при  $0 \leq \lambda < \infty$ . На самом эллипсоиде  $u = 0$ .

**Пример 9.4.3.** Пусть  $T$  — эллипсоид предыдущего примера с постоянной плотностью. Теперь

$$\varrho = \text{const}, \quad \varrho^*(t) = (1 - t)\varrho, \quad (9.25)$$

$$M = \frac{A\pi N}{N}\varrho. \quad (9.26)$$

Потенциал  $T$  дается формулой

$$V(x_i) = \pi A \varrho \int_u^\infty \frac{1 - p(x_i, \lambda)}{g(\lambda)} d\lambda. \quad (9.27)$$

Здесь  $u = 0$  для внутреннего потенциала; для внешнего  $u = u(x_i)$  — положительный корень уравнения (9.24).

Как видно, внутренний потенциал — квадратичная функция координат

$$V = A_0 - A_1 x_1^2 - \dots - A_N x_N^2. \quad (9.28)$$

Коэффициенты  $A_i$  выражаются через гиперэллиптические интегралы и зависят от параметров  $a_i$ . Внешний потенциал выражается через гиперэллиптические интегралы, аргументы которых — сложные функции декартовых координат.

## Глава 10

# Вспомогательные математические формулы

### 10.1 Ряды

Ряд Пуассона и связанные с ним разложения (*Фихтенгольц, 1997a*, стр. 440, 461)

$$\frac{1 - z \cos \theta}{1 - 2z \cos \theta + z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta z^n, \quad (10.1)$$

$$\frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos \theta + z^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta z^n, \quad (10.2)$$

$$\ln(1 - 2z \cos \theta + z^2) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos n\theta}{n} z^n \quad (10.3)$$

сходятся абсолютно и равномерно при  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $z \in [-r, r]$  для любого положительного  $r < 1$ .

Так же сходится ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2z \cos \theta + z^2}} = g_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} g_n(z) z^n \cos n\theta. \quad (10.4)$$

Здесь

$$g_n(z) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} F\left(\frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}, n + 1, z^2\right), \quad (10.5)$$



где  $F$  — гипергеометрическая функция. В частности,  $g_0$  пропорционален полному эллиптическому интегралу

$$g_0(z) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right) = \frac{2}{\pi} K(z). \quad (10.6)$$

Разложения (10.1)–(10.4) легко получить, представляя квадратный трехчлен в виде

$$1 - 2z \cos \theta + z^2 = (1 - ze^{i\theta})(1 - ze^{-i\theta})$$

и пользуясь биномиальным рядом.

Рекуррентные соотношения Гаусса между смежными гипергеометрическими функциями (*Градштейн, Рыжик, 1971, § 9.137*) позволяют выразить все  $g_n$  через полные эллиптические интегралы первого и второго рода (см. раздел 10.4.1). Например,

$$\begin{aligned} 2z g_1(z) &= z F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, z^2\right) = \\ &= \frac{2}{z} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right) - \frac{2}{z} F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z^2\right), \end{aligned}$$

так что

$$2z g_1(z) = \frac{4}{\pi z} [K(z) - E(z)]. \quad (10.7)$$

Коэффициенты разложений (10.1)–(10.3) являются ограниченными. Для (10.5) это не так. Сумма первых двух аргументов гипергеометрической функции равна третьему, что влечет логарифмическую особенность. Оценим ее количественно. Пусть

$$g_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{2m},$$

где

$$a_m = \frac{\Gamma(m+1/2)\Gamma(n+m+1/2)}{\pi\Gamma(m+1)\Gamma(n+m+1)}.$$

Образуем для  $m \geq 1$  отношение

$$\frac{(m+1)a_{m+1}}{ma_m} = \frac{m^2 + (n+1)m + (n+1/2)/2}{m^2 + (n+1)m} > 1,$$

поэтому  $ma_m$  возрастает,

$$ma_m \leq \lim ma_m = 1/\pi,$$

где в конце использованы асимптотические формулы для гамма-функции. Таким образом,

$$g_n(z) < a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{2m}}{\pi m}.$$

Окончательно, при  $-1 < z < 1$

$$0 < a_0 \leq g_n(z) < a_0 - \frac{1}{\pi} \ln(1 - z^2), \quad (10.8)$$

где равенство достигается лишь при  $z = 0$ .

## 10.2 Неопределенные интегралы

Справедливость приведенных ниже формул устанавливается дифференцированием. Параметры  $a, b, c, z, \theta, A, B$  и независимая переменная  $t$  принимают произвольные вещественные, а  $n$  — целые неотрицательные значения, если не оговорено противное. Приводится одна из *непрерывных* первообразных (проверьте!).

1°. Обозначим

$$I_1(n) = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n+1/2}}, \quad I_2(n) = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n}, \quad (10.9)$$

считая  $a \neq 0$ . Дифференцированием проверяются рекуррентности

$$(2n + 1)a^2 I_1(n + 1) = \frac{t}{(t^2 + a^2)^{n+1/2}} + 2n I_1(n), \quad (10.10)$$

$$2na^2 I_2(n + 1) = \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} + (2n - 1) I_2(n) \quad (10.11)$$

и база

$$I_1(0) = \ln \left( t + \sqrt{t^2 + a^2} \right), \quad I_2(0) = t, \quad I_2(1) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}. \quad (10.12)$$

Отсюда при  $n \geq 1$

$$2n I_1(n) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}} \times \\ \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2n(2n-2) \cdots (2n-2k)}{(2n-1)(2n-3) \cdots (2n-2k-1) a^{2k+2} (t^2 + a^2)^{n-k-1}}, \quad (10.13)$$

$$I_2(n) = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!! a^{2n-1}} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \\ + \frac{t}{2n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3) \cdots (2n-2k+1)}{(2n-2) \cdots (2n-2k) a^{2k} (t^2 + a^2)^{n-k}}. \quad (10.14)$$

Как обычно, пустая сумма считается нулем и  $(-1)!! = 0!! = 1$ .

2°.

$$2 \int \sqrt{t^2 + a^2} dt = t\sqrt{t^2 + a^2} + a^2 \ln(t + \sqrt{t^2 + a^2}). \quad (10.15)$$

3°.

$$\int \left( \frac{A}{t+a} + \frac{B}{t+b} \right) \frac{dt}{\sqrt{(t+a)(t+b)}} = \\ = \frac{2A}{a-b} \sqrt{\frac{t+b}{t+a}} - \frac{2B}{a-b} \sqrt{\frac{t+a}{t+b}} \quad (10.16)$$

при  $a \neq b$ ,  $t < \min\{-a, -b\}$  или  $t > \max\{-a, -b\}$ .

4°.

$$\int h(t) t dt = \frac{1}{3} h^3 + \\ + \frac{a \cos \theta}{2} [(t - a \cos \theta)h + a^2 \sin^2 \theta \ln(t - a \cos \theta + h)], \quad (10.17)$$

где  $h(t) = \sqrt{t^2 - 2at \cos \theta + a^2}$ . Второе слагаемое в квадратных скобках стремится к нулю при  $a \sin \theta \rightarrow 0$ . Функция  $h(t)$  вещественно-аналитична при всех  $t$ , если  $\cos \theta \neq \pm 1$ . В противном случае она

непрерывна при всех  $t$ , но имеет излом при  $t = \pm a$ , тогда как в этом случае правая часть (10.17) — гладкая при всех  $t$ , но имеет разрыв второй производной.

5°.

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}{1 + t^2} dt = b \ln \left( \sqrt{a^2 + b^2 t^2} + bt \right) + f(t), \quad (10.18)$$

где

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 t^2}}, & \text{если } b^2 \leq a^2, \\ \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2} \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2 t^2} - t\sqrt{b^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 t^2} + t\sqrt{b^2 - a^2}}, & \text{если } b^2 \geq a^2 > 0. \end{cases}$$

Обе части (10.18) вещественно-аналитичны при всех  $t$ .

6°.

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + t^2}}{b^2 + t^2} dt = \ln \left( \sqrt{a^2 + t^2} + t \right) + g(t), \quad (10.19)$$

где

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{a^2 - b^2}}{b\sqrt{a^2 + t^2}}, & \text{если } 0 < b^2 \leq a^2, \\ \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{2b} \ln \frac{b\sqrt{a^2 + t^2} - t\sqrt{b^2 - a^2}}{b\sqrt{a^2 + t^2} + t\sqrt{b^2 - a^2}}, & \text{если } b^2 \geq a^2 > 0. \end{cases}$$

7°. Нижеследующие формулы (10.20)–(10.22) справедливы при  $a > c \geq 0$ ,  $t > -c^2$ ; формулы (10.23)–(10.25) — при  $c > a \geq 0$ ,  $t > -a^2$ .

$$\int \frac{dt}{(a^2 + t)\sqrt{c^2 + t}} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c^2 + t}{a^2 - c^2}}. \quad (10.20)$$

$$\int \frac{dt}{(a^2 + t)^2 \sqrt{c^2 + t}} = \frac{\sqrt{c^2 + t}}{(a^2 - c^2)(a^2 + t)} + \frac{1}{(a^2 - c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c^2 + t}{a^2 - c^2}}. \quad (10.21)$$

$$\int \frac{dt}{(a^2+t)(c^2+t)^{3/2}} = -\frac{2}{(a^2-c^2)\sqrt{c^2+t}} - \frac{2}{(a^2-c^2)^{3/2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{c^2+t}{a^2-c^2}}. \quad (10.22)$$

$$\int \frac{dt}{(a^2+t)\sqrt{c^2+t}} = \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2}} \ln \frac{\sqrt{c^2+t} - \sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{c^2+t} + \sqrt{c^2-a^2}}. \quad (10.23)$$

$$\int \frac{dt}{(a^2+t)^2\sqrt{c^2+t}} = -\frac{\sqrt{c^2+t}}{(c^2-a^2)(a^2+t)} - \frac{1}{2(c^2-a^2)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{c^2+t} - \sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{c^2+t} + \sqrt{c^2-a^2}}. \quad (10.24)$$

$$\int \frac{dt}{(a^2+t)(c^2+t)^{3/2}} = \frac{2}{(c^2-a^2)\sqrt{c^2+t}} + \frac{1}{(c^2-a^2)^{3/2}} \ln \frac{\sqrt{c^2+t} - \sqrt{c^2-a^2}}{\sqrt{c^2+t} + \sqrt{c^2-a^2}}. \quad (10.25)$$

8°.

$$\int \ln(t^2+a^2) dt = t \ln(t^2+a^2) - 2t + 2a \operatorname{arctg} \frac{t}{a}. \quad (10.26)$$

Формулу (10.26) можно считать верной и при  $a = 0$ , поскольку арктангенс ограничен.

9°.

$$2 \int t \ln(t^2+a) dt = (t^2+a) \ln(t^2+a) - t^2. \quad (10.27)$$

10°. Следующую первообразную мы разобьем для облегчения контроля на два слагаемых

$$\int \ln(a + \sqrt{t^2+b^2}) dt = F_1(t) + F_2(t) \quad (10.28)$$

при  $b \geq |a| > 0$ . Здесь

$$F_1(t) = t \ln \left( a + \sqrt{t^2 + b^2} \right) + a \ln \left( t + \sqrt{t^2 + b^2} \right) - t,$$

$$F_2(t) = 2\sqrt{b^2 - a^2} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{b^2 - a^2}}{(b+a)(b + \sqrt{t^2 + b^2})},$$

так что

$$F_1'(t) = \ln \left( a + \sqrt{t^2 + b^2} \right) - \frac{b^2 - a^2}{(a + \sqrt{t^2 + b^2}) \sqrt{t^2 + b^2}},$$

$$F_2'(t) = \frac{b^2 - a^2}{(a + \sqrt{t^2 + b^2}) \sqrt{t^2 + b^2}}.$$

Поскольку арктангенс ограничен, можно положить  $F_2(t) \equiv 0$  при  $a = \pm b$ , так что  $F_2(t)$  вещественно-аналитична при всех  $t$ . Функция  $F_1(t)$  вещественно-аналитична при всех  $t$  для  $a \neq -b$ . Если  $a = -b$ , то  $F_1(t)$  остается непрерывной при всех  $t$ , хотя ее производная разрывна в нуле:

$$F_1'(t) \sim \ln \frac{t^2}{2b} \quad \text{при } t \rightarrow 0.$$

11°.

$$\begin{aligned} \int \left[ \frac{A}{(t+a)^2} + \frac{B}{(t+b)^2} \right] \ln \left( \sqrt{t+a} + \sqrt{t+b} \right) dt = \\ = - \left( \frac{A}{t+a} + \frac{B}{t+b} \right) \ln \left( \sqrt{t+a} + \sqrt{t+b} \right) + \\ + \frac{A}{a-b} \sqrt{\frac{t+b}{t+a}} - \frac{B}{a-b} \sqrt{\frac{t+a}{t+b}} \end{aligned} \quad (10.29)$$

при  $a \neq b$ ,  $t > \max\{-a, -b\}$ .

12°.

$$\begin{aligned} \int \cos t \ln (a^2 + b^2 - 2ab \cos t) dt = \sin t \ln (a^2 + b^2 - 2ab \cos t) - \\ - \frac{b}{a} t - \sin t + \frac{a^2 - b^2}{ab} \operatorname{arctg} \frac{b \sin t}{a - b \cos t} \end{aligned} \quad (10.30)$$

при  $0 < |b| < |a|$ . При  $a \neq 0$ ,  $b \rightarrow 0$  арктангенс эквивалентен  $(b/a) \sin t$ . При  $|b| \rightarrow |a|$  арктангенс остается ограниченным, и последнее слагаемое справа в (10.30) стремится к нулю.

Таким образом, (10.30) справедлива при  $0 \leq |b| \leq |a|$ ,  $a \neq 0$ .

**13°.**

$$\begin{aligned} \int \sin t \ln(a^2 + b^2 - 2ab \cos t) dt &= \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cos t}{2ab} \ln(a^2 + b^2 - 2ab \cos t) + \cos t \end{aligned} \quad (10.31)$$

при  $ab \neq 0$ .

**14°.**

$$\int \frac{\ln \cos t}{\cos^2 t} dt = \operatorname{tg} t (1 + \ln \cos t) - t \quad (10.32)$$

при  $-\pi/2 < t < \pi/2$ .

**15°.**

$$\begin{aligned} 2 \int t \operatorname{arctg} \frac{a}{t} dt &= at + (t^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{a}{t} - \frac{\pi}{2} a^2 \operatorname{sign}(at) = \\ &= at - (t^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{\pi}{2} t^2 \operatorname{sign}(at) = \\ &= at + t^2 \operatorname{arctg} \frac{a}{t} - a^2 \operatorname{arctg} \frac{t}{a}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

При  $a \neq 0$  правая часть (10.33) непрерывна при всех  $t$  вместе с первой производной, имеющей излом в нуле; при  $a \rightarrow 0$  правая часть стремится к нулю вместе с производной.

**16°.**

$$\begin{aligned} 2 \int t \operatorname{arctg} \frac{at+b}{t} dt &= \frac{b}{a^2+1} t - \\ &- \frac{ab^2}{(a^2+1)^2} \ln [(a^2+1)t^2 + 2abt + b^2] + \\ &+ t^2 \operatorname{arctg} \frac{at+b}{t} + \frac{a^2-1}{(a^2+1)^2} b^2 \operatorname{arctg} \frac{(a^2+1)t+ab}{b}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

При  $b = 0$  формула (10.34) становится тривиальной. При  $b \neq 0$  выражение под знаком логарифма всегда положительно. Правая часть (10.34) непрерывна при  $t = 0$  вместе с производной; вторая производная терпит разрыв при  $t = 0$ .

### 10.3 Определенные интегралы

1°. Из (10.1)–(10.3) следует при  $-1 < z < 1$

$$\int_0^\pi \frac{1 - z \cos \theta}{1 - 2z \cos \theta + z^2} d\theta = \int_0^\pi \frac{1 - z^2}{1 - 2z \cos \theta + z^2} d\theta = \pi, \quad (10.35)$$

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2z \cos \theta + z^2) d\theta = 0, \quad (10.36)$$

а при  $n \geq 1$

$$\int_0^\pi \frac{2(1 - z \cos \theta) \cos n\theta}{1 - 2z \cos \theta + z^2} d\theta = \int_0^\pi \frac{(1 - z^2) \cos n\theta}{1 - 2z \cos \theta + z^2} d\theta = \pi z^n, \quad (10.37)$$

$$\int_0^\pi \cos n\theta \ln(1 - 2z \cos \theta + z^2) d\theta = -\frac{\pi}{n} z^n. \quad (10.38)$$

Сумма квадратов коэффициентов Фурье левой части (10.3) как функция от  $z$  непрерывна на отрезке  $-1 \leq z \leq 1$ . Поэтому формулы (10.36)–(10.38) справедливы при  $-1 \leq z \leq 1$ .

2°. Формулы (10.35), (10.37) легко обобщаются:

$$\int_0^\pi \frac{a(a - b \cos \theta)}{a^2 - 2ab \cos \theta + b^2} d\theta = \int_0^\pi \frac{(a^2 - b^2)}{a^2 - 2ab \cos \theta + b^2} d\theta = \pi, \quad (10.39)$$

а при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{2a(a - b \cos \theta) \cos n\theta}{a^2 - 2ab \cos \theta + b^2} d\theta &= \\ &= \int_0^\pi \frac{(a^2 - b^2) \cos n\theta}{a^2 - 2ab \cos \theta + b^2} d\theta = \pi z^n. \end{aligned} \quad (10.40)$$

Здесь  $a > |b|$ ,  $z = b/a$ .



3°. Формулы (10.36), (10.38) обобщаются еще дальше

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2ab \cos \theta + b^2) d\theta = \pi \ln \xi^2, \quad (10.41)$$

а при  $n \geq 1$

$$\int_0^\pi \cos n\theta \ln(a^2 - 2ab \cos \theta + b^2) d\theta = -\frac{\pi}{n} \eta^n. \quad (10.42)$$

Здесь  $a, b$  — неотрицательные числа, по крайней мере одно из которых отлично от нуля;

$$\xi = \max\{a, b\}, \quad \eta = \min\left\{\frac{b}{a}, \frac{a}{b}\right\}.$$

4°. Пусть  $a > 0, |b| \leq a$ . Тогда

$$a - b \cos \theta = c(1 - 2z \cos \theta + z^2)$$

при

$$c = \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}, \quad z = \frac{b}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \quad |z| \leq 1,$$

что позволяет модифицировать предыдущие формулы. Например,

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a - b \cos \theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad (10.43)$$

$$\int_0^\pi \cos n\theta \ln(a - b \cos \theta) d\theta = \begin{cases} \pi \ln c, & \text{если } n = 0, \\ -\frac{\pi}{n} z^n, & \text{если } n \geq 1. \end{cases} \quad (10.44)$$

5°. Следующее равенство является прямым следствием разложения (10.4)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta d\theta}{\sqrt{1 - 2z \cos \theta + z^2}} &= \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{\cos n\theta d\theta}{\sqrt{1 - 2z \cos \theta + z^2}} = 2\pi g_n(z) z^n, \end{aligned} \quad (10.45)$$

где  $n$  — целое положительное,  $g_n$  определяется формулой (10.5).  
В частности,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2z \cos \theta + z^2}} = 2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2z \cos \theta + z^2}} = 4K(z). \quad (10.46)$$

**6°.** Обозначим через  $J_1(n)$ ,  $J_2(n)$  интегралы (10.9), взятые вдоль всей оси  $t$ . Поскольку  $J_1(0)$  расходится, введем интеграл  $J_1(z, 0)$  в пределах от  $-z$  до  $z$ . Из (10.12), (10.13), (10.14) следует

$$J_1(z, 0) = 2 \ln \frac{z + \sqrt{z^2 + a^2}}{|a|}, \quad (10.47)$$

$$J_1(n) = \frac{2(2n-2)!!}{(2n-1)!! a^{2n}}, \quad J_2(n) = \frac{(2n-3)!! \pi}{(2n-2)!! |a|^{2n-1}}, \quad n \geq 1. \quad (10.48)$$

**7°.**

$$\begin{aligned} \int_c^\infty \left[ \frac{A}{(t+a)^2} + \frac{B}{(t+b)^2} \right] \ln(\sqrt{t+a} + \sqrt{t+b}) dt = \\ = \left( \frac{A}{c+a} + \frac{B}{c+b} \right) \ln(\sqrt{c+a} + \sqrt{c+b}) + \\ + \frac{1}{\sqrt{c+a} + \sqrt{c+b}} \left( \frac{A}{\sqrt{c+a}} + \frac{B}{\sqrt{c+b}} \right). \end{aligned} \quad (10.49)$$

при  $c > \max\{-a, -b\}$ . Интеграл получен подстановкой пределов в (10.29) с последующим элементарным преобразованием.

**8°.** Вычислим интеграл

$$J_3 = \int_0^\pi \ln[(a \cos t - b)^2 + c^2] dt, \quad (10.50)$$

предполагая, что хотя бы одно из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  отлично от нуля. Представим выражение в квадратных скобках в виде произведения

$$(a \cos t - b)^2 + c^2 = (A + B \cos t + C \sin t)(A + B \cos t - C \sin t).$$

Сравнивая коэффициенты при  $t = 0, \pi$ , найдем  $A, B$ . Затем определим  $C$ . Получим

$$\begin{aligned} 2A &= \sqrt{(b-a)^2 + c^2} + \sqrt{(b+a)^2 + c^2}, \\ 2B &= \sqrt{(b-a)^2 + c^2} - \sqrt{(b+a)^2 + c^2}, \\ 2C^2 &= a^2 - b^2 - c^2 + \sqrt{[(b-a)^2 + c^2][(b+a)^2 + c^2]}. \end{aligned} \quad (10.51)$$

Легко проверяется, что  $C^2 \geq 0$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^\pi [\ln(A + B \cos t + C \sin t) + \ln(A + B \cos t - C \sin t)] dt = \\ &= \int_{-\pi}^\pi \ln(A + B \cos t + C \sin t) dt. \end{aligned}$$

Переходя к амплитуде и фазе и замечая, что интеграл по периоду от начальной фазы не зависит, придем к выражению

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^{2\pi} \ln \left( A + \sqrt{B^2 + C^2} \cos t \right) dt = \\ &= 2 \int_0^\pi \ln \left( A + \sqrt{B^2 + C^2} \cos t \right) dt. \end{aligned}$$

В силу (10.51)

$$B^2 + C^2 = a^2, \quad A > 0, \quad a^2 \leq A^2.$$

Поэтому применима формула (10.44).

Окончательно,

$$J_3 = 2\pi \ln \frac{A + \sqrt{A^2 - a^2}}{2}, \quad (10.52)$$

где

$$\begin{aligned} 2A &= \sqrt{(b-a)^2 + c^2} + \sqrt{(b+a)^2 + c^2}, \\ 2(A^2 - a^2) &= b^2 + c^2 - a^2 + \sqrt{[(b-a)^2 + c^2][(b+a)^2 + c^2]}. \end{aligned}$$

9°. Вычислим интеграл

$$J_4 = \int_0^\pi \frac{dt}{\sqrt{(a \cos t - b)^2 + c^2}} \quad (10.53)$$

при  $c \neq 0$ . Для симметризации применим преобразование, переводящее отрезок  $[0, \pi]$  в себя

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{\cos \varphi + \gamma}{1 + \gamma \cos \varphi}, & \sin t &= \frac{\sqrt{1 - \gamma^2} \sin \varphi}{1 + \gamma \cos \varphi}, \\ \frac{dt}{d\varphi} &= \frac{\sqrt{1 - \gamma^2}}{1 + \gamma \cos \varphi}, \end{aligned} \quad (10.54)$$

где параметр  $\gamma$  подчинен условию  $|\gamma| < 1$ . Подстановка (10.54) известна в небесной механике как связь истинной и эксцентрической аномалии (Субботин, 1968).

Приходим к формуле

$$J_4 = B \int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{B_1 + 2B_2 \cos \varphi + B_3 \cos^2 \varphi}} \quad (10.55)$$

при

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{1 - \gamma^2}, & B_1 &= (b - a\gamma)^2 + c^2, \\ B_2 &= (b - a\gamma)(b\gamma - a) + c^2\gamma, & B_3 &= (b\gamma - a)^2 + c^2\gamma^2. \end{aligned}$$

Определим  $\gamma$  из условия  $B_2 = 0$ . Достаточно выбрать меньший по модулю из двух корней соответствующего квадратного уравнения, произведение которых равно единице

$$\gamma = \frac{c^2 + b^2 + a^2 - \sqrt{(c^2 + b^2 + a^2)^2 - 4a^2b^2}}{2ab}. \quad (10.56)$$

При малых и нулевых  $a, b$  следует раскрыть неопределенность

$$\gamma = \frac{2ab}{c^2 + b^2 + a^2 + \sqrt{(c^2 + b^2 + a^2)^2 - 4a^2b^2}}. \quad (10.57)$$

По выбору знака перед корнем величина  $\gamma$  по модулю не превосходит единицы. Легко показать, что значение 1 не достигается. Поэтому  $0 \leq \gamma < 1$ , причем  $\gamma = 0$  лишь при  $ab = 0$ . Отсюда следует  $B_1 > 0$ ,  $B_3 \geq 0$ , причем  $B_3 = 0$  лишь при  $a = 0$ .

Заменяя  $c^2$  в формулах для  $B_1, B_3$  его выражением, следующим из уравнения  $B_2 = 0$ , получим

$$B_1 = \frac{a}{\gamma} (1 - \gamma^2)(b - a\gamma), \quad B_3 = a(1 - \gamma^2)(a - b\gamma),$$

$$B_1 + B_3 = \frac{ab(1 - \gamma^2)^2}{\gamma}.$$

Подынтегральная функция в (10.55) при  $B_2 = 0$  четна относительно точки  $\varphi = \pi/2$ . Поэтому интеграл можно брать в пределах от 0 до  $\pi/2$ . Заменяя  $\cos^2 \varphi$  на  $1 - \sin^2 \varphi$ , сведем (10.55) к полному эллиптическому интегралу. В результате

$$J_4 = B_4 K(k), \quad (10.58)$$

где

$$B_4 = 2\sqrt{\frac{\gamma}{ab(1 - \gamma^2)}}, \quad k^2 = \frac{\gamma(a - b\gamma)}{b(1 - \gamma^2)}. \quad (10.59)$$

Поскольку  $k^2 = B_3/(B_1 + B_3)$ , то  $0 \leq k^2 < 1$ . Согласно (10.57) при  $ab = 0$  формулы (10.59) принимают вид

$$B_4 = \frac{2}{\sqrt{c^2 + b^2 + a^2}}, \quad k^2 = \frac{a^2}{c^2 + b^2 + a^2}, \quad (10.60)$$

что можно получить непосредственно из (10.53).

## 10.4 Эллиптические интегралы

Эллиптическим называют интеграл от выражения, при составлении которого использованы рациональные операции и извлечение единственного (хотя бы и повторяющегося) квадратного корня из многочлена третьей или четвертой степени от переменной интеграции  $t$ . Различие между третьей и четвертой степенью не принципиально. Аналогичные интегралы с корнем из многочлена первой или второй степени от  $t$  элементарны. Иногда и эллиптический интеграл выражается элементарно, но это — исключительный случай. В то же время эллиптические интегралы часто встречаются во многих областях математики. Поэтому есть смысл наряду с элементарными функциями рассматривать в качестве допустимых простых функций эллиптические интегралы. Последние можно свести к трем стандартным I, II и III рода в форме, предложенной К.Якоби (1804–1851).

### 10.4.1 Эллиптические интегралы I и II рода

Эллиптическими интегралами I и II рода называют функции двух переменных

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x, k) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \\ \tilde{E}(x, k) &= \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt,\end{aligned}\tag{10.61}$$

соответственно. Как правило, переменные считаются изменяющимися в прямоугольнике

$$0 \leq k \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

но иногда рассматривают и другие множества определения. Числа  $k$  и  $k' = \sqrt{1-k^2}$  именуют модулем и дополнительным модулем, переменную  $x$  — алгебраическим аргументом.

При  $k = 0, 1$  интегралы элементарны

$$\begin{aligned}\tilde{F}(x, 0) &= \tilde{E}(x, 0) = \arcsin x, & \tilde{E}(x, 1) &= x, \\ \tilde{F}(x, 1) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x},\end{aligned}\tag{10.62}$$

причем в последнем случае следует ограничить область изменения  $x$  интервалом  $-1 < x < 1$ .

При  $0 < k < 1$  функции  $\tilde{F}$ ,  $\tilde{E}$  от  $x$  не элементарны.

Кроме алгебраической используется и тригонометрическая форма эллиптических интегралов

$$\begin{aligned}F(\varphi, k) &= \tilde{F}(\sin \varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}, \\ E(\varphi, k) &= \tilde{E}(\sin \varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi} d\psi.\end{aligned}\tag{10.63}$$

Угол  $\varphi$  обычно ограничивают отрезком  $[-\pi/2, \pi/2]$ , но можно считать (за исключением случая  $k = 1$ )  $-\infty < \varphi < \infty$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Отображение  $x = \sin \varphi$  взаимно-однозначно при  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . При выходе  $\varphi$  за стандартный отрезок это не так, и формулы (10.63) нуждаются в очевидных дополнительных слагаемых.

Формулы (10.62) переходят в

$$\begin{aligned} F(\varphi, 0) &= E(\varphi, 0) = \varphi, & E(\varphi, 1) &= \sin \varphi, \\ F(\varphi, 1) &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

Укажем простейшие формулы приведения. Если модуль  $p$  больше единицы, следует сделать подстановку  $\tau = pt$ ; если вместо  $1 - k^2 t^2$  под корнем стоит  $1 + p^2 t^2$  — подстановку  $\tau = \sqrt{1 - t^2}$ . В результате

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-p^2 t^2)}} &= k \tilde{F}(y, k), \\ \int_0^x \sqrt{\frac{1-p^2 t^2}{1-t^2}} dt &= \frac{1}{k} \tilde{E}(y, k) - \frac{1-k^2}{k} \tilde{F}(y, k), \end{aligned} \quad (10.65)$$

где

$$\begin{aligned} k &= 1/p, & y &= px, & |x| &\leq 1/p; \\ \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+p^2 t^2)}} &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left[ \tilde{F}(1, k) - \tilde{F}(y, k) \right], \\ \int_0^x \sqrt{\frac{1+p^2 t^2}{1-t^2}} dt &= \sqrt{1+p^2} \left[ \tilde{E}(1, k) - \tilde{E}(y, k) \right], \end{aligned} \quad (10.66)$$

где

$$k = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, \quad y = \sqrt{1-x^2}.$$

Функции (10.61), (10.63) нечетны по  $x$ ,  $\varphi$ , четны по  $k$  и удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} F(\varphi + n\pi, k) &= F(\varphi, k) + 2n K(k), \\ E(\varphi + n\pi, k) &= E(\varphi, k) + 2n E(k), \end{aligned} \quad (10.67)$$

где введены *полные* эллиптические интегралы первого и второго рода

$$K(k) = \tilde{F}(1, k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad E(k) = \tilde{E}(1, k) = E\left(\frac{\pi}{2}, k\right). \quad (10.68)$$

Согласно (10.62)

$$K(0) = E(0) = \frac{\pi}{2}, \quad E(1) = 1, \quad K(1) = \infty. \quad (10.69)$$

Полные эллиптические интегралы являются гипергеометрическими функциями (*Градштейн, Рыжик, 1971*)

$$\frac{2}{\pi} K(k) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n}, \quad (10.70)$$

$$\frac{2}{\pi} E(k) = F\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \frac{k^{2n}}{2n-1}, \quad (10.71)$$

причем (10.70) сходится при  $-1 < k < 1$ , а (10.71) — при  $-1 \leq k \leq 1$ . Укажем еще разложения, пригодные в окрестности особой точки  $k = 1$ ,  $k' = 0$ :

$$\begin{aligned} K(k) &= \ln \frac{4}{k'} + \frac{1}{4} \left( \ln \frac{4}{k'} - 1 \right) k'^2 + \dots, \\ E(k) &= 1 + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{4}{k'} - \frac{1}{2} \right) k'^2 + \dots \end{aligned} \quad (10.72)$$

Дифференцируя под знаком интеграла, легко получить формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(\varphi, k)}{\partial k} &= -\frac{1}{k} F(\varphi, k) + \frac{1}{k(1-k^2)} E(\varphi, k) - \\ &\quad - \frac{k}{1-k^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}}, \end{aligned} \quad (10.73)$$

$$\frac{\partial E(\varphi, k)}{\partial k} = \frac{1}{k} E(\varphi, k) - \frac{1}{k} F(\varphi, k). \quad (10.74)$$

Эти соотношения справедливы и для полных эллиптических интегралов, причем последний член в (10.73) обращается в нуль

$$\begin{aligned} \frac{dK(k)}{dk} &= -\frac{1}{k} K(k) + \frac{1}{k(1-k^2)} E(k), \\ \frac{dE(k)}{dk} &= \frac{1}{k} [E(k) - K(k)]. \end{aligned} \quad (10.75)$$

Производные высших порядков последовательно получаются



из (10.73)–(10.75). В частности, для полных интегралов приходим к дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \left[ k(1-k^2) \frac{dK}{dk} \right] - kK &= 0, \\ (1-k^2) \frac{d}{dk} \left( k \frac{dE}{dk} \right) + kE &= 0. \end{aligned} \quad (10.76)$$

Приведем несколько часто встречающихся интегралов, сводящихся к стандартным эллиптическим. Ниже считаем  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $a^2 + b^2 > 0$ , а в дальнейшем рассмотрим и случай отрицательных значений  $a$  или  $b$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}} = \frac{2}{a+b} K(k), \quad (10.77)$$

$$\int_0^\pi \sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2} d\theta = 2(a+b) E(k), \quad (10.78)$$

где

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2}, \quad 0 \leq k \leq 1, \quad (10.79)$$

причем  $k = 0$  при  $ab = 0$ ,  $k = 1$  при  $a = b$ . Для доказательства достаточно сделать подстановку  $\theta = 2t$  с учетом  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 t$  и сослаться на формулы (10.63).

$$\int_0^\pi \frac{(a+b \cos \theta) d\theta}{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}} = \frac{a-b}{a} K(k) + \frac{a+b}{a} E(k). \quad (10.80)$$

Для доказательства достаточно заметить, что интеграл (10.80) есть частная производная от (10.78) по  $a$  и применить (10.74) с учетом

$$\frac{\partial k}{\partial a} = \frac{(b-a)k}{2a(a+b)}.$$

Комбинируя (10.77) и (10.80), получим

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}} = \frac{a+b}{ab} E(k) - \frac{a^2 + b^2}{ab(a+b)} K(k). \quad (10.81)$$

Пусть теперь  $a$ ,  $b$  подчинены лишь условию  $a^2 + b^2 > 0$ . Одновременное изменение знака  $a$  и  $b$  не меняет левых частей (10.77)

и (10.78). Не меняет их и изменение знака одного из параметров  $a$  и  $b$ , как показывает подстановка  $\theta = \pi - t$ . Поэтому равенства (10.77) и (10.78) остаются справедливыми, если справа  $a$  и  $b$  заменить на  $|a|$  и  $|b|$ .

Аналогичные рассуждения показывают, что (10.81) следует заменить на

$$\int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}} = \frac{|a| + |b|}{ab} E(k) - \frac{a^2 + b^2}{ab(|a| + |b|)} K(k), \quad (10.82)$$

а (10.80) на

$$\int_0^\pi \frac{(a + b \cos \theta) d\theta}{\sqrt{a^2 + 2ab \cos \theta + b^2}} = \frac{|a| - |b|}{a} K(k) + \frac{|a| + |b|}{a} E(k). \quad (10.83)$$

Во всех случаях

$$k^2 = \frac{4|ab|}{(|a| + |b|)^2}, \quad 0 \leq k \leq 1, \quad (10.84)$$

причем  $k = 0$  при  $ab = 0$ ,  $k = 1$  при  $|a| = |b|$ .

*Замечание.* Формулы (10.80)–(10.83) справедливы и при  $a = 0$ , или  $b = 0$ , если правые части считать пределами соответствующих выражений.

Существует еще много полезных соотношений в теории эллиптических интегралов I и II рода. Приведем два из них.

Соотношение Лежандра:

$$E(k') K(k) + E(k) K(k') - K(k) K(k') = \pi/2. \quad (10.85)$$

Преобразование Ландена. В первом из интегралов (10.63) совершим замену переменных

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{k + \cos 2\theta}{\sqrt{1 + 2k \cos 2\theta + k^2}}, & \sin \varphi &= \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{1 + 2k \cos 2\theta + k^2}}, \\ \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} &= \frac{1 + k \cos 2\theta}{\sqrt{1 + 2k \cos 2\theta + k^2}}, & d\varphi &= \frac{2(1 + k \cos 2\theta) d\theta}{1 + 2k \cos 2\theta + k^2}. \end{aligned}$$

В результате

$$F(\varphi, k) = 2 \int_0^\theta \frac{dt}{\sqrt{1 + 2k \cos 2t + k^2}}.$$

Остается положить  $\cos 2t = 1 - \sin^2 t$  и получить

$$F(\varphi, k) = \frac{2}{1+k} F(\theta, k^*), \quad (10.86)$$

где

$$k^* = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, \quad k = \left( \frac{k^*}{1 + \sqrt{1 - k^{*2}}} \right)^2.$$

Заметим, что  $d\varphi/d\theta > 0$ , и  $\varphi$  возрастает вместе с  $\theta$ . Значениям  $\theta = 0, \pi$  отвечают  $\varphi = 0, \pi/2$ , соответственно. Поэтому для полных интегралов (10.86) переходит в

$$K(k) = \frac{1}{1+k} K(k^*). \quad (10.87)$$

## 10.4.2 Эллиптические интегралы III рода

Квадратный корень из многочлена третьей и четвертой степени всегда можно привести к стандартному виду дробно-линейной подстановкой. При этом, вообще говоря, остается множителем рациональная дробь от переменной интегриации  $t$  и получается интеграл

$$\int \frac{P(t)}{Q(t)} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Если  $Q(t) \equiv 1$ , такой интеграл последовательным интегрированием по частям сводится к комбинации стандартных интегралов первого и второго рода, не считая некоторых элементарных добавок. Напротив, элементарные дроби, остающиеся после разложения  $P/Q$  за вычетом целой части, дают интегралы несколько другого сорта:

$$\int \frac{dt}{(t-c)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad (10.88)$$

$$\int \frac{dt}{(t^2 + 2pt + q)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Их называют эллиптическими интегралами третьего рода. Они зависят, помимо модуля и верхнего предела, еще от одного или двух параметров. Известно довольно много случаев, когда вычисление определенного интеграла третьего рода облегчается быстро сходящимся разложением по той или иной переменной. Но все это, как

и непосредственное численное интегрирование, мало специфично для таких интегралов. Специфические же формулы преобразования интегралов третьего рода не столь удобны из-за сравнительной громоздкости; несколько лучше дело обстоит с *полными* интегралами третьего рода, которые сводятся к полным и неполным интегралам первого и второго рода. Это приведение срабатывает для интегралов

$$\begin{aligned}\Pi(\nu, k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 + \nu \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \\ \Pi_s(\nu, k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t dt}{(1 + \nu \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}, \\ \Pi_c(\nu, k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t dt}{(1 + \nu \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},\end{aligned}\tag{10.89}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\nu, k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}{1 + \nu \sin^2 t} dt, \\ \Phi_s(\nu, k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}{1 + \nu \sin^2 t} dt, \\ \Phi_c(\nu, k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 t \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}{1 + \nu \sin^2 t} dt\end{aligned}\tag{10.90}$$

при  $\nu > -1$ , к которым сводится значительная часть практически встречающихся конкретных интегралов типа (10.88).

Любые две из трех функций  $\Pi$ ,  $\Pi_s$ ,  $\Pi_c$  и, соответственно,  $\Phi$ ,  $\Phi_s$ ,  $\Phi_c$  линейно выражаются через третью благодаря очевидным тождествам

$$\Pi_s + \Pi_c = \Pi, \quad \nu \Pi_s = K - \Pi,\tag{10.91}$$

$$\Phi_s + \Phi_c = \Phi, \quad \nu \Phi_s = E - \Phi.\tag{10.92}$$

Более того,  $\Phi$ -функции элементарными преобразованиями сводятся к  $\Pi$ -функциям

$$\begin{aligned}\Phi &= \Pi - k^2 \Pi_s, & \nu \Phi_s &= E - \Pi + k^2 \Pi_s, \\ \nu \Phi_c &= (1 + \nu) [\Pi - k^2 \Pi_s] - E.\end{aligned}\tag{10.93}$$

С помощью (10.91) справа можно исключить  $\Pi_s$  при  $\nu \neq 0$

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{\nu + k^2}{\nu} \Pi - \frac{k^2}{\nu} K, & \Phi_s &= -\frac{\nu + k^2}{\nu^2} \Pi + \frac{k^2}{\nu^2} K + \frac{1}{\nu} E, \\ \Phi_c &= \frac{(1 + \nu)(\nu + k^2)}{\nu^2} \Pi - \frac{k^2(1 + \nu)}{\nu^2} K - \frac{1}{\nu} E.\end{aligned}\quad (10.94)$$

При  $\nu \neq -k^2$  можно  $\Pi$  выразить через  $\Phi$ .

Выражение функций (10.89), (10.90) через эллиптические интегралы I и II рода громоздко и различается в разных промежутках изменения  $\nu$ . Для компактного представления результата введем временные обозначения

$$\begin{aligned}G_1(\varphi, k) &= \frac{\pi}{2} + [K(k) - E(k)] F(\varphi, k') - K(k) E(\varphi, k'), \\ G_2(\varphi, k) &= K(k) E(\varphi, k) - E(k) F(\varphi, k), \\ G_3(\varphi, k) &= \frac{\pi}{2} - G_1(\varphi, k).\end{aligned}\quad (10.95)$$

При  $k = 0$  с учетом (10.64), (10.69)

$$G_1(\varphi, 0) = \frac{\pi}{2}(1 - \sin \varphi), \quad G_2(\varphi, 0) = 0, \quad G_3(\varphi, 0) = \frac{\pi}{2} \sin \varphi. \quad (10.96)$$

Производные можно вычислить с помощью (10.73)–(10.75). В силу третьего из равенств (10.95) можно ограничиться функциями  $G_1$  и  $G_2$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_1}{\partial \varphi} &= \frac{k'^2 \sin^2 \varphi K(k) - E(k)}{\sigma'}, \\ \frac{\partial G_2}{\partial \varphi} &= \frac{\sigma^2 K(k) - E(k)}{\sigma}, \\ \frac{\partial G_1}{\partial k} &= \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{k \sigma'} [K(k) - E(k)], \\ \frac{\partial G_2}{\partial k} &= \frac{k \sin \varphi \cos \varphi}{k'^2 \sigma} E(k),\end{aligned}\quad (10.97)$$

где  $\sigma = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}$ ,  $\sigma' = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}$ .

Теперь мы в состоянии дать компактное выражение интересующих нас интегралов.

Пусть  $-1 < \nu < -k^2$ . Положим  $\nu = -(1 - k'^2 \sin^2 \theta)$ . Канонические интегралы третьего рода  $\Pi$ ,  $\Pi_s$ ,  $\Pi_c$ ,  $\Phi$  выразятся в виде

$$\begin{aligned}\Pi(\nu, k) &= K(k) + \frac{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}}{k'^2 \sin \theta \cos \theta} G_1(\theta, k), \\ \Pi_s(\nu, k) &= \frac{1}{k'^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} G_1(\theta, k), \\ \Pi_c(\nu, k) &= K(k) - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} G_1(\theta, k), \\ \Phi(\nu, k) &= K(k) + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} G_1(\theta, k).\end{aligned}\tag{10.98}$$

В руководствах интегралам III рода уделяется меньше внимания по сравнению с интегралами I и II рода. Более того, часто встречаются опечатки. Поэтому мы считаем своим долгом дать доказательство формул (10.98).

Проведем его в три этапа. Во-первых, проверяем тождества (10.91) и первое из тождеств (10.93), что элементарно и сводит задачу к доказательству одной (произвольной) из формул (10.98).

Во-вторых, проверяем одно из равенств (10.98) — например, первое — при  $k = 0$ . Правая часть согласно (10.96) равна

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\pi}{2} (1 - \sin \theta) = \frac{\pi}{2 \sin \theta}.$$

Левая часть вычисляется непосредственно

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 - \cos^2 \theta \sin^2 t} = \int_0^{\pi/2} \frac{2 dt}{2 - \cos^2 \theta + \cos^2 \theta \cos 2t} = \frac{\pi}{2 \sin \theta},$$

где в конце использовано (10.43).

В третьих, дифференцируя первую из формул (10.90), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \Phi(\nu, k)}{\partial k} = -k \Pi_s(\nu, k).\tag{10.99}$$

Проверим выполнение (10.99) для функций (10.98). Вычислим производную от правой части последней из формул (10.98) по  $k$ . Заметим, что  $\nu = -(1 - k'^2 \sin^2 \theta)$  постоянна. Поэтому следует считать  $\theta$  функцией от  $k$ ,  $d\nu = 0$ ,

$$\frac{d\theta}{dk} = \frac{k}{k'^2} \operatorname{tg} \theta, \quad \frac{\partial \Phi(\nu, k)}{\partial k} = -\frac{k}{k'^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} G_1(\theta, k),$$

что совпадает с  $-k \Pi_s(\nu, k)$  согласно второй из формул (10.98).

Пусть  $-k^2 < \nu < 0$ . Положим  $\nu = -k^2 \sin^2 \theta$ . Тогда

$$\begin{aligned}\Pi(\nu, k) &= K(k) + \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} G_2(\theta, k), \\ \Pi_s(\nu, k) &= \frac{1}{k^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} G_2(\theta, k), \\ \Pi_c(\nu, k) &= K(k) - \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}{k^2 \sin \theta \cos \theta} G_2(\theta, k), \\ \Phi(\nu, k) &= K(k) - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} G_2(\theta, k).\end{aligned}\tag{10.100}$$

Пусть, наконец,  $\nu > 0$ . Положим  $\nu = k^2 \operatorname{tg}^2 \theta$ . Тогда

$$\begin{aligned}\Pi(\nu, k) &= K(k) \cos^2 \theta + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} G_3(\theta, k), \\ k^2 \Pi_s(\nu, k) &= K(k) \cos^2 \theta - \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} G_3(\theta, k), \\ k^2 \Pi_c(\nu, k) &= -K(k) k'^2 \cos^2 \theta + \\ &\quad + \operatorname{ctg} \theta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta} G_3(\theta, k), \\ \Phi(\nu, k) &= \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} G_3(\theta, k).\end{aligned}\tag{10.101}$$

Доказательство (10.100), (10.101) проводится по той же схеме, что и доказательство (10.98).

Единственная трудность заключается в том, что при  $\nu > 0$  значение  $k = 0$  сопровождается значением  $\theta = \pi/2$ , что влечет неопределенность. Раскроем ее, полагая

$$\operatorname{tg}^2 \theta = \frac{\nu}{k^2}, \quad \sin^2 \theta = \frac{\nu}{\nu + k^2}, \quad \cos^2 \theta = \frac{k^2}{\nu + k^2}.$$

Первая из формул (10.101) переписется в виде

$$\Pi(\nu, k) = \frac{k^2}{\nu + k^2} K(k) + \sqrt{\frac{\nu}{(1 + \nu)(\nu + k^2)}} G_3.$$

При малых  $k$ ,  $\theta \leq \pi/2$  согласно (10.72), (10.70), (10.71)

$$0 < F(\theta, k') \leq K(k') \sim \ln \frac{4}{k}, \quad K(k) - E(k) \sim \frac{k^2}{2},$$

поэтому с учетом (10.69)

$$G_3 \sim K(k).$$

Окончательно,

$$\Pi(\nu, 0) = \frac{\pi}{2\sqrt{1+\nu}}.$$

К тому же значению приводит прямое вычисление  $\Pi(\nu, 0)$  согласно определению (10.89) с учетом (10.43).

## 10.5 Дилогарифм Эйлера

Дилогарифмом Эйлера называется неэлементарная функция одной комплексной переменной  $z = x + iy$ , определяемая формулой

$$L(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt. \quad (10.102)$$

Областью  $\mathbb{C}_0$  задания  $L(z)$  служит комплексная плоскость  $\mathbb{C}$ , из которой удален луч  $x \geq 1$ . За путь интегрирования в (10.102) можно взять любую спрямляемую кривую из  $\mathbb{C}_0$ , соединяющую точки 0 и  $z$ , например, отрезок.

**ПРЕДОСТЕРЕЖЕНИЕ.** В некоторых руководствах дилогарифм Эйлера определяются и обозначается несколько иначе.

Свойства дилогарифма описаны в (*Абрамовиц, Стиган, 1979*). Как и  $\ln(1-z)$ , дилогарифм можно продолжить на всю комплексную плоскость ценой потери однозначности; точка  $z = 1$  является точкой ветвления. В отличие от  $\ln(1-z)$ , значение  $L(1)$  конечно. В этой книге используются свойства  $L(z)$  в комплексной области  $\mathbb{C}_0$  или в ее части — единичном круге  $\mathbb{C}_1$

$$|z| \leq 1,$$

причем точка  $z = 1$  рассматривается как предельная.

Заменяя в (10.102) логарифм рядом Маклорена, получим равномерно сходящийся в круге  $\mathbb{C}_1$  ряд

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}. \quad (10.103)$$



### 10.5.1 Формулы приведения и частные значения

Известно несколько формул, связывающих значения дилогарифма в различных точках:

$$\begin{aligned}
 L(z) + L(1-z) &= \frac{\pi^2}{6} - \ln z \ln(1-z), \quad z \in \mathbb{C}_2, \\
 L(z) - L\left(\frac{1}{1-z}\right) &= -\frac{\pi^2}{6} - \ln(-z) \ln(1-z) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \ln^2(1-z), \quad z \in \mathbb{C}_3, \\
 L(z) + L(-z) &= \frac{1}{2} L(z^2), \quad z \in \mathbb{C}_4.
 \end{aligned} \tag{10.104}$$

Область  $\mathbb{C}_2$  получается из  $\mathbb{C}$  удалением лучей вещественной оси  $x < 0$ ,  $x > 1$ ;  $\mathbb{C}_3$  — удалением луча  $x > 0$ ;  $\mathbb{C}_4$  — удалением лучей  $x < -1$ ,  $x > 1$ .

Тождества (10.104) проверяются дифференцированием и подстановкой значений  $L(0) = 0$ ,  $L(1) = \pi^2/6$ , следующих из (10.103). Пользуясь (10.104), легко вычислить значения  $L$  в точках  $1/2$  и  $-1$ . Суммируя в (10.103) отдельно четные и нечетные степени  $z$ , определим  $L$  в точках  $\pm i$ .

Приведем таблицу значений дилогарифма  $L$  в указанных точках. Здесь  $G = 0.915965594\dots$  — постоянная Каталана.

Таблица 10.1. Значения  $L$  в выделенных точках

$z$	0	1/2	1	-1	$\pm i$
$L(z)$	0	$\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2 2$	$\frac{\pi^2}{6}$	$-\frac{\pi^2}{12}$	$-\frac{\pi^2}{48} \pm iG$

### 10.5.2 Вычисление $L(z)$

Для любого  $z \in \mathbb{C}_0$  дилогарифм можно вычислить по формуле (10.102), прибегнув к подходящему приему численного интегрирования. Однако прямой метод неэкономичен. Опишем альтернативные варианты.

При  $|z| \leq c$ , где  $0 < c < 0.7$ , ряд (10.103) сходится быстро и вполне пригоден для вычислений. В самом деле, пусть

$$L(z) = \sum_{n=1}^k \frac{z^n}{n^2} + L(k, z). \quad (10.105)$$

Тогда

$$|L(k, z)| \leq |z|^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Так как  $1/n^2$ , рассматриваемая как непрерывная функция положительной переменной  $n$ , убывает и выпукла вниз, то

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_{k+1/2}^{\infty} \frac{dn}{n^2} = \frac{2}{2k+1}.$$

Окончательно,

$$|L(k, z)| \leq \frac{2|z|^{k+1}}{2k+1}. \quad (10.106)$$

Пусть теперь малой величиной является  $1-z$ . Положим  $z = re^{i\varphi}$ ,  $-\pi < \varphi \leq \pi$ , так что

$$|1-z| = \sqrt{1-2r \cos \varphi + r^2}.$$

Построим в плоскости  $z = x + iy = re^{i\varphi}$  окружности  $r = c$ ,  $r = 1$  и лучи  $ODB$ ,  $OD_1B_1$ , образующие с осью  $x$  углы  $\pm\varphi$ ,  $\varphi > 0$ , см. рис. 10.1. Определим  $c$ ,  $\varphi$  из условия  $|AD| = |AB| = |OD| = c$ . Очевидно, расстояние от  $A$  до любой точки криволинейного прямоугольника  $BDD_1B_1$  не превосходит  $c$ . Таким образом, в этом прямоугольнике будет выполнено неравенство

$$|1-z| \leq c. \quad (10.107)$$

Для вычисления  $L(1-z)$  можно пользоваться рядом (10.105) и оценкой (10.106) с заменой  $z$  на  $1-z$ . Значение  $L(z)$  найдется затем по первой из формул (10.104).

Осталось найти значения  $c$ ,  $\varphi$  из указанного условия, для чего достаточно решить систему двух уравнений

$$1 - 2c \cos \varphi + c^2 = 2 - 2 \cos \varphi = c^2.$$

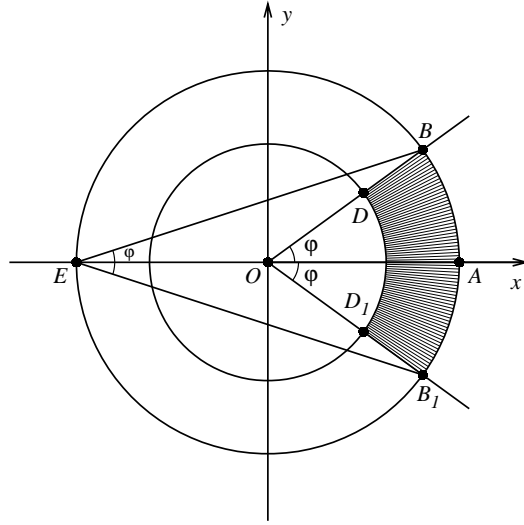


Рис. 10.1. Криволинейный прямоугольник  $BDD_1B_1$  (две стороны которого — дуги радиусами  $|OD| = |OD_1| = c$ ,  $|OB| = |OB_1| = 1$ ) выделен условиями  $|AB| = |AD| = |OD| = c$ . Отрезки  $BE$  и  $B_1E$  — стороны пятиконечной звезды.

Исключая  $\cos \varphi$ , приходим к уравнению

$$c^3 - 2c + 1 = 0 \iff (c - 1)(c^2 + c - 1) = 0,$$

имеющему два положительных корня: равный единице (тривиальный) и определяющий золотое сечение

$$c_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618033988 \dots \quad (10.108)$$

Значение  $\varphi_0$  теперь очевидно: это в точности  $36^\circ$ , так как золотое сечение связано с правильным пятиугольником (точнее, с пятиконечной звездой). В самом деле,

$$\cos \varphi_0 = \frac{1}{2c_0} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}, \quad \cos 2\varphi_0 = 2 \cos^2 \varphi_0 - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

$$\cos 4\varphi_0 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{4} = -\cos \varphi_0.$$

Отсюда вытекает  $4\varphi_0 = \pi - \varphi_0$ , поскольку  $\varphi_0 < \pi/4$ . Поэтому

$$\varphi_0 = \pi/5. \quad (10.109)$$

Пусть  $z \in \mathbb{C}_1$  лежит вне криволинейного прямоугольника  $BDD_1B_1$ , так что

$$|1 + z| < EB = \sqrt{4 - c_0^2} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} = 1.90211303 \dots \quad (10.110)$$

Дилогарифм можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $-1$ :

$$L(z) = L(-1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} L^{(n)}(-1)(1+z)^n. \quad (10.111)$$

Дифференцируя (10.102), получим

$$L'(z) = [-\ln(1-z)] \cdot \frac{1}{z}. \quad (10.112)$$

По формуле Лейбница при  $n \geq 1$

$$\frac{L^{(n)}(z)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{nz^n} \left[ -\ln(1-z) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k z^k}{k(1-z)^k} \right]. \quad (10.113)$$

В частности,

$$\frac{L^{(n)}(-1)}{n!} = \frac{1}{n} \left[ \ln 2 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k k} \right]. \quad (10.114)$$

Легко показать, что выражение в квадратных скобках в (10.114) равно интегралу

$$\int_0^{1/2} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right) dx = \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x} dx,$$

что положительно и меньше, чем

$$2 \int_0^{1/2} x^n dx = \frac{1}{2^n(n+1)},$$

так что

$$0 < \frac{L^{(n)}(-1)}{n!} < \frac{1}{2^n n(n+1)}. \quad (10.115)$$

Разобьем ряд (10.111) на частичную сумму и остаток подобно (10.105)

$$L(z) = -\frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^k \frac{1}{n!} L^{(n)}(-1)(1+z)^n + L_1(k, z),$$

где согласно (10.115)

$$|L_1(k, z)| < \left(\frac{|1+z|}{2}\right)^{k+1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Очевидно,

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{k+1},$$

так что

$$|L_1(k, z)| < \frac{1}{k+1} \left(\frac{|1+z|}{2}\right)^{k+1}. \quad (10.116)$$

Подведем итоги. В единичном круге  $\mathbb{C}_1$  значения  $L(z)$  можно вычислить по следующей схеме:

1. Если  $|z| \leq c_0$ , то пользуемся рядом (10.103) с оценкой остатка (10.106).
2. Если  $c_0 < |z| \leq 1$ ,  $|\varphi| \leq \varphi_0$ , вычисляем  $L(1-z)$ , пользуясь предыдущим алгоритмом, поскольку теперь  $|1-z| \leq c_0$ . Затем вычисляем  $L(z)$  по первой из формул (10.104).
3. Если  $c_0 < |z| \leq 1$ ,  $|\varphi| > \varphi_0$ , пользуемся рядом (10.111) с коэффициентами (10.114) и оценкой остатка (10.116). В этой области согласно (10.110)

$$|1+z|/2 < c_1 = 0.951056516\dots \quad (10.117)$$

Значение  $c_1$  все же слишком велико для точных расчетов. Если  $|\varphi| > 2\varphi_0$ , то справа в (10.117)  $c_1$  можно заменить на

$$c_2 = \cos \varphi_0 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = 0.809016994\dots$$

4. Если же  $\varphi_0 < |\varphi| \leq 2\varphi_0$ , то предварительно следует воспользоваться третьей из формул (10.104)

$$L(z) = L(-z) + \frac{1}{2} L(z^2).$$

Абсолютная величина аргументов комплексных чисел  $-z$  и  $z^2$  будет больше  $2\varphi_0$ .

Обратим внимание, что оценки (10.106) и (10.116) точны в следующем смысле. Если домножить правую часть неравенств (10.106) или (10.116) на постоянную  $C \geq 1$ , то неравенства останутся в силе. В обоих случаях наименьшее возможное значение  $C$  равно единице.

### 10.5.3 Интегралы, выражающиеся через дилогарифм Эйлера

Пусть  $a$  — комплексное число,  $|a| \leq 1$ ;  $t$  — вещественная переменная. Тогда

$$\int \ln(1 - ae^{it}) dt = i L(ae^{it}), \quad (10.118)$$

$$\int \ln(1 - ae^{-it}) dt = -i L(ae^{-it}), \quad (10.119)$$

$$\int \ln(1 - 2a \cos t + a^2) dt = i [L(ae^{it}) - L(ae^{-it})], \quad (10.120)$$

что проверяется дифференцированием.

Потребуем дополнительно вещественности числа  $a$ . Тогда значения  $L(ae^{it})$  и  $L(ae^{-it})$  комплексно сопряжены. Формулу можно представить в виде

$$\int \ln(1 - 2a \cos t + a^2) dt = -2 \Im L(ae^{it}). \quad (10.121)$$

### 10.6 Тожества с частными производными

В пространстве  $\mathbb{R}^2$  переменных  $(x, y)$  справедливы легко проверяемые равенства

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \ln R) = \frac{x^2}{R^2} + \ln R, \quad \frac{\partial}{\partial y}(y \ln R) = \frac{y^2}{R^2} + \ln R, \quad (10.122)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{R} \right) = \frac{R^2 - x^2}{R^3}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{R} \right) = \frac{R^2 - y^2}{R^3}, \quad (10.123)$$

где  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ . После сложения симметричных тождеств (10.122) и (10.123) получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \ln R) + \frac{\partial}{\partial y}(y \ln R) = 1 + 2 \ln R, \quad (10.124)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{R} \right) = \frac{1}{R}. \quad (10.125)$$

Аналогично в пространстве  $\mathbb{R}^3$  переменных  $(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) &= \frac{r^2 - x^2}{r^3}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r} \right) &= \frac{r^2 - y^2}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r} \right) &= \frac{r^2 - z^2}{r^3}, \end{aligned} \quad (10.126)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xr}{R^2} \right) &= \frac{z^2(y^2 - x^2) + y^2R^2}{rR^4}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{yr}{R^2} \right) &= \frac{z^2(x^2 - y^2) + x^2R^2}{rR^4}, \end{aligned} \quad (10.127)$$

где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r} \right) = \frac{2}{r}, \quad (10.128)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xr}{R^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{yr}{R^2} \right) = \frac{1}{r}. \quad (10.129)$$

## Литература

- Абрамовиц, Стиган, 1979.* — Абрамовиц М., Стиган И. (Ред.) Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука.
- Антонов и др., 1989.* — Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холщевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука.
- Бабич и др., 1964.* — Бабич В.М., Капилевич М.Б., Михлин С.Г., Натансон Г.И., Риз П.М., Слободецкий Л.Н., Смирнов М.М. Справочная математическая библиотека. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука.
- Бейтмен, Эрдейи, 1967.* — Бейтмен Г., Эрдейи А. Справочная математическая библиотека. Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матъе. М.: Наука.
- Бейтмен, Эрдейи, 1973.* — Бейтмен Г., Эрдейи А. Справочная математическая библиотека. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М.: Наука.
- Брело, 1974.* — Брело М. О топологиях и границах в теории потенциала. М.: Мир.
- Ватсон, 1949.* — Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть 1. М.: ИИЛ.
- Владимиров, 2003.* — Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Физматлит.



- Градштейн, Рыжик, 1971.* — Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука.
- Гюнтер, 1953.* — Гюнтер Н.М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: ГИТТЛ.
- Жуковский, 1950.* — Жуковский Н.Е. Теоретическая механика. М.-Л.: ГИТТЛ.
- Кондратьев, 2007.* — Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир.
- Корн, 1984.* — Корн Т., Корн Г. Справочник по математике. М.: Наука.
- Курант, 1970.* — Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. М.: Наука.
- Ландкоф, 1966.* — Ландкоф Н.С. Основы современной теории потенциала М.: Наука.
- Михлин, 1977.* — Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа.
- Полянин, 2001.* — Полянин А.Д. Справочник. Линейные уравнения математической физики. М.: Физматлит.
- Сретенский, 1946.* — Сретенский Л.Н. Теория ньютоновского потенциала. М.: ОГИЗ ГИТТЛ.
- Субботин, 1949.* — Субботин М.Ф. Курс небесной механики. Т. 3. Л.-М.: ГИТТЛ.
- Субботин, 1968.* — Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука.
- Тиман, Трофимов, 1968.* — Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука.
- Тодхантер, 2002.* — Тодхантер И. История математических теорий притяжения и фигуры Земли от Ньютона до Лапласа. М.: УРСС.
- Уэрмер, 1980.* — Уэрмер Дж. Теория потенциала. М.: Мир.

- Фихтенгольц, 1997a.* — Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. СПб: Лань.
- Фихтенгольц, 1997б.* — Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 3. СПб: Лань.
- Холшевников и др., 2005.* — Холшевников К.В., Питъев Н.П., Титов В.Б. Притяжение небесных тел. СПб.: Изд-во СПбГУ.
- Шкодров, 1989.* — Шкодров В.Г. Планетен потенциал. София: Изд-во на Българската Академия на Науките.
- Binney, Tremaine, 2008.* — Binney J., Tremaine S. Galactic Dynamics: Second Edition. Princeton: Princeton Univ. Press.
- Poincaré, 1899.* — Poincaré H. Théorie du potentiel Newtonien. Paris: Georges Carré et C. Naud editeurs.

## Именной указатель

Га́усс К.Ф. (Gauss C.F.), 8

Грин Дж. (Green G.), 8

Клеро́ А.К. (Clairaut A.C.), 7

Лагранже́ Ж.Л. (Lagrange J.L.), 7

Лаплас П.С. (Laplace P.S.), 8

Лежандр А.М. (Legendre A.M.), 7

Ляпуно́в А.М., 8

Нью́тон И. (Newton I.), 7

Пуанкаре́ Ж.А. (Poincaré J.H.), 8

Пуассо́н С.Д. (Poisson S.D.), 8

Яко́би К.Г.Я. (Jacobi C.G.J.), 181

## Предметный указатель

- $J$ , см. Якобиан  
 $\Delta$ , см. Оператор Лапласа
- Аномалия истинная 180  
— эксцентрическая 27, 180
- Бесселевы функции 10, 114
- Векторы 11  
Вторая космическая скорость 59
- Гармонические функции 14–16,  
21, 26, 28, 31, 32, 39, 40,  
52–56  
свойства 15, 16, 52  
теория 14
- Гауссово кольцо 9, 120
- Гипергеометрические функции  
169, 184
- Гиперэллиптические интегралы  
10, 167
- Гравитационная энергия 11
- Дилогарифм Эйлера 10, 88, 89,  
192–194, 196–198
- Задача Дирихле 9, 15  
единственность 15, 16, 91,  
105  
решение 15, 16
- Закон всемирного тяготения 7
- Координаты 21  
биполярные 34, 42, 43
- бисферические 42, 43  
декартовы 13, 21, 47, 54, 72,  
141  
индуцированные координа-  
тами на плоскости 37  
криволинейные 9, 17, 21, 37  
параболические 33, 42  
параболоидные 42  
полярные 25, 38  
связанные с подобными эл-  
липсами 27  
связанные с софокусными  
эллипсами 29, 31, 32  
сферические 21, 22, 25, 36,  
38, 64, 69, 72, 138  
сфероидальные 38, 39  
модифицированные 40  
сплюснутые 112  
тороидальные 43  
цилиндрические 12, 37, 114  
эллипсоидальные 44, 46, 47,  
51, 54, 118, 154, 155  
функции, важные для  
нахождения потенциа-  
ла эллипсоидов 49  
эллиптические 38, 104
- Коэффициенты Ламе 21  
— Фурье 117, 176
- Крест  
двумерный 142, 144  
трехмерный 142, 143
- Масса 11

- Матрица Якоби 20–23, 26–29, 32, 33, 35, 36, 38, 47
- Матрицы 11  
свойства 20
- Метрический тензор 18
- Небесная механика 7, 27, 180
- Неравенство Гёльдера 103
- Обозначения 11, 12  
операция транспонирования 18  
суммирование по повторяющимся индексам 17
- Оператор Бельтрами 24
- Лапласа 8, 10, 12–14, 17, 21, 105, 161, 165
- в  $\mathbb{R}^N$  13
- в биполярных координатах 35
- в бисферических координатах 43
- в координатах, связанных с подобными эллипсами 28
- в координатах, связанных с софокусными эллипсами 30–32
- в криволинейных координатах  
в  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{N-2}$  25  
в  $\mathbb{R}^3$  36  
в  $\mathbb{R}^N$  17
- в параболических координатах 33
- в параболоидных координатах 42
- в полярных координатах 26
- в сферических координатах  
в  $\mathbb{R}^3$  37  
в  $\mathbb{R}^N$  22, 24
- в сфероидальных координатах 39, 40
- модифицированных 41
- в тороидальных координатах 44
- в цилиндрических координатах 27
- в эллипсоидальных координатах 49, 54
- инвариантность  
относительно ортогональных преобразований 18  
относительно сдвига 17
- Переменная интегрирования 12
- Перестановка 147, 148, 150
- Плотность 8, 12, 60
- Постоянная Каталана 193
- тяготения 59
- Потенциал 7, 10, 12, 59, 65  
аналитичность 58, 65–69, 113, 136  
асимптотика 9, 11, 15, 54–56, 58, 59, 66, 70, 71, 80, 82, 90, 92, 103, 106, 108, 112, 113, 116, 119, 122, 138, 139, 153, 156, 161, 162, 165, 166
- бруса 141
- в  $\mathbb{R}^1$  58, 59, 76
- в  $\mathbb{R}^2$  12, 14, 59, 79, 92, 128
- в  $\mathbb{R}^3$  59  
двумерных тел 122  
одномерных тел 106  
трехмерных тел 139
- в  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$  59, 161
- внешний 65–68, 106, 136
- внутренний 65–68  
гладкость 67, 70, 77
- гармоничность 11, 14, 58
- гауссова кольца 120
- гравитационный 7

градиент 7, 21, 41, 59, 60, 63, 65–67, 76, 78, 79, 82, 84, 96, 126, 153  
 асимптотика 70, 71, 83, 84  
 дуги 88, 89, 117  
 кривой 11, 79, 80, 106  
 круга 101–103, 136, 137, 159  
 однородного 102  
 линейный, *см.* Потенциал, в  $\mathbb{R}^1$   
 логарифмический, *см.* Потенциал, в  $\mathbb{R}^2$   
 многогранника 151, 152  
 многоугольника 101, 132, 152  
 ньютонов, *см.* Потенциал, в  $\mathbb{R}^3$   
 общая теория 7, 8, 13, 14, 58, 66, 75, 77, 85, 136, 141, 153  
 одномерных тел 79, 93, 106  
 окружности 86, 101, 115, 116  
 отрезка 11, 61, 77, 78, 81–85, 94, 107–110, 158  
 плоской фигуры 11, 92  
 плоскости  
    $n$ -мерной 60, 63–65  
   в  $\mathbb{R}^3$  77, 132  
 поверхности 66, 122  
 полосы 77, 85  
 приемы нахождения 9, 21, 93  
 производные  
   вторые 66, 67, 139  
   первые 66, 69, 77–79, 85, 92, 122, 139  
 простого слоя, *см.* Потенциал, поверхности  
 протяженного тела 11, 21, 60, 67, 69  
 дифференциальные  
   свойства 11, 65–67, 77, 107  
   стандартный способ определения 60  
 прямой 60, 61, 63, 80, 92  
   в  $\mathbb{R}^2$  63, 77, 85  
   в  $\mathbb{R}^3$  62, 111–113, 133  
   в  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$  61  
 прямоугольника 94–96, 125, 126, 132, 141  
 ротационно-симметричный 112  
 симметрия 11, 71, 72  
 слоя 77  
 сферы 138, 153, 161, 162  
 тела сферической структуры 152, 162  
 тела эллипсоидальной структуры 154, 155, 157, 163  
 тетраэдра 147, 148, 150, 151  
   в вершине 146  
 точки 11, 58, 60, 62–64, 77, 79, 80, 85, 92, 111, 133  
 треугольника 96, 98–101, 128–130, 132, 146, 147  
   внешний 99, 100  
   внутренний 98  
 цилиндра 80, 92  
 шара 10, 11, 153, 154, 163  
 электростатический 7  
 эллипса 89–91, 118, 119, 137  
   сплошного 103–105, 158, 159  
 эллипсоида 10, 11, 49, 137, 154, 157, 158  
   вращения 109, 137, 158–160  
   однородного 8, 154, 158, 159, 167

- сплошного 157–159, 163, 164, 166, 167
- Правило Лейбница 14
- Преобразование Ландена 186
- Принцип аналитического продолжения 49, 65, 136, 151
- Притягивающее тело 11
- Простой слой 66
- Разделение переменных 9, 21
- Размерность 12, 60
- Разность потенциалов 59, 62, 64, 85, 111, 133
- Расстояние 12
- Ряд Маклорена 192
  - Пуассона 168
  - Фурье 9, 87, 116
- Символ Кронекера 19
- Симметрия 71–74
- Соотношение Лежандра 186
- Точки пространства 11
- Угловые переменные 12
- Уравнение Кеплера 120
  - Лапласа 9, 14, 21, 41, 66, 75, 112, 119
  - решения 11, 15, 26, 31, 33, 36, 37, 42–44, 49, 138
- методом вариации произвольных постоянных 41
  - элементарное 58
- Уравнение Пуассона 8, 9, 11, 14, 66, 74, 75, 77, 105, 155, 156, 165
  - решения 105
  - свойства 16
- Условие Липшица 75
- Формула Грина 93, 123, 124
  - Лейбница 196
  - Остроградского–Гаусса 11, 74, 75
  - Тейлора 52, 196
  - Якоби 74
- Функция Макдональда 10, 114
- Черные дыры 59
- Эксцентриситет 27
- Элементы длины, площади и объема 12
- Эллиптические интегралы 10, 49, 57, 90, 109, 117–120, 135, 158, 169, 181–187, 189, 190
- Якобиан 18, 20, 21, 24, 26, 28–30, 32, 33, 35–40, 42–44, 48, 164