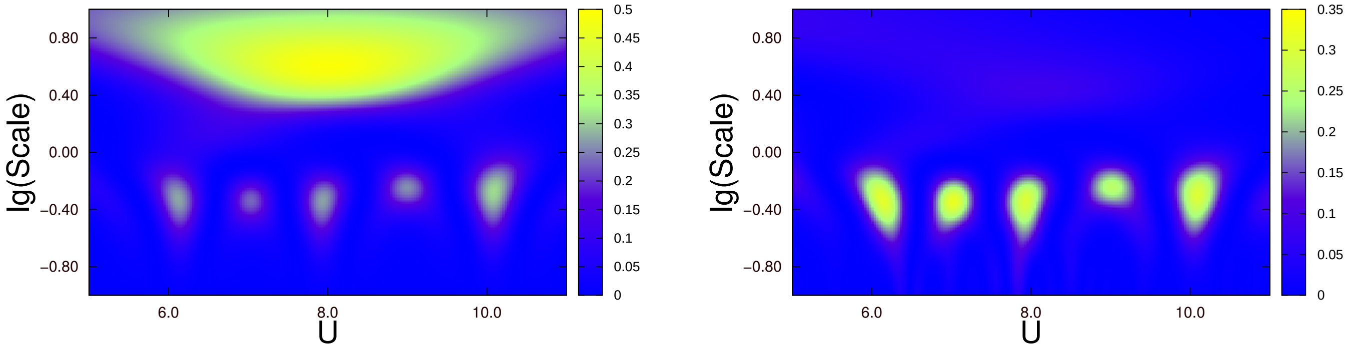
А.Ф. Холтыгин

Анализ сигналов



Санкт-Петербург 2022

Содержание

Аннотация

В настоящем пособии описан общий подход к анализу сигналов. Даны основные формулы, описывающие способы численного интегрирования. Дано введение в методику выполнения интегральных преобразований, используемые для анализа свойств функций. Эти интегральные преобразования использованы для описания методик сглаживания функций и расчета амплитуды вейвлет-преобразования с МНАТ вейвлетом и вейвлетом Морле.

Содержание

1 Общий подход

Рассмотрим общую задачу анализа сигналов. Обычно сигнал можно представить в виде какой-то функции. Пусть $f(x)$ — какая-либо анализируемая функция. Под анализируемой функцией или сигналом будем понимать любую финитную функцию, заданную на конечном множестве точек (аргументов) $\{X\}$ в пространстве R^n. В общем случае $N \leq 1$. При этом для множества $\{X\}$ существует отображение

$$\mathcal{F} : \{X\} \to \{F\} \tag{1}$$

множества аргументов $\{X\}$ в множество значений функций $\{F\}$. При этом значения функции $f \in \{F\}$ принадлежат пространству R^1, то есть являются числами.

Таким образом на множестве $\{X\}$ определена функция

$$f(x) : x_i \to f_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, N, \tag{2}$$

Где $N + 1$ – число точек множества $\{X\}$ (число аргументов).

Под анализом функции $f(x)$ будем понимать выяснение того, какими специфическими свойствами обладает анализируемая функция. При этом важно отметить, что значения функции $f(x)$ обычно получаются в результате какого либо процесса измерения[1] содержат вклад случайного (шумового) компонента.

То есть

$$f(x) = f_0(x) + N(x). \tag{3}$$

где $f_0(x)$ – реальное значение анализируемой функции, а $N(x)$ – шумовой компонент.

1.1 Задачи анализа функций

К числу задач анализа функций относятся, например, такие:

1. нахождение реальных значений функции $f(x)$ (очистка от шума);
2. нахождение значений функции для $x \notin \{X\}$ (интерполяция и экстраполяция значений функции);
3. выявление тренда, то есть выяснение того, не является ли анализируемая функция $f(x)$ близкой в каком-либо смысле к заданной функции $f_{\mathrm{T}}(x)$. В зависимости от вида функции $f_{\mathrm{T}}(x)$ говорят о линейном тренде, квадратичном тренде и т.д.;
4. нахождение периодичной составляющей функции $f(x)$;
5. выяснение того, есть ли в функции $f(x)$ какие либо особенные детали, например быстрые увеличения значений функции при малом изменения аргумента x.

Существуют и другие задачи анализа функций.

Одним из наиболее эффективных методов анализа функции является применение к функции какого-либо преобразования

$$\hat{H}(f) f_i \to g_i, \tag{4}$$

[1] под измерением будем понимать любую процедуру получения анализируемых данных, например снятие показаний какого-либо прибора.

отображающего значения множества $\{F\}$ в значения множества $\{G\}$, такого, что непосредственное исследование множества $\{G\}$ позволяет решить какую-либо из упомянутых задач анализа функций. Обычно считается, что преобразование $\hat{H}$ линейно, хотя это и не обязательное условие.

В дальнейшем будем считать, что $n = 1$, то есть будем рассматривать методы анализа одномерных функций. В этом случае множество $\{X\}$ является множеством точек числовой оси и значения аргументов $x_i \in \{X\}$ могут быть упорядочены по возрастанию:

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \dots x_N.$$

Здесь $N + 1$ – число значений функции. Все значения аргумента $x_i \in [x_0, x_N]$. Соответствующее значение функции $f_i = f(x_i)$. Начало отсчета $i = 0$ выбрано из соображений удобства.

В качестве преобразования $\hat{H}$ часто выбирается какое-нибудь интегральное преобразование, применяемое к анализируемой функции. Так как функция $f(x)$ задана на конечном множестве точек, то для применения интегрального преобразования к анализируемой функции $f(x)$ необходимо использовать какие либо методы численного интегрирования. Некоторые из таких методов рассмотрены в разделе 2.

2 Численное интегрирование

2.1 Методы интегрирования

Пусть интегрируемая функция $f(x)$ задана на упорядоченном по возрастанию множестве $n+1$ точек $\{X\} = \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n\}$ со значениями функции $\{F\} = \{f_0, f_1, f_2, \dots f_n\}$.

Общее выражение для численной оценки интеграла от функция $f(x)$ имеет следующий вид:

$$\int\limits_R f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i f_i\,, \tag{5}$$

где R – промежуток (область) интегрирования, $A_i, i = 1, 2, \dots n$ — множество коэффициентов интегрирования, разных для различных методов интегрирования.

В дальнейшем будем использовать для вычисления интеграла (5) по любому промежутку интегрирования только значения $\{F\}$. В том случае, если функция $f(x)$ может быть задана аналитически, что позволяет найти точные[2] значения интеграла (5), эти значения будут использоваться только для контроля точности различных методов вычисления.

Возможны 3 возможные случаи выбора области интегрирования $[a, b]$:

1. Границы промежутка интегрирования совпадают с точками множества $\{X\}$,
2. по крайней мере одна из границ не совпадает ни с одной из точек множества $\{X\}$,
3. одна (или обе) граница интегрирования выходит за границы промежутка $[x_0, x_n]$.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

[2] В том случае, когда функция $f(x)$ не интегрируема, значение интеграла может быть получена со сколь угодно высокой точностью методами численного интегрирования.

Таблица 1: Точность расчета интеграла вероятности $\mathrm{erf}(x)$ при $x = 1$ в зависимости от метода интегрирования и числа точек разбиения интервала интегрирования

n	Метод	вычисл. знач.	точн. знач.	ошибка
6	S	0.84270	0.84270	0.00001
	$\mathrm{T_{even}}$	0.84078		0.00192
	$\mathrm{T_{uneven}}$	0.83049		0.01221
12	S	0.84270	0.84270	0
	$\mathrm{T_{even}}$	0.84222		0.00048
	$\mathrm{T_{uneven}}$	0.83978		0.00292
24	S	0.84270	0.84270	0
	$\mathrm{T_{even}}$	0.84258		0.00012
	$\mathrm{T_{uneven}}$	0.84198		0.00072
48	S	0.84270	0.84270	0
	$\mathrm{T_{even}}$	0.84267		0.00003
	$\mathrm{T_{uneven}}$	0.84252		0.00018

2.1.1 Границы промежутка интегрирования совпадают с точками множества $\{X\}$,

В этом случае можно использовать стандартные методы интегрирования. Без потери общности можно считать, что промежуток интегрирования $[a, b]$ совпадает с промежутком $[x_0, x_n]$.

В случае равномерной сетки и четкого числа промежутков $n = 2k$ интегрирования можно воспользоваться формулой Симпсона:

$$\int\limits_{x_1}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{6}\left(\sum_{i=0}^{n} S_i f_i\right) = \frac{h}{6}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + f_n\right), \tag{6}$$

где $h = (x_n - x_0)/n$ — шаг интегрирования.

В численных расчетах по формуле Симпсона можно использовать рекуррентное соотношение для коэффициентов S_i:

$$S_0 = 1, S_1 = 4, S_k = 6 - S_{k-1} \quad (\text{при } k > 1 \text{ и } k < n),\ S_n = 1.$$

Если число промежутков нечетно, а сетка интегрирования равномерна, то можно использовать формулу трапеций:

$$\int\limits_{x_1}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}\left(\sum_{i=0}^{n} T_i f_i\right) = \frac{h}{2}\left(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + \cdots + f_n\right), \tag{7}$$

Формула трапеций применима и при неравномерной сетке:

$$\int\limits_{x_1}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})\left(\frac{f_{i-1} + f_i}{2}\right). \tag{8}$$

На равномерной сетке формула (8) переходит в формулу (7).

В качестве иллюстрации рассмотрим вычисление интеграла вероятности

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2} dt. \quad (9)$$

Разобьем промежуток интегрирования $[0, x]$ на $n = 6k$ интервалов, где $k > 1$ — целое число. будем использовать следующие методы интегрирования:

A) Метод Симпсона по n интервалам (S).

B) Метод трапеций по n интервалам ($\mathrm{T}_{\mathrm{even}}$).

C) Метод трапеций по $n/2$ интервалам неравной длины ($\mathrm{T}_{\mathrm{uneven}}$). При этом интервалы формируются следующим образом. Каждый интервал длиной $6h$, начиная с первого, разбивается на 3 интервала длиной h, $3h$ и h. Полное число интервалов интегрирования в результате такого разбиения уменьшается в 2 раза.

Из анализа таблицы 1 видно, что точность расчета быстро увеличивается с ростом числа промежутков разбиения. При этом скорость роста точности вычислений существенно выше на равномерной сетке интегрирования.

2.1.2 Одна (или обе) из границ промежутка интегрирования не совпадает ни с одной из точек множества $\{X\}$

Если по крайней мере одна из границ промежутка интегрирования $[a, b]$ не совпадает ни с одной из точек множества $\{X\}$, то вблизи от границ этого промежутка (a или b) значения функции могут быть найдены интерполированием.

В простейшем случае линейного интерполирования задача интегрирования сводится к нахождению приближенных значений $f^*(a)$ и $f^*(b)$, где индексом $*$ отмечены интерполированные значения, и использованию формулы трапеций для неравномерной сетки интегрирования (8).

2.1.3 Граница (границы) интегрирования выходит за границы промежутка $[x_1, x_n]$

Такой случай случается при сглаживании исходного сигнала с широкими фильтрами и применении к нему вейвлет преобразования на больших масштабах, сравнимых с длиной промежутка задания функции. В обеих случаях задача сводится к вычислению интегралах типа свертки.

Ввиду ее важности данная задача будет рассмотрена в отдельном разделе 2.2.

2.2 Интегралы типа свертки

Сверткой функций[3] называют интеграл

$$(f * W)(x) = \int\limits_{R^n} f(z) W(x - z) dz. \quad (10)$$

В общем случае интегрирование выполняется по всему пространству R^n. Далее мы будем рассматривать только числовую ось R^1, тогда

$$(f * W)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) W(x - z) dz. \quad (11)$$

[3]например, http://edu.sernam.ru/lect_mph.php?id=26

Свертка коммутативна:

$$(f * W) = (W * f). \tag{12}$$

Тем не менее, обычно функции $f(x)$ и $W(x)$ в выражениях (10)-(11) не вполне равнозначны. Функция $f(x)$ — рассматривается как анализируемый сигнал, а функция $W(x)$ — как некая анализирующая функция.

То есть свертка (12) является интегральным преобразованием исходной анализируемой функции (сигнала) $f(x)$. Выбор разных функций $W(x)$ позволяет изучать различные свойства сигнала $f(x)$.

В дальнейшем будет удобно ввести масштабирование анализирующей функции $W(x)$. Тогда свертка сигнала и масштабированной анализирующей функции с масштабом S будет иметь следующий вид:

$$(f * W)_S(x) = \frac{1}{S^\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \tag{13}$$

Множитель $1/S^\beta$ введен для удобства. При стандартном значении $\beta = 1/2$ сохраняется нормировка анализирующей функции $W(x)$:

$$\| W \| = \int W^2(x) dx.$$

При подходящем выборе анализирующих функций, определенных на компактном носителе, свертка (13) сводится к сглаживанию (фильтрации) или вейвлет-преобразованию сигнала $f(x)$.

Если же анализирующая функция некомпактна, то есть ее значения существенно отличаются от нуля на всем множестве $R^1 = [-\infty, \infty]$, то свертка (10) сводится к преобразованию Фурье, преобразованию Лапласа, Меллина и другим подобным преобразованиям при соответствующем выборе анализируемых функций.

2.2.1 Вычисление интегралов типа свертки

Рассмотрим возможные методы вычисления интеграла свертки (13). Обычно анализируемый сигнал задан на конечном множестве точек $\{Z\} = \{z_i\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, где $n+1$ — число точек задания функции. В то же время анализирующая функция обычно определена на всем промежутке $[-\infty, \infty]$ и чаще всего задана аналитически.

Представим интеграл свертки (13) в следующем виде:

$$(f * W)_S(x) = \frac{1}{S^\beta} I = \frac{1}{S^\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \tag{14}$$

где

$$I = I_A + I_B + I_C, \tag{15}$$

а

$$\left\{ \begin{array}{lcl} I_A & = & \int\limits_{-\infty}^{z_0} f(z) W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz, \\ I_B & = & \int\limits_{z_0}^{z_n} f(z) W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz, \\ I_C & = & \int\limits_{z_n}^{\infty} f(z) W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \end{array} \right. \tag{16}$$

Самый простой способ вычисления интеграла свертки – определить новую функцию $R_x(z) = f(z)W(x - z)$ и вычислять интеграл (14) каким-либо из описанных выше методов интегрирования.

В то же время можно воспользоваться более точным приближением. При значениях z, не совпадающих со значениями из множества $\{Z\}$, величины $f(z)$ можно вычислить интерполированием по множеству $\{Z\}$, а при значениях z за пределами множества $\{Z\}$ каким либо методом экстраполяции. Обозначим через $\tilde{f}(z)$ соответствующую интерполяционную или экстраполяционную функцию.

Тогда приближенное значения интеграла (13)

$$(f * W)_S(x) \approx \frac{1}{S^\beta}\tilde{I} = \frac{1}{S^\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(z) W\left(\frac{x - z}{S}\right) dz. \tag{17}$$

Представим интеграл $\tilde{I}$ в виде суммы трех слагаемых:

$$\tilde{I} = \tilde{I}_A + \tilde{I}_B + \tilde{I}_C, \tag{18}$$

где

$$\begin{cases} \tilde{I}_A &= \int\limits_{-\infty}^{z_0} \tilde{f}(z) W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz, \\ \tilde{I}_B &= \int\limits_{z_0}^{z_n} \tilde{f}(z) W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz, \\ \tilde{I}_C &= \int\limits_{z_n}^{\infty} \tilde{f}(z) W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \end{cases} \tag{19}$$

Для вычисления интегралов $\tilde{I}_A$ и $\tilde{I}_C$ значения функции $\tilde{f}(z)$ должны вычисляться какими-то методами экстраполяции. В самом простом случае, если за пределами промежутка $[z_0, z_n]$ функция $f(z)$ мало меняется, можно заменить ее соответствующими асимптотическими значениями: f_A и f_C.

В то же время поведение функции $f(z)$ вне промежутка $[z_0, z_n]$ может быть более сложным. В первом приближении значения функции $f(z)$ при $z \leq z_0$ можно представить следующим образом:

$$f(z) \approx \tilde{f}(z) = f_A + k_A(z - z_0), \quad (z \leq z_0) \tag{20}$$

где f_A и k_A – параметры линейной аппроксимации. При $z = z_0$, $\tilde{f}(z) = f_A$. При $z \geq z_n$ значения $\tilde{f}(z)$ представимы таким образом:

$$f(z) \approx \tilde{f}(z) = f_C + k_C(z - z_n), \quad (z \geq z_n). \tag{21}$$

С параметрами аппроксимации f_C и k_C. Интеграл

$$\tilde{I}_A = f_A \int\limits_{-\infty}^{z_0} W\left(\frac{x - z}{S}\right) dz + k_A \int\limits_{-\infty}^{z_0} (z - z_0) W\left(\frac{x - z}{S}\right) dz, \tag{22}$$

а интеграл

$$\tilde{I}_C = f_C \int\limits_{z_n}^{\infty} W\left(\frac{x - z}{S}\right) dz + k_C \int\limits_{z_n}^{\infty} (z - z_n) W\left(\frac{x - z}{S}\right) dz, \tag{23}$$

Слагаемое

$$\tilde{I}_B = \sum_{i=1}^{n} \tilde{I}_B^i, \tag{24}$$

где

$$\tilde{I}_B^i = \int\limits_{z_{i-1}}^{z_i} \tilde{f}(z) W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \tag{25}$$

Сделаем в интегралах (22)-(23) замену

$$t = \frac{x-z}{S}, \quad (z = x - tS,\ dz = -Sdt). \tag{26}$$

Тогда

$$\tilde{I}_A = S\left(f_A \int\limits_{t_n}^{\infty} W(t)dt + k_A \int\limits_{t_n}^{\infty} (x - z_0 - tS) W(t) dt\right), \tag{27}$$

и

$$\tilde{I}_C = S\left(f_C \int\limits_{-\infty}^{t_0} W(t)\, dt + k_C \int\limits_{-\infty}^{t_0} (x - z_n - tS) W\,(t)\, dt\right). \tag{28}$$

где

$$t_n = \frac{x - z_0}{S},\ t_0 = \frac{x - z_n}{S}. \tag{29}$$

Вынося за знаки интегралов в формуле (27) постоянные множители, запишем:

$$\tilde{I}_A = S\left([f_A + k_A(x - z_0)] \int\limits_{t_0}^{\infty} W(t)dt - k_A S \int\limits_{t_0}^{\infty} tW(t)dt\right) = S\left[U_A \mathbf{J}_A + V_A \mathbf{Q}_A\right], \tag{30}$$

где

$$U_A = f_A + k_A(x - z_0),\ V_A - k_A S,\ \mathbf{J}_A = \int\limits_{t_0}^{\infty} W(t)dt,\ \mathbf{Q}_A = \int\limits_{t_0}^{\infty} tW(t)dt. \tag{31}$$

Выполняя аналогичные преобразования в формуле (28), получим:

$$\tilde{I}_C = S\left([f_C + k_C(x - z_n)] \int\limits_{-\infty}^{t_0} W(t)dt - k_C S \int\limits_{-\infty}^{t_0} tW\,(t)\, dt\right) = S\left[U_C \mathbf{J}_C + V_C \mathbf{Q}_C\right],$$

где

$$U_C = f_C + k_C(x - z_n),\ V_C = -k_C S,\ \mathbf{J}_C = \int\limits_{-\infty}^{t_n} W(t)dt,\ \mathbf{Q}_C = \int\limits_{-\infty}^{t_n} tW(t)dt. \tag{32}$$

Если использовать линейную интерполяцию функции $f(z)$ в области $[z_0, z_n]$, то на промежутке $[z_{i-1}, z_i]$ при любом значении $i = 1, 2, \ldots, n$

$$f(z) \approx \tilde{f}(z) = f_{i-1} + k_i(z - z_{i-1}) = p_i + k_i z, \text{ где } p_i = f_{i-1} - k_i z_{i-1},\ k_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}. \tag{33}$$

Подставив аппроксимацию (33) в интеграл (25), получим:

$$\tilde{I}_B^i = \int\limits_{z_{i-1}}^{z_i} [f_{i-1} + k_i(z - z_{i-1})] W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \tag{34}$$

Сделав в интеграле (34) замену (26), запишем

$$\tilde{I}_B^i = -S \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} [f_{i-1} + k_i(x - z_{i-1}) - k_i S t] W(t) dt \tag{35}$$

где

$$t_{i-1} = \frac{x - z_i}{S},\ t_i = \frac{x - z_{i-1}}{S}. \tag{36}$$

Представим интеграл (35) в следующем виде:

$$\tilde{I}_B^i = S \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} [U_i + V_i t] W(t) dt = S\left(U_i \mathbf{J}_i + V_i \mathbf{Q}_i\right). \tag{37}$$

где

$$U_i = f_{i-1} + k_i(x - z_{i-1}),\ V_i = -k_i S,\ \mathbf{J}_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} W(t) dt,\ \mathbf{Q}_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} t W(t) dt. \tag{38}$$

Подставляя выражения (30), (32) и (34) в формулы (17) и (18), получим:

$$(f * W)_S(x) \approx S^{1-\beta}\left(U_A \mathbf{J}_A + V_A \mathbf{Q}_A + \sum_{i=1}^{n} (U_i \mathbf{J}_i + V_i \mathbf{Q}_i) + U_C \mathbf{J}_C + V_C \mathbf{Q}_C\right). \tag{39}$$

Здесь

$$\begin{cases}
\mathbf{J}_A = \int\limits_{t_n}^{\infty} W(t) dt, & U_A = f_A + k_A(x - z_0), & \\
\mathbf{Q}_A = \int\limits_{t_n}^{\infty} t W(t) dt, & V_A = -k_A S, & \\
\mathbf{S}_A = \int\limits_{t_n}^{\infty} t^2 W(t) dt, & & \\
\mathbf{J}_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} W(t) dt, & U_i = f_{i-1} + k_i(x - z_{i-1}), & (i = 1, 2, \ldots, n) \\
\mathbf{Q}_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} t W(t) dt, & V_i = -k_i S, & (i = 1, 2, \ldots, n) \\
\mathbf{S}_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} t^2 W(t) dt, & & (i = 1, 2, \ldots, n) \\
\mathbf{J}_C = \int\limits_{-\infty}^{t_0} W(t) dt, & U_C = f_C + k_C(x - z_n), & \\
\mathbf{Q}_C = \int\limits_{-\infty}^{t_0} t W(t) dt, & V_C = -k_C S, & \\
\mathbf{S}_C = \int\limits_{-\infty}^{t_0} t^2 W(t) dt. & &
\end{cases} \tag{40}$$

Дополнительные интегралы $\mathbf{S}_A$, $\mathbf{S}_i$ и $\mathbf{S}_C$ могут быть использованы при квадратичной интерполяции (экстраполяции) анализируемых функций.

Окончательно точные и приближенные значения интеграла свертки (14) можно записать так:

$$(f * W)_S(x) = \frac{1}{S^\beta}(I_A + I_B + I_C) \approx \frac{1}{S^\beta}(\tilde{I}_A + \tilde{I}_B + \tilde{I}_C). \tag{41}$$

Здесь

$$\begin{cases} I_A = \int\limits_{-\infty}^{z_0} f(z)W\left(\frac{x-z}{S}\right)dz, & \tilde{I}_A = S(U_A\mathbf{J}_A + V_A\mathbf{Q}_A), \\ I_B = \int\limits_{z_0}^{z_n} f(z)W\left(\frac{x-z}{S}\right)dz, & \tilde{I}_B = S\left[\sum\limits_{i=1}^{n}(U_i\mathbf{J}_i + V_i\mathbf{Q}_i)\right], \\ I_C = \int\limits_{z_n}^{\infty} f(z)W\left(\frac{x-z}{S}\right)dz, & \tilde{I}_C = S(U_C\mathbf{J}_C + V_C\mathbf{Q}_C). \end{cases} \tag{42}$$

При любом $i \in [1, n]$ должно выполняться приближенное равенство:

$$I_B^i = \int\limits_{z_{i-1}}^{z_i} f(z)W\left(\frac{x-z}{S}\right)dz \approx \tilde{I}_B^i = S(U_i\mathbf{J}_i + V_i\mathbf{Q}_i). \tag{43}$$

Параметры $\quad U_i = f_{i-1} + k_i(x - z_i),\ V_i = -k_iS,\ k_i = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{z_i - z_{i-1}}. \quad (44)$

Следует отметить, что значения $f_0 = f(z_0)$ и $f_n = f(z_n)$ не обязательно должны совпадать со значениями f_A и f_C соответственно. В важном случае $n = 1$, то есть тогда, когда интервал $[z_0, z_n]$ не разбиваются на более мелкие интервалы,

$$\tilde{I}_B = S(U_B\mathbf{J}_B + V_B\mathbf{Q}_B), \tag{45}$$

где

$$\begin{cases} U_B = f_0 + k_B(x - z_0), & \mathbf{J}_B = \int\limits_{t_0}^{t_n} W(t)dt, & k_B = \frac{f_n - f_0}{z_n - z_0}, \\ V_B = -k_BS, & \mathbf{Q}_B = \int\limits_{t_0}^{t_n} tW(t)dt, & \mathbf{S}_B = \int\limits_{t_0}^{t_n} t^2W(t)dt, \\ t_0 = \frac{x - z_n}{S}, & t_n = \frac{x - z_0}{S}. \end{cases} \tag{46}$$

Интеграл $\mathbf{S}_B$ используется при квадратичной экстраполяции анализируемых функций.

2.2.2 Различные виды анализирующих функций $W(t)$

Рассмотрим некоторые возможные представления анализирующих функции $W(t)$.

A)

$$W_a(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-t^2}. \tag{47}$$

В данном случае

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_a(t)dt = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} tW_a(t)dt = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2W_a(t)dt = \frac{1}{2}.$$

то есть функция $W_a(t)$ является фильтром, часто называемым гауссовым.

Важный неопределенный интеграл

$$\int e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(t) + C, \tag{48}$$

Здесь

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt - \tag{49}$$

интеграл вероятности (интеграл ошибок) [1, 4].

Тогда интегралы

$$\int W_a(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\mathrm{erf}(t) + C, \tag{50}$$

$$\int tW_a(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int te^{-t^2}dt = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-t^2} + C, \tag{51}$$

и

$$\int t^2W_a(t)dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int t^2e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}te^{-t^2} + \frac{1}{4}\mathrm{erf}(t) + C. \tag{52}$$

Подставляя выражение (47) в формулы (40) и используя формулы (50)-(51), получим:

$$\left\{\begin{array}{lcc}
\mathbf{J}_A & = & \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}(t_n)\right], \\
\mathbf{Q}_A & = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-t_n^2}, \\
\mathbf{S}_A & = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}}t_ne^{-t_n^2} + \frac{1}{4}\left[1 - \mathrm{erf}(t_n)\right], \\
\mathbf{J}_i & = & \frac{1}{2}\left(\mathrm{erf}(t_i) - \mathrm{erf}(t_{i-1})\right), \\
\mathbf{Q}_i & = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(e^{-t_{i-1}^2} - e^{-t_i^2}), \\
\mathbf{S}_i & = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(t_{i-1}e^{-t_{i-1}^2} - t_ie^{-t_i^2}) + \frac{1}{4}\left[\mathrm{erf}(t_i) - \mathrm{erf}(t_{i-1})\right], \\
\mathbf{J}_C & = & \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{erf}(t_0)}{2}, \\
\mathbf{Q}_C & = & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-t_0^2}, \\
\mathbf{S}_C & = & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}t_0e^{-t_0^2} + \frac{1}{4}\left[1 + \mathrm{erf}(t_0)\right].
\end{array}\right. \tag{53}$$

Обозначим

$$\mathcal{L}_n = \int t^ne^{-t^2}dt. \tag{54}$$

Для интегралов $\mathcal{L}_n$ справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathcal{L}_n = -\frac{1}{2}t^{n-1}e^{-t^2} + \frac{n-1}{2}\mathcal{L}_{n-2}. \tag{55}$$

B)

$$W_b(t) = te^{-t^2/2}. \tag{56}$$

Для этой функции

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_b(t)dt = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} tW_b(t)dt = \sqrt{2\pi}, \quad \text{а} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2W_b(t)dt = 0.$$

таким образом функция $W_b(t)$ является материнскими вейвлетом, называемым WAVE-вейвлетом (с точностью до множителя).

Неопределенный интеграл

$$\int W_b(t)dt = \int te^{-t^2/2}dt = -e^{-t^2/2} + C. \tag{57}$$

а интеграл

$$\int tW_b(t)dt = \int t^2e^{-t^2/2}dt = -te^{-t^2/2} + \int e^{-t^2/2}dt. \tag{58}$$

Важный интеграл

$$\int e^{-t^2/2}dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C \tag{59}$$

Тогда интеграл

$$\int tW_b(t)dt = \int t^2e^{-t^2/2}dt = -te^{-t^2/2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\mathrm{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C. \tag{60}$$

а интеграл

$$\int t^2W_b(t)dt = \int t^3e^{-t^2/2}dt = -(2+t^2)e^{-t^2/2} + C. \tag{61}$$

Используя выражения (57)-(60) и подставляя выражение (56) в формулы (40), получим:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_A &= & e^{-t_n^2/2}, \\ \mathbf{Q}_A &= & t_ne^{-t_n^2/2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{t_n}{\sqrt{2}}\right)\right), \\ \mathbf{S}_A &= & (2+t_n^2)e^{-t_n^2/2}, \\ \mathbf{J}_i &= & e^{-t_{i-1}^2/2} - e^{-t_i^2/2}, \\ \mathbf{Q}_i &= & t_{i-1}e^{-t_{i-1}^2/2} - t_ie^{-t_i^2/2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\mathrm{erf}(\frac{t_i}{\sqrt{2}}) - \mathrm{erf}(\frac{t_{i-1}}{\sqrt{2}})\right) \\ \mathbf{S}_i &= & (2+t_{i-1}^2)e^{-t_{i-1}^2/2} - (2+t_i^2)e^{-t_i^2/2}, \\ \mathbf{J}_C &= & -e^{-t_0^2/2}, \\ \mathbf{Q}_C &= & -t_0e^{-t_0^2/2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1 + \mathrm{erf}\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right)\right), \\ \mathbf{S}_C &= & -(2+t_0^2)e^{-t_0^2/2}. \end{cases} \tag{62}$$

Обозначим

$$\mathcal{M}_n = \int t^ne^{-t^2/2}dt. \tag{63}$$

Для интегралов $\mathcal{M}_n$ справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathcal{M}_n = -t^{n-1}e^{-t^2/2} + (n-1)\mathcal{M}_{n-2}. \tag{64}$$

Интеграл $\mathcal{M}_n$ определяется выражением (59).

C)

$$W_c(t) = \left(1 - t^2\right)e^{-t^2/2}. \tag{65}$$

Для этой функции

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_c(t)dt = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} tW_c(t)dt = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2W_c(t)dt = -2\sqrt{2\pi}.$$

таким образом функция $W_c(t)$ также является материнскими вейвлетом, называемым МНАТ-вейвлетом (с точностью до множителя).

Неопределенный интеграл

$$\int W_c(t)dt = \int (1-t^2)e^{-t^2/2}dt = te^{-t^2/2} + C, \tag{66}$$

а интегралы

$$\int tW_c(t)dt = \int t(1-t^2)e^{-t^2/2}dt = (t^2+1)e^{-t^2/2} + C, \tag{67}$$

и

$$\int t^2W_c(t)dt = \int (t^2-t^4)e^{-t^2/2}dt = (t^3+2t)e^{-t^2/2} - \sqrt{2\pi}\,\mathrm{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C. \tag{68}$$

Используя соотношения (66) – (68) подставим функцию (65) в формулы (40). Тогда:

$$\left\{\begin{array}{rcc}
\mathbf{J}_A & = & -t_n e^{-t_n^2/2}, \\
\mathbf{Q}_A & = & -(t_n^2+1)e^{-t_n^2/2}, \\
\mathbf{S}_A & = & -(t_n^3+2t_n)e^{-t_n^2/2} - \sqrt{2\pi}\left(1-\mathrm{erf}\left(\frac{t_n}{\sqrt{2}}\right)\right), \\
\mathbf{J}_i & = & t_{i-1}e^{-t_{i-1}^2/2} - t_i e^{-t_i^2/2}, \\
\mathbf{Q}_i & = & (t_{i-1}^2+1)e^{-t_{i-1}^2/2} - (t_i^2+1)e^{-t_i^2/2} \\
\mathbf{S}_i & = & (t_i^3+2t_i)e^{-t_i^2/2} - (t_{i-1}^2+1)e^{-t_{i-1}^2/2} + \sqrt{2\pi}\left(\mathrm{erf}\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{t_n}{\sqrt{2}}\right)\right), \\
\mathbf{J}_C & = & t_0 e^{-t_0^2/2}, \\
\mathbf{Q}_C & = & (t_0^2+1)e^{-t_0^2/2}, \\
\mathbf{S}_C & = & (t_0^3+2t_0)e^{-t_o^2/2} - \sqrt{2\pi}\left(1+\mathrm{erf}\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right)\right).
\end{array}\right. \tag{69}$$

D)

$$W_d(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}. \tag{70}$$

В данном случае

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_d(t)dt = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} tW_d(t)dt = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2W_d(t)dt = 1,$$

то есть функция $W_d(t)$ является фильтром, также называемым гауссовым.

Интегралы (замена $t = \sqrt{2}u$, $u = t/\sqrt{2}$)

$$\int W_d(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-t^2/2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int e^{-u^2}du = \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) + C, \tag{71}$$

$$\int tW_d(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int te^{-t^2/2}dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2} + C, \tag{72}$$

а

$$\int t^2W_d(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int t^2e^{-t^2/2}dt = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{-t^2/2} + \frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right). \tag{73}$$

Подставляя выражение (70) в формулы (40) и используя формулы (71)-(73), получим:

$$\left\{\begin{array}{lcc}
\mathbf{J}_A & = & \frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{t_n}{\sqrt{2}}\right)\right], \\
\mathbf{Q}_A & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t_n^2/2}, \\
\mathbf{S}_A & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t_n e^{-t_n^2/2}+\frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{t_n}{\sqrt{2}}\right)\right], \\
\mathbf{J}_i & = & \frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{t_{i-1}}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{t_i}{\sqrt{2}}\right)\right], \\
\mathbf{Q}_i & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-t_i^2/2}-e^{-t_{i-1}^2/2}\right] \\
\mathbf{S}_i & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[t_{i-1}e^{-t_{i-1}^2/2}-t_i e^{-t_i^2/2}\right]+\frac{1}{2}\left[e^{-t_i^2/2}-e^{-t_{i-1}^2/2}\right] \\
\mathbf{J}_C & = & \frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right)\right], \\
\mathbf{Q}_C & = & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t_0^2/2}, \\
\mathbf{S}_C & = & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t_0 e^{-t_0^2/2}+\frac{2}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right)\right].
\end{array}\right. \tag{74}$$

E)

$$W_e(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^2e^{-t^2/2}. \tag{75}$$

В данном случае

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}W_e(t)dt=1,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}tW_e(t)dt=0,\quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}t^2W_e(t)dt=3,$$

то есть функция $W_e(t)$ является фильтром (квази-гауссовым).

Неопределенные интегралы

$$\int W_e(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int t^2e^{-t^2/2}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{-t^2/2}+\frac{1}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \tag{76}$$

а

$$\int tW_e(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int t^3e^{-t^2/2}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2+t^2)e^{-t^2/2}+C, \tag{77}$$

$$\int t^2W_e(t)dt=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int t^4e^{-t^2/2}dt=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(t^3+3t)e^{-t^2/2}+\frac{3}{2}\,\mathrm{erf}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+C. \tag{78}$$

Подставляя выражение (75) в формулы (40) и используя формулы (76)-(78), получим:

$$\left\{\begin{array}{lcc}
\mathbf{J}_A & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t_n e^{-t_n^2/2}+\frac{1}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{t_n}{\sqrt{2}}\right)\right], \\
\mathbf{Q}_A & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2+t_n^2)e^{-t_n^2/2}, \\
\mathbf{S}_A & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(t_n^3+3t_n)e^{-t_n^2/2}+\frac{3}{2}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{t_n}{\sqrt{2}}\right)\right], \\
\mathbf{J}_i & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[t_{i-1}e^{-t_{i-1}^2/2}-t_i e^{-t_i^2/2}\right]+\frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{t_i}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{t_{i-1}}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
\mathbf{Q}_i & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[(2+t_i^2)e^{-t_i^2/2}-(2+t_{i-1}^2)e^{-t_{i-1}^2/2}\right] \\
\mathbf{S}_i & = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[(t_{i-1}^3+3t_{i-1})e^{-t_{i-1}^2/2}-(t_i^3+3t_i)e^{-t_i^2/2}\right]+\frac{3}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{t_i}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{erf}\left(\frac{t_{i-1}}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
\mathbf{J}_C & = & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t_0 e^{-t_0^2/2}+\frac{1}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right)\right], \\
\mathbf{Q}_C & = & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(2+t_0^2)e^{-t_0^2/2}, \\
\mathbf{S}_C & = & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(t_0^3+3t_0)e^{-t_0^2/2}+\frac{3}{2}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{t_0}{\sqrt{2}}\right)\right].
\end{array}\right. \tag{79}$$

F)

$$W_f(t) = \frac{1}{2}e^{-|t|}. \tag{80}$$

В данном случае

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_f(t)dt = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} tW_f(t)dt = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 W_f(t)dt = 4,$$

то есть функция $W_d(t)$ является фильтром (экспоненциальным).

Неопределенные интегралы

$$\begin{cases} \int W_f(t)dt = \frac{1}{2}\int e^t dt & = \frac{1}{2}e^t + C, & t \le 0, \\ \int W_f(t)dt = \frac{1}{2}\int e^{-t} dt & = -\frac{1}{2}e^{-t} + C, & t \ge 0. \end{cases} \tag{81}$$

Аналогично

$$\begin{cases} \int tW_f(t)dt = \frac{1}{2}\int te^t dt & = \frac{1}{2}(t-1)e^t + C, & t \le 0, \\ \int tW_f(t)dt = \frac{1}{2}\int te^{-t} dt & = -\frac{1}{2}(t+1)e^{-t} + C, & t \ge 0. \end{cases} \tag{82}$$

А также

$$\begin{cases} \int t^2W_f(t)dt = \frac{1}{2}\int t^2e^t dt & = \frac{1}{2}(t^2-2t+2)e^t + C, & t \le 0, \\ \int t^2W_f(t)dt = \frac{1}{2}\int t^2e^{-t} dt & = -\frac{1}{2}(t^2+2t+2)e^{-t} + C, & t \ge 0. \end{cases} \tag{83}$$

Подставляя выражение (80) в формулы (40) и используя соотношения (81)-(83), найдем:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_A = 1 - \frac{1}{2}e^{-|t_n|}, & t_n \le 0, & \mathbf{J}_A = \frac{1}{2}e^{-t_n}, & t_n > 0, \\ \mathbf{Q}_A = \frac{1}{2}[-1 + (|t_n|+1)]e^{-|t_n|} & t_n \le 0, & \mathbf{Q}_A = \frac{1}{2}(t_n+1)e^{-t_n}, & t_n > 0, \\ \mathbf{S}_C & = & & . \end{cases} \tag{84}$$

η)

$$W_\eta(t) = \sqrt{\frac{\eta}{\pi}}e^{-\eta t^2}. \tag{85}$$

Для этой функции

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_\eta(t)dt = 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} tW_\eta(t)dt = 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 W_\eta(t)dt = \frac{1}{2\eta},$$

то есть функция $W_\eta(t)$ является фильтром, который можно назвать обобщенным гауссовым. Очевидно, что $W_\eta(t) = W_a(t)$ при $\eta = 1$ и $W_\eta(t) = W_d(t)$ при $\eta = 1/2$.

Неопределенные интегралы (замена $u = \sqrt{\eta}t$, $t = u/\sqrt{\eta}$, $dt = du/\sqrt{\eta}$)

$$\int W_\eta(t)dt = \sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\int e^{-\eta t^2}dt = \frac{1}{2}\mathrm{erf}\,(\sqrt{\eta}\,t) + C. \tag{86}$$

а

$$\int tW_\eta(t)dt = \sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\int te^{-\eta t^2}dt = -\frac{1}{2\sqrt{\eta\pi}}e^{-\eta t^2} + C, \tag{87}$$

$$\int t^2 W_\eta(t) dt = \sqrt{\frac{\eta}{\pi}} \int t^2 e^{-\eta t^2} dt = -\frac{1}{2\sqrt{\eta\pi}} t e^{-\eta t^2} + \frac{1}{4\eta} \operatorname{erf}\,(\sqrt{\eta}\, t) + C. \tag{88}$$

Подставляя выражение (85) в формулы (40) и используя формулы (86)-(88), получим:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_A &= \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_n\right)\right], \\ \mathbf{Q}_A &= \frac{1}{2\sqrt{\eta\pi}} e^{-\eta t_n^2}, \\ \mathbf{S}_A &= \frac{1}{2\sqrt{\eta\pi}} t_n e^{-\eta t_n^2} + \frac{1}{4\eta}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_n\right)\right], \\ \mathbf{J}_i &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_i\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_{i-1}\right)\right], \\ \mathbf{Q}_i &= \frac{1}{2\sqrt{\eta\pi}}\left[e^{-\eta t_{i-1}^2} - e^{-\eta t_i^2}\right], \\ \mathbf{S}_i &= \frac{1}{2\sqrt{\eta\pi}}\left[t_{i-1} e^{-\eta t_{i-1}^2} - t_i e^{-\eta t_i^2}\right] + \frac{1}{4\eta}\left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_i\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_{i-1}\right)\right], \\ \mathbf{J}_C &= \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_0\right)\right], \\ \mathbf{Q}_C &= -\frac{1}{2\sqrt{\eta\pi}} e^{-\eta t_0^2}, \\ \mathbf{S}_C &= -\frac{1}{2\sqrt{\eta\pi}} t_0 e^{-\eta t_0^2} + \frac{1}{4\eta}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_0\right)\right]. \end{cases} \tag{89}$$

2.3 Свертка модельной функции $f(x)$ с анализирующими функциями

2.3.1 Модельная функция $f(z) = a + be^{-\alpha z^2}$

Используя замену переменных (26) в интеграле свертки (13), получим:

$$(f * W)_S(x) = S^{1-\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x - tS) W\,(t)\, dt = S^{1-\beta} I_S. \tag{90}$$

Рассмотрим следующую модельную функцию:

$$f(z) = a + be^{-\alpha z^2}. \tag{91}$$

Подставим функцию (91) в интеграл (90), тогда:

$$I_S = aI_S^0 + bI_S^\alpha, \tag{92}$$

где

$$I_S^0 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(t) dt, \quad I_S^\alpha = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-tS)^2} W(t) dt. \tag{93}$$

Для анализирующих функций $W_a(t)$ - $W_e(t)$, определенных в параграфе (2.2.2), найдем:

$$I_S^0 = \begin{cases} 1 & , \quad W(t) = W_a(t), \\ 0 & , \quad W(t) = W_b(t), \\ 0 & , \quad W(t) = W_c(t), \\ 1 & , \quad W(t) = W_d(t), \\ 1 & , \quad W(t) = W_e(t), \\ 1 & , \quad W(t) = W_f(t), \\ 1 & , \quad W(t) = W_\eta(t). \end{cases} \tag{94}$$

и

$$I_S^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(p_0t^2+qt+r)}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_0(p_0,q,r) & , \quad W(t) = W_a(t), \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} te^{-(pt^2+qt+r)}dt = I_1(p,q,r) & , \quad W(t) = W_b(t), \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1-t^2)e^{-(pt^2+qt+r)}dt = I_0(p,q,r) - I_2(p,q,r) & , \quad W(t) = W_c(t), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(pt^2+qt+r)}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_0(p,q,r) & , \quad W(t) = W_d(t), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2e^{-(pt^2+qt+r)}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} I_2(p,q,r) & , \quad W(t) = W_e(t), \\ & , \quad W(t) = W_f(t), \\ \sqrt{\frac{\eta}{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(p_\eta t^2+qt+r)}dt = \sqrt{\frac{\eta}{\pi}} I_0(p_\eta,q,r) & , \quad W(t) = W_\eta(t). \end{cases} \tag{95}$$

Здесь

$$p_0 = \alpha S^2 + 1,\ p = \alpha S^2 + 1/2,\ p_\eta = \alpha S^2 + \eta,\ q = -2\alpha x S,\ r = \alpha x^2. \tag{96}$$

Параметр $p_\eta = p_0$ при $\eta = 1$ и $p_\eta = p$ при $\eta = 1/2$.

Используя соотношения (277) и (285) для интегралов $I_n(p,q,r)$, получим:

$$I_S^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{p_0^{1/2}} e^{-\delta_0 x^2} & , \quad W(t) = W_a(t), \\ \frac{\sqrt{\pi}|q|}{2p^{3/2}} e^{-\delta x^2} & , \quad W(t) = W_b(t), \\ \frac{\sqrt{\pi}}{p^{1/2}} \left[1 - \frac{1}{2p} - \frac{q^2}{4p^2}\right] e^{-\delta x^2} & , \quad W(t) = W_c(t), \\ \frac{1}{\sqrt{2}p^{1/2}} e^{-\delta x^2} & , \quad W(t) = W_d(t), \\ \sqrt{\frac{\eta}{\alpha S^2+\eta}} e^{-\delta_\eta x^2} & , \quad W(t) = W_\eta(t). \end{cases} \tag{97}$$

где

$$\begin{cases} \delta_0 = \alpha - \frac{\alpha^2 S^2}{p_0} & = & \frac{\alpha}{\alpha S^2+1} x^2, \\ \delta = \alpha - \frac{\alpha^2 S^2}{p} & = & \frac{\alpha}{2(\alpha S^2+1/2)} x^2, \\ \delta_\eta = \alpha - \frac{\alpha^2 S^2}{p} & = & \frac{\alpha\eta}{\alpha S^2+\eta} x^2. \end{cases} \tag{98}$$

2.3.2 Интеграл $I_S^{\alpha\eta}$.

Рассмотрим следующий важный интеграл:

$$I_S^{\alpha\eta} = \int\limits_{z_A}^{z_C} e^{-\alpha z^2} W_\eta\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \tag{99}$$

Который является аналогом интеграла I_B для модельной функции (91) и представляют собой обобщение интеграла I_S^α в формуле (93). Анализирующая функция $W_\eta(t)$ определена формулой (85).

Подстановкой $t = (x-z)/S$, $z = x - tS$, $dz = -Sdt$ интеграл (99) сводится к интегралу

$$I_S^{\alpha\eta} = S \int\limits_{t_A}^{t_C} e^{-\alpha(x-tS)^2} W_\eta(t)dt. \tag{100}$$

где пределы интегрирования

$$t_A = \frac{x - z_C}{S}, \quad t_C = \frac{x - z_A}{S}. \tag{101}$$

Подставляя выражение (85), получим:

$$I_S^{\alpha\eta} = S\sqrt{\frac{\eta}{\pi}} \cdot \int\limits_{t_A}^{t_C} e^{-[\alpha(x-tS)^2+\eta t^2]}dt \tag{102}$$

Представим показатель степени в формуле (102) в следующем виде

$$\alpha(x - tS)^2 + \eta t^2 = pt^2 + qt + r, \tag{103}$$

где

$$\begin{cases} p &= \eta + \alpha S^2, \\ q &= -2\alpha x S, \\ r &= \alpha x^2. \end{cases} \tag{104}$$

Преобразуем выражение в формуле (103):

$$pt^2 + qt + r = p\left(t + \frac{q}{2p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{4p} = u^2 + \Gamma. \tag{105}$$

Здесь

$$u = p^{1/2}\left(t + \frac{q}{2p}\right), \quad \Gamma = r - \frac{q^2}{4p} = \frac{\eta \cdot \alpha x^2}{\alpha S^2 + \eta}. \tag{106}$$

Сделав замену переменных

$$t \to u = p^{1/2}(t + \frac{q}{2p}), \quad t = \frac{u}{p^{1/2}} - \frac{q}{2p}, \quad dt = \frac{1}{p^{1/2}}du. \tag{107}$$

в интеграле (102), получим:

$$I_S^{\alpha\eta} = S\sqrt{\frac{\eta}{\pi}} \cdot \frac{e^{-\Gamma}}{p^{1/2}} \cdot \int\limits_{u_A}^{u_C} e^{-u^2}du. \tag{108}$$

Здесь пределы интегрирования

$$u_A = p^{1/2}\left(t_A + \frac{q}{2p}\right), \quad u_C = p^{1/2}\left(t_C + \frac{q}{2p}\right). \tag{109}$$

Подставив выражения (101) для t_A и t_C, найдем:

$$\begin{cases} u_A &= (\alpha S^2 + \eta)^{1/2}\frac{1}{S}\left(\frac{\eta}{\eta+\alpha S^2}x - z_C\right), \\ u_C &= (\alpha S^2 + \eta)^{1/2}\frac{1}{S}\left(\frac{\eta}{\eta+\alpha S^2}x - z_A\right). \end{cases} \tag{110}$$

Запишем сотношение (108) в более удобном для численных вычислений виде:

$$I_S^{\alpha\eta} = \frac{S}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\alpha S^2 + \eta}} \cdot e^{-\Gamma} \cdot \Big(\mathrm{erf}(u_C) - \mathrm{erf}(u_A)\Big). \tag{111}$$

В важном случае $S = 1$

$$\begin{cases} \Gamma_A &= \frac{\alpha\eta}{\alpha+\eta}x^2, \\ u_A &= (\alpha + \eta)^{1/2}\left(\frac{\eta}{\eta+\alpha}x - z_C\right), \\ u_C &= (\alpha + \eta)^{1/2}\left(\frac{\eta}{\eta+\alpha}x - z_A\right). \end{cases} \tag{112}$$

2.3.3 Интеграл $I_S^{\alpha\eta t}$.

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I_S^{\alpha\eta t} = \int\limits_{z_A}^{z_C} e^{-\alpha z^2} W_{\eta t}\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \tag{113}$$

где

$$W_{\eta t} = te^{-\eta t^2}. \tag{114}$$

Подстановкой $t = (x-z)/S$, $z = x - tS$, $dz = -Sdt$ интеграл (113) сводится к следующему интегралу:

$$I_S^{\alpha\eta t} = S\int\limits_{t_A}^{t_C} te^{-[\alpha(x-tS)^2+\eta t^2]}dt = S\mathbf{Q}_B^{\alpha\eta}. \tag{115}$$

где пределы интегрирования

$$t_A = \frac{x-z_C}{S}, \quad t_C = \frac{x-z_A}{S}. \tag{116}$$

Параметр

$$\mathbf{Q}_B^{\alpha\eta} = \int\limits_{t_A}^{t_C} te^{-(pt^2+qt+r)}dt. \tag{117}$$

где параметры p, q и r определены формулами (104).

Используем замену переменных (107), получим:

$$\mathbf{Q}_B^{\alpha\eta} = \frac{e^{-\Gamma}}{p^{1/2}}\left(\frac{1}{p^{1/2}}\int\limits_{u_A}^{u_C} ue^{-u^2}du - \frac{q}{2p}\int\limits_{u_A}^{u_C} e^{-u^2}du\right) \tag{118}$$

Используя формулы (87) и (88), найдем:

$$\mathbf{Q}_B^{\alpha\eta} = \frac{e^{-\Gamma}}{2(\alpha S^2+\eta)}\left[e^{-u_A^2} - e^{-u_C^2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha S^2+\eta}}\,\alpha Sx\left(\mathrm{erf}(u_C) - \mathrm{erf}(u_A)\right)\right]. \tag{119}$$

2.3.4 Модельная функция $f(z) = a + be^{-\alpha z^2}$ на ограниченном интервале $[z_A, z_C]$

Рассмотрим следующую модельную функцию, являющуюся обобщением модельной функции $f(z) = a + be^{-\alpha z^2}$:

$$f(z) = \begin{cases} f_A & , \quad z < z_A, \\ a + be^{-\alpha z^2} & , \quad z \in [z_A, z_C], \\ f_C & , \quad z > z_C. \end{cases} \tag{120}$$

Подставим функцию (120) в интеграл (90), тогда:

$$I_S = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)W\left(\frac{x-z}{S}\right)dt = I_A + I_B + I_C. \tag{121}$$

Здесь

$$
\begin{cases}
I_A = f_A \int\limits_{-\infty}^{z_A} W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz = f_A S \int\limits_{t_C}^{\infty} W(t)dt & = \quad f_A S \mathbf{J}_A, \\
I_B = \int\limits_{z_A}^{z_C} (a + be^{-\alpha z^2}) W\left(\frac{x-z}{S}\right) dt = S \int\limits_{t_A}^{t_C} (a + be^{-\alpha(x-tS)^2}) W(t)dt & = \\
aS\mathbf{J}_B + bS \int\limits_{t_A}^{t_C} e^{-\alpha(x-tS)^2} W(t)dt = aS\mathbf{J}_B + bS\mathbf{J}_S^{\alpha}, \\
I_C = f_C \int\limits_{z_C}^{\infty} W\left(\frac{x-z}{S}\right) dz = f_C S \int\limits_{-\infty}^{t_A} W(t)dt & = \quad f_C S \mathbf{J}_C.
\end{cases}
\tag{122}
$$

Интегралы $\mathbf{J}_A$ и $\mathbf{J}_C$ определены соотношениями (40), а интеграл $\mathbf{J}_B$ — формулами (46) с заменами $t_0 \to t_A$ и $t_n \to t_C$.

Здесь

$$
t_A = \frac{x - z_C}{S}, \quad t_C = \frac{x - z_A}{S}. \tag{123}
$$

Для анализирующих функций $W_a(t)$ - $W_\eta(t)$, определенных в параграфе (2.2.2), найдем:

$$
\mathbf{J}_A = \begin{cases}
\frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}(t_C)\right] & , \quad W(t) = W_a(t), \\
e^{-t_C^2/2} & , \quad W(t) = W_b(t), \\
-t_C e^{-t_C^2/2} & , \quad W(t) = W_c(t), \\
\frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{t_C}{\sqrt{2}}\right)\right] & , \quad W(t) = W_d(t), \\
\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_C e^{-t_C^2/2} + \frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\frac{t_C}{\sqrt{2}}\right)\right] & , \quad W(t) = W_e(t), \\
\frac{1}{2}\left[1 - \mathrm{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_C\right)\right] & , \quad W(t) = W_\eta(t).
\end{cases}
\tag{124}
$$

Параметр

$$
\mathbf{J}_B = \begin{cases}
\frac{1}{2}\left(\mathrm{erf}(t_C) - \mathrm{erf}(t_A)\right) & , \quad W(t) = W_a(t), \\
e^{-t_A^2/2} - e^{-t_C^2/2} & , \quad W(t) = W_b(t), \\
t_A e^{-t_A^2/2} - t_C e^{-t_C^2/2} & , \quad W(t) = W_c(t), \\
\frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{t_A}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{t_C}{\sqrt{2}}\right)\right] & , \quad W(t) = W_d(t), \\
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[t_A e^{-t_A^2/2} - t_C e^{-t_C^2/2}\right] + \frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{t_C}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{t_A}{\sqrt{2}}\right)\right] & , \quad W(t) = W_e(t), \\
\frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_C\right) - \mathrm{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_A\right)\right] & , \quad W(t) = W_\eta(t).
\end{cases}
\tag{125}
$$

А параметр

$$
\mathbf{J}_C = \begin{cases}
\frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}(t_A)\right] & , \quad W(t) = W_a(t), \\
-e^{-t_A^2/2} & , \quad W(t) = W_b(t), \\
t_A e^{-t_A^2/2} & , \quad W(t) = W_c(t), \\
\frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{t_A}{\sqrt{2}}\right)\right] & , \quad W(t) = W_d(t), \\
-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_A e^{-t_A^2/2} + \frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\frac{t_A}{\sqrt{2}}\right)\right] & , \quad W(t) = W_e(t), \\
\frac{1}{2}\left[1 + \mathrm{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_A\right)\right] & , \quad W(t) = W_\eta(t).
\end{cases}
\tag{126}
$$

Интеграл

$$
\mathbf{J}_S^{\alpha} = \int\limits_{t_A}^{t_C} e^{-\alpha(x-tS)^2} W(t)dt. \tag{127}
$$

В случае $W(t) = W_\eta(t)$ определенный формулой (100) интеграл $I_S^{\alpha\eta} = S\mathbf{J}_S^\alpha$.

Используя подход, описанный в параграфе (2.3.2), найдем:

$$\mathbf{J}_S^\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\alpha S^2+1}} \cdot e^{-\Gamma_a} \cdot \Big(\mathrm{erf}(u_C) - \mathrm{erf}(u_A)\Big) & , \quad W(t) = W_a(t), \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\alpha S^2+1}} \cdot e^{-\Gamma_d} \cdot \Big(\mathrm{erf}(u_C) - \mathrm{erf}(u_A)\Big) & , \quad W(t) = W_d(t), \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\eta}{\alpha S^2+\eta}} \cdot e^{-\Gamma_\eta} \cdot \Big(\mathrm{erf}(u_C) - \mathrm{erf}(u_A)\Big) & , \quad W(t) = W_\eta(t). \end{cases} \tag{128}$$

При $W(t) = W_\eta(t)$

$$\begin{cases} \Gamma_\eta &= \frac{\alpha\eta}{\alpha S^2+\eta} x^2, \\ u_A &= (\alpha S^2+\eta)^{1/2}\frac{1}{S}\left(\frac{\eta}{\eta+\alpha S^2}x - z_C\right), \\ u_C &= (\alpha S^2+\eta)^{1/2}\frac{1}{S}\left(\frac{\eta}{\eta+\alpha S^2}x - z_A\right). \end{cases} \tag{129}$$

В случае $W(t) = W_a(t)$ и $W(t) = W_d(t)$ параметры Γ, u_A и u_C могут быть могут быть получены из соотношений (129) подстановкой $\eta = 1$ и $\eta = 1/2$ соответственно.

2.3.5 Линейная модельная функция.

Пусть модельная функция является линейной:

$$f(z) = A + Bz. \tag{130}$$

Тогда

$$f(x - tS) = A + B(x - tS) = (A + Bx) - (BS)t. \tag{131}$$

Свертка модельной функции с анализирующей функцией $W(t)$ выражается формулой (90). Подстановка модельной функции (130) в формулу (90) приводит к следующему соотношению:

$$I_S = (A + Bx)I_S^0 - (BS)I_S^1, \tag{132}$$

где величина I_S^0 определяется формулой (93), а

$$I_S^1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} tW(t)dt, \quad - \tag{133}$$

первый момент анализирующей функции $W(t)$.

Для функций $W_a(t)$ - $W_e(t)$, определенных в параграфе (2.2.2), параметр I_S^0 определяется формулой (94). Параметр

$$I_S^1 = \begin{cases} 0 & , \quad W(t) = W_a(t), \\ \sqrt{2\pi} & , \quad W(t) = W_b(t), \\ 0 & , \quad W(t) = W_c(t), \\ 0 & , \quad W(t) = W_d(t), \\ 0 & , \quad W(t) = W_e(t). \end{cases} \tag{134}$$

Окончательно можно записать:

$$I_S = (A + Bx)I_S^0 - (BS)I_S^1 = \begin{cases} A + Bx & , \quad W(t) = W_a(t), \\ -\sqrt{2\pi}BS & , \quad W(t) = W_b(t), \\ 0 & , \quad W(t) = W_c(t), \\ A + Bx & , \quad W(t) = W_d(t), \\ A + Bx & , \quad W(t) = W_e(t). \end{cases} \tag{135}$$

2.3.6 Кусочно-линейная модельная функция

Рассмотрим кусочно-линейную (мульти-линейную) модельную функцию:

$$f(z) = \begin{cases} f_A + k_A(z - z_A) & , \quad z < z_A, \\ f_A + k_{AC}(z - z_A) & , \quad z \in [z_A, z_C], \\ f_C + k_C(z - z_C) & , \quad z > z_C. \end{cases} \tag{136}$$

Здесь $z_A, z_C, f_A, k_A, f_C, k_C$ — параметры модельной функции. При этом $z_A < z_C$, а

$$k_{AC} = \frac{f_C - f_A}{z_C - z_A}.$$

Тогда

$$f(x - tS) = \begin{cases} \alpha_C + \beta_C t & , \quad t < t_A = (x - z_C)/S, \\ \alpha_B + \beta_B t & , \quad t \in [t_A, t_C], \\ \alpha_A + \beta_A t & , \quad t > t_C = (x - z_A)/S. \end{cases} \tag{137}$$

Здесь

$$\begin{cases} \alpha_A = f_A + k_A(x - z_A) & , \quad \beta_A = -k_A S, \\ \alpha_B = f_A + k_{AC}(x - z_A) & , \quad \beta_B = -k_{AC} S, \\ \alpha_C = f_C + k_C(x - z_C) & , \quad \beta_C = -k_C S. \end{cases} \tag{138}$$

Подставляя соотношения (137) в формулу (90) и используя замену переменных (26), найдем:

$$(f * W)_S(x) = S^{1-\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x - tS) W(t)\, dt = S^{1-\beta} I_S^{ABC}, \tag{139}$$

где

$$I_S^{ABC} = S^{1-\beta} \left[\alpha_A \mathbf{J}_A + \beta_A \mathbf{Q}_A + \alpha_B \mathbf{J}_B + \beta_B \mathbf{Q}_B + \alpha_C \mathbf{J}_C + \beta_C \mathbf{Q}_C\right], \tag{140}$$

Параметры $\mathbf{J}_A$ – $\mathbf{Q}_C$ для анализирующей функции $W_a(t)$ (см. формулу (47)) равны:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_A = & \int\limits_{t_C}^{\infty} W_a(t)dt, & = & \frac{1}{2} - \frac{\mathrm{erf}(t_C)}{2}, \\ \mathbf{Q}_A = & \int\limits_{t_C}^{\infty} tW_a(t)dt, & = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-t_C^2}, \\ \mathbf{J}_B = & \int\limits_{t_A}^{t_C} W_a(t)dt, & = & \frac{1}{2}\left(\mathrm{erf}(t_A) - \mathrm{erf}(t_C)\right) \\ \mathbf{Q}_B = & \int\limits_{t_A}^{t_C} tW_a(t)dt, & = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(e^{-t_C^2} - e^{-t_A^2}), \\ \mathbf{J}_C = & \int\limits_{-\infty}^{t_A} W_a(t)dt, & = & \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{erf}(t_A)}{2}, \\ \mathbf{Q}_C = & \int\limits_{-\infty}^{t_A} tW_a(t)dt & = & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-t_A^2}. \end{cases} \tag{141}$$

Соответствующие соотношения для анализирующих функций $W_b(t)$–$W_e(t)$ могут быть получены из формул (62), (69), (74) и (79) с заменами $t_n \to t_C$ и $t_0 \to t_A$.

2.3.7 Кусочно-квадратичная модельная функция

Рассмотрим кусочно-квадратичную модельную функцию:

$$f(z) = \begin{cases} f_A + k_A(z - z_A) & , \quad z < z_A, \\ Az^2 + Bz + C & , \quad z \in [z_A, z_C], \\ f_C + k_C(z - z_C) & , \quad z > z_C. \end{cases} \tag{142}$$

Здесь $z_A, z_C, f_A, k_A, f_C, k_C, A, B, C$ — параметры модельной функции. При этом $z_A < z_C$, а значения f_A и f_C выбираются таким образом, чтобы функция $f(z)$ была бы непрерывной, то есть

$$f_A = Az_A^2 + Bz_A + C, \quad f_C = Az_C^2 + Bz_C + C. \tag{143}$$

Тогда

$$f(x - tS) = \begin{cases} f_A & , \quad t < t_A = (x - z_C)/S, \\ Pt^2 + Qt + R & , \quad t \in [t_A, t_C], \\ f_C & , \quad t > t_C = (x - z_A)/S. \end{cases} \tag{144}$$

Здесь

$$P = AS^2, \ Q = -S(2xA + B), \ R = Ax^2 + Bx + C. \tag{145}$$

Подставляя в формулу (90) выражения (144) и используя замену переменных (26), найдем:

$$(f * W)_S(x) = S^{1-\beta} \left(I_A^s + I_B^s + I_C^s \right), \tag{146}$$

где

$$I_A^s = f_A \int_{t_C}^{\infty} W(t)dt = f_A \mathbf{J}_A, \quad I_C^s = f_C \int_{-\infty}^{t_A} tW(t)dt = f_C \mathbf{J}_C. \tag{147}$$

Интегралы $\mathbf{J}_A$ и $\mathbf{J}_C$ даются формулами (141), а интеграл

$$I_B^s = \int_{t_A}^{t_C} (Pt^2 + Qt + R)W(t)dt = P\mathbf{S}_B + Q\mathbf{Q}_B + R\mathbf{J}_B. \tag{148}$$

Здесь интегралы $\mathbf{J}_B$ и $\mathbf{K}_B$ даются формулами (141).

Неопределенный интеграл

$$\int t^3 e^{-t^2/2} dt = -(t^2 + 2)e^{-t^2/2} + C, \tag{149}$$

а интегралы

$$\int t^4 e^{-t^2/2} dt = -(t^3 + 3t)e^{-t^2/2} + 3 \int e^{-t^2/2} dt. \tag{150}$$

$$\int t^2 W_c(t)dt = \int (t^2 - t^4)e^{-t^2/2} dt = (t^3 + 2t)e^{-t^2/2} - 2 \int e^{-t^2/2} dt. \tag{151}$$

Тогда

$$\mathbf{S}_B = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[t_A e^{-t_A^2} - t_C e^{-t_C^2}\right] + \frac{1}{4}\left[\operatorname{erf}(t_C) - \operatorname{erf}(t_A)\right], & W(t)=W_a(t), \\ (t_A^2+2)e^{-t_A^2/2} - (t_C^2+2)e^{-t_C^2/2}, & W(t)=W_b(t), \\ (t_C^3+2t_C)e^{-t_C^2/2} - (t_A^3+2t_A)e^{-t_A^2/2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{t_A}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{t_C}{\sqrt{2}}\right)\right), & W(t)=W_c(t), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(t_A e^{-t_A^2/2} - t_C e^{-t_C^2/2}\right) + \left(\operatorname{erf}\left(\frac{t_C}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{t_A}{\sqrt{2}}\right)\right), & W(t)=W_d(t), \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left((t_A^3+3t_A)e^{-t_A^2/2} - (t_C^3+3t_C)e^{-t_C^2/2}\right) + & \\ +\frac{3}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{t_C}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{t_A}{\sqrt{2}}\right)\right), & W(t)=W_e(t). \end{cases} \tag{152}$$

3 Сглаживание сигналов

Пусть анализируемая функция задана на конечном одномерном массиве $\{X\}$. Значения массива $\{X\}$ упорядочены:

$$x_0 < x_a < x_2, \dots < x_n.$$

где n — число элементов массива $\{X\}$

Значения функции

$$f_0 = f(x_0), f_1 = f(x_1), f_2 = f(x_2), \dots f_n = f(x_n).$$

Основные методы сглаживания описаны, например, в книге [3]. Будем рассматривать различные методы скользящего среднего. При этом сглаженное $\tilde{f}$ значение функции $f(x)$ в точке $x = x_i$ равно:

$$\tilde{f}(x_i) = \sum_{j=-r}^{j=r} h_j f_{i+j}, \tag{153}$$

где $K = 2r + 1$ — ширина окна фильтра. Значения вектора $\mathbf{h} = \{h_j\}$ (веса сглаживания) выбираются таким образом, чтобы

$$\sum_{j=-r}^{j=r} h_j = 1. \tag{154}$$

Условие (154) позволяет сохранить нормировку сглаживаемой функции. При этом среднее значение сглаженной и исходной функции в окне фильтра сохраняется.

Методы сглаживания различаются в зависимости от ширины фильтра и весов сглаживания. В самом простом случае прямоугольного фильтра $h_j = 1/K$. В модифицированном прямоугольном шаблоне

$$\mathbf{h} = \frac{1}{6}\left[1, 1, 2, 1, 1\right], \tag{155}$$

а в треугольном шаблоне

$$\mathbf{h} = \frac{1}{16}\left[1, 2, 3, 4, 3, 2, 1\right]. \tag{156}$$

Возможны и другие модификации шаблонов сглаживания.

3.1 Краевые эффекты

Важной проблемой всех методов сглаживания является сглаживание анализируемой функции на краях области задания функции. В областях аргумента, находящихся близко от края (значения x_0 и x_n) фильтра, шаблон фильтра выходит за границы области задания.

Сглаживающий фильтр можно применить к внутренним точкам интервала $\{X\}$. Для сглаживания функции в крайних точках можно выбрать один из следующих вариантов:

1. Уменьшать ширину окна по мере приближения к границе диапазона задания функции,
2. симметрично отразить крайние точки, введя мнимые значения с индексами [-r,-r+1,..., -1, 0] и [n+1, n+2, ..., n+r],
3. применить формулу линейного фильтра (153) не к центральной точке окна, а к крайней: для первых r точек – к левой, а для последних — к правой,
4. постулировать, что за пределами области задания значения функции постоянны и равны фиксированным значениям f_A для $x < x_0$ и f_C для $x > x_n$. При этом значения f_A и f_C выбираются из каких-то внешних соображений. Например, для сглаживания профиля линии в нормированном спектре какого-либо астрофизического источника вне профиля линии $f_A = f_C = 1$.
5. так же, как в предыдущем случае, но в качестве f_A и f_C берутся средние значения функции вблизи краев области задания функции $\{X\}$.

Первый вариант приводит к ухудшению качества сглаживания на краях. Второй и третий достаточно универсальны, а 4-й и 5-й применимы в том случае, если поведение функции $f(x)$ за пределами области задания $\{X\}$ достаточно хорошо известны.

3.2 Фильтр Гаусса

Для задания коэффициентов фильтра **h** используются значения функции Гаусса с нулевым средним (математическим ожиданием) и стандартным отклонением σ:

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}. \tag{157}$$

В случае использования фильтра Гаусса коэффициенты $h_j \propto G_\sigma(|x_i - x_{i+j}|)$. Функция Гаусса $G_\sigma(x)$ может быть представлена как масштабированная функция $W_d(x)$, при этом масштаб S соответствует стандартному отклонению σ.

Сглаживание анализируемой функции $f(x)$ с фильтром Гаусса может быть представлено как свертка (13) функции $f(x)$ с масштабируемой функцией Гаусса:

$$\tilde{f}(x) = f_S(x) = (f * G_S)(x) = \frac{1}{S^\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\, G\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \tag{158}$$

Выбор масштабного параметра $\beta = 1/2$ соответствует сохранению нормы сглаживаемой функции

$$\| f_S(x) \|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_S^2(x) dx. \tag{159}$$

Таблица 2: Параметр X_ε в зависимости от масштаба S и точности вычислений ε

S	ε	X_ε	S	ε	X_ε	S	ε	X_ε
0.5	10^{-2}	1.48	1.0	10^{-2}	2.72	2.0	10^{-2}	4.89
	10^{-4}	2.12		10^{-4}	4.07		10^{-4}	7.80
	10^{-6}	2.61		10^{-6}	5.08		10^{-6}	9.88
	10^{-8}	3.02		10^{-8}	5.92		10^{-8}	11.60
4.0	10^{-2}	8.58	8.0	10^{-2}	14.34	16.0	10^{-2}	21.63
	10^{-4}	14.86		10^{-4}	28.20		10^{-4}	53.16
	10^{-6}	19.19		10^{-6}	37.21		10^{-6}	72.00
	10^{-8}	22.71		10^{-8}	44.43		10^{-8}	86.84

3.3 Усеченный фильтр Гаусса

Полуширина масштабированного фильтра Гаусса равна S. В то же время при свертке анализируемой функции $f(x)$ с гауссовой функцией $G_S(x)$ существенный вклад в интеграл свертки дают значения x, существенно дальше отстоящие от максимума функцией Гаусса, чем величина S. То есть реальная ширина функции Гаусса составляет $(3-5)S$.

При больших значениях S ширина функции Гаусса может быть сравнима с шириной области задания функции $f(x)$, $\Delta x = |x_n - x_0|$. Для правильного сглаживания функции в случае больших S возможно использовать усеченные варианты функции Гаусса:

$$G^{bS}(x) = \begin{cases} 0, & x < -b, \\ A^{bS}\,\frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{S}\right)^2}, & x \in [-b, b], \\ 0, & x > b. \end{cases} \tag{160}$$

То есть усеченная функция Гаусса определена только на конечном промежутке $[-d, d]$, где $d > 0$. Усеченная функция Гаусса нормирована:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G^{bS}(x)dx = \int\limits_{-d}^{d} G^{bS}(x)dx = 1. \tag{161}$$

Нормировочный множитель

$$A^{bS} = \mathrm{erf}^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{2}S}\right). \tag{162}$$

Естественные границы промежутка $[-b, b]$ определяются условием

$$G\left(X > X_\varepsilon\right) < \varepsilon, \tag{163}$$

где ε — точность расчета.

$$X_\varepsilon = S \cdot \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon S\sqrt{2\pi}}\right)}. \tag{164}$$

При расчетах свертки анализируемой функции с масштабированной функцией Гаусса с заданной точностью ε достаточно использовать усеченную функцию Гаусса на промежутке $[-X_\varepsilon, X_\varepsilon]$.

Сглаживание анализируемой функции $f(x)$ с усеченным фильтром Гаусса может быть представлено как свертка (13) функции $f(x)$ с масштабируемой усеченной функцией Гаусса:

$$\tilde{f}(x) = (f * G^{bS})(x) = \frac{1}{S^\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\, G^{bS}\left(\frac{x-z}{S}\right) dz = \frac{1}{S^\beta} \int\limits_{x-Sd}^{x+Sb} f(z)\, G^{bS}\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \qquad (165)$$

При больших $S > 1$ интервал $[x - Sb, x + Sb]$ выходит далеко за пределы промежутка x_0, x_n определения функции $f(x)$, поэтому при вычислении интеграла (165) нет необходимых значений $f(z)$.

По этой причине можно предложить следующую процедуру:

1. Выбрать значение $d \le |x_n - x_0|$.
2. Экстраполировать значения функции $f(z)$ в области $[x_0 - d, x_0]$ и $[x_n, x_n + d]$.
3. Фиксировать для каждой точки $x \in [x_0, x_n]$ интервал $[x - d, x + d]$, в котором будет вычисляться интеграл (165).

В этом случае

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{S^\beta} \int\limits_{x-d}^{x+d} f(z)\, G^{dS}\left(\frac{x-z}{S}\right) dz. \qquad (166)$$

Сделав замену $t = (x - z)/S$, $dz = -Sdt$, $z = x - tS$, получим

$$\tilde{f}(x) = S^{1-\beta} \int\limits_{-d/S}^{d/S} f(x - tS)\, G^{dS}(t) dt. \qquad (167)$$

Здесь

$$G^{dS}(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{d}{S}, \\ A^{dS} \cdot \frac{1}{S\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{S}\right)^2}, & t \in [-\frac{d}{S}, \frac{d}{S}], \\ 0, & t > \frac{d}{S}. \end{cases} \qquad (168)$$

Нормировочный множитель

$$A^{dS} = \mathrm{erf}^{-1}\left(\frac{d}{\sqrt{2}S^2}\right). \qquad (169)$$

Для вычисления интеграла (167) можно предложить следующую процедуру. Для каждого значения $x \in [x_0, x_n]$ выбрать все точки $\{z_1, z_2, \ldots, x_K\}$, попадающие в интервал $[x - d, x + d]$. Рассчитать сглаженное значение $\tilde{f}(x)$ по следующей формуле:

$$\tilde{f}(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{K} h_j f(z_j)}{\sum\limits_{j=1}^{K} h_j}. \qquad (170)$$

Здесь статистические веса

$$h_j = G^{dS}\left(\frac{x - x_j}{S}\right) \propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_j}{S}\right)}. \qquad (171)$$

Использование формулы (170) позволяет автоматически нормировать вектор сглаживания $\mathbf{h}$.

4 Вейвлет преобразование

Интегральное вейвлет-преобразование определяется следующей формулой (например [2]):

$$\tilde{W}_S(u) = \frac{1}{S^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) g^* \left(\frac{u - z}{S} \right) dz. \tag{172}$$

При этом $S \neq 0$ (обычно $S > 0$). Символ * означает комплексное сопряжение. Функция $g(z)$ называется анализирующим (базисным или материнским) вейвлетом. Параметр S — масштаб вейвлет-преобразования. Малым значениям S соответствуют малые масштабы, большим – большие масштабы. Величина $1/S$ явлется аналогом частоты в Фурье-анализе.

Параметр u (shift) определяет локализацию вейвлета и показывает сдвиг анализирующего (и масштабированного) вейвлета относительно анализируемой функции $f(z)$.

Обратное вейвлет-преобразование определяется следующим выражением:

$$f(z) = \frac{1}{C_W} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}_S \left(\frac{z - u}{S} \right) \frac{dS}{S^{1/2}} \frac{du}{S^2}. \tag{173}$$

Нормирующий коэффициент

$$C_W = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} \left| \hat{g}(\omega) \right| d\omega.. \tag{174}$$

Здесь $\hat{g}(\omega)$ — Фурье-преобразование материнского вейвлета $g(z)$.

В дальнейшем будет удобно использовать более общий вид вейвлет-преобразования:

$$\tilde{W}_S(u) = \frac{1}{S^\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) g^* \left(\frac{u - z}{S} \right) dz. \tag{175}$$

Использование степени β вместо стандартного значения $1/2$ позволит выделить вклад больших (при $\beta \ll 1$) или малых (при $\beta \gg 1$) масштабов соответственно.

Обозначим масштабированный вейвлет $g_S(x) = g(x/S)$. Материнский вейвлет g должен удовлетворять следующим условиям:

$$C_g = 2\,\pi \int\limits_{0}^{\infty} |\,\hat{g}(\omega)\,|^2 \, \frac{d\omega}{\omega} \, < \, \infty. \tag{176}$$

Таким образом

$$\hat{g}(0) = 0, \quad \text{или} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dx = 0. \tag{177}$$

Как можно видеть из уравнения (172), вейвлет-преобразование является семейством сверток исходного сигнала с масштабированными и сдвинутыми фильтрами $g_s(x)$.

4.1 Вейвлет преобразование: MHAT вейвлет

MHAT вейвлет получается двукратным дифференцированием функции Гаусса (с точностью до знака):

$$g(z) = -\frac{d^2}{dz^2} e^{-z^2/2} = (1 - z^2) e^{-z^2/2}. \tag{178}$$

Фурье преобразование MHAT вейвлета имеет следующий вид [2]:

$$\hat{g}(\omega) = \sqrt{2\pi}\omega^2 e^{-\omega^2/2}. \tag{179}$$

В дальнейшем для большей общности будем использовать *обобщенный MHAT вейвлет*:

$$g_\eta(z) = -\frac{d^2}{dz^2} e^{-\eta z^2} = \frac{d}{dz}\left[2\eta z e^{-\eta z^2}\right] = 2\eta(1 - 2\eta z^2) e^{-\eta z^2}. \tag{180}$$

Используя свойства преобразования Фурье от масштабированного сигнала [7]:

$$\hat{f}_\alpha(\omega) = \frac{1}{\alpha} \hat{f}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right), \tag{181}$$

где $f_\alpha(z) = f(\alpha z)$, получим:

$$\hat{W}_\eta(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{8\eta^3} \omega^2 e^{-\omega^2/8}. \tag{182}$$

4.2 MHAT вейвлет: интегралы J и Q

Обобщая формулы (48)- (52), получим следующие выражения:

$$\int e^{-\eta t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{\eta}\,t) + C, \quad [\mathrm{erf}(\sqrt{\eta}\,t)]' = 2\sqrt{\frac{\eta}{\pi}} e^{-\eta t^2} \tag{183}$$

и

$$\int t e^{-\eta t^2} dt = -\frac{1}{2\eta} e^{-\eta t^2} + C, \tag{184}$$

а также

$$\int t^2 e^{-\eta t^2} dt = -\frac{t}{2\eta} e^{-\eta t^2} + \frac{\sqrt{\pi}}{4\eta^{3/2}} \mathrm{erf}(\sqrt{\eta}\,t) + C. \tag{185}$$

Кроме того

$$\int t^3 e^{-\eta t^2} dt = -\frac{t}{2\eta}\left(t^2 + \frac{1}{\eta}\right) e^{-\eta t^2} + C. \tag{186}$$

Используя соотношения (180), получим:

$$\int g_\eta(t) dt = 2\eta t e^{-\eta t^2} + C, \quad \int t g_\eta(t) dt = (2\eta t^2 + 1) e^{-\eta t^2} + C. \tag{187}$$

Интегралы **J** и **Q** для обобщенного MHAT вейвлета определяются следующим выражением:

$$\left\{\begin{array}{lcc}
\mathbf{J}_A & = & -2\eta\, t_n e^{-\eta t_n^2}, \\
\mathbf{Q}_A & = & -(2\eta t_n^2 + 1) e^{-\eta t_n^2}, \\
\mathbf{J}_i & = & 2\eta\left(t_i e^{-\eta t_i^2} - t_{i-1} e^{-\eta t_{i-1}^2}\right), \\
\mathbf{Q}_i & = & (2\eta t_i^2 + 1) e^{-\eta t_i^2} - (2\eta t_{i-1}^2 + 1) e^{-\eta t_{i-1}^2} \\
\mathbf{J}_C & = & 2\eta\, t_0 e^{-\eta t_0^2}, \\
\mathbf{Q}_C & = & (2\eta t_0^2 + 1) e^{-\eta t_0^2},
\end{array}\right. \tag{188}$$

Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\eta(t)dt = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} tg_\eta(t)dt = 0. \tag{189}$$

4.3 MHAT вейвлет: анализ тестовых функций

4.3.1 Обобщенная функция Гаусса.

Рассмотрим модельную функцию (120):

$$f_\alpha(z) = \begin{cases} f_A & , \quad z < z_A, \\ a + be^{-\alpha z^2} & , \quad z \in [z_A, z_C], \\ f_C & , \quad z > z_C. \end{cases} \tag{190}$$

Подставим функцию (190) в интеграл (175), тогда интегральное вейвлет-преобразование для обобщенного MHAT вейвлета g_η будет иметь следующий вид:

$$\tilde{W}^{\mathrm{MH}}_{\alpha\eta}(u) = \frac{1}{S^\beta}\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(z) g^{\mathrm{MH}}_\eta\left(\frac{u-z}{S}\right)dz = \frac{1}{S^\beta}(I_A + I_B + I_C). \tag{191}$$

Здесь

$$\begin{cases} I_A = f_A \int\limits_{-\infty}^{z_A} g^{\mathrm{MH}}_\eta\left(\frac{x-z}{S}\right)dz = f_A S \int\limits_{t_C}^{\infty} g^{\mathrm{MH}}_\eta(t)dt & = \quad f_A S \mathbf{J}_A, \\ I_B = \int\limits_{z_A}^{z_C}(a+be^{-\alpha z^2}) g^{\mathrm{MH}}_\eta\left(\frac{x-z}{S}\right)dt = S\int\limits_{t_A}^{t_C}(a+be^{-\alpha(x-tS)^2})W^{\mathrm{MH}}_\eta(t)dt & = \\ aS\mathbf{J}_B + bS\int\limits_{t_A}^{t_C} e^{-\alpha(x-tS)^2} g^{\mathrm{MH}}_\eta(t)dt = aS\mathbf{J}_B + bS\mathbf{J}^{\alpha\eta}_S, & \\ I_C = f_C \int\limits_{z_C}^{\infty} g^{\mathrm{MH}}_\eta\left(\frac{x-z}{S}\right)dz = f_C S\int\limits_{-\infty}^{t_A} g^{\mathrm{MH}}_\eta(t)dt & = \quad f_C S\mathbf{J}_C. \end{cases} \tag{192}$$

Интегралы $\mathbf{J}_A$ и $\mathbf{J}_C$ определены соотношениями (188), а интеграл $\mathbf{J}_B$ — формулами (188) для интеграла $\mathbf{J}_i$ с заменами $t_{i-1} \to t_A$ и $t_i \to t_C$.

Здесь

$$t_A = \frac{x - z_C}{S}, \quad t_C = \frac{x - z_A}{S}, \tag{193}$$

а интеграл

$$\mathbf{J}^{\alpha\eta}_S = \int_{t_A}^{t_C} e^{-\alpha(x-tS)^2} g^{\mathrm{MH}}_\eta(t)dt = 2\eta\left(I^{\alpha\eta}_0 - 2\eta I^{\alpha\eta}_2\right), \tag{194}$$

где

$$I^{\alpha\eta}_n = \int_{t_A}^{t_C} t^n e^{-(\alpha(x-tS)^2 + \eta t^2)}dt. \tag{195}$$

Показатель степени в формуле (102) представим в следующем виде

$$\alpha(x-tS)^2 + \eta t^2 = pt^2 + qt + r. \tag{196}$$

Здесь

$$\begin{cases} p &= \eta + \alpha S^2, \\ q &= -2\alpha x S, \\ r &= \alpha x^2. \end{cases} \tag{197}$$

Выражение в формуле (196) представимо как:

$$pt^2 + qt + r = p\left(t + \frac{q}{2p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{4p} = u^2 + \Gamma. \tag{198}$$

Здесь

$$u = p^{1/2}\left(t + \frac{q}{2p}\right), \quad \Gamma = r - \frac{q^2}{4p} = \frac{\eta \cdot \alpha x^2}{\alpha S^2 + \eta}. \tag{199}$$

Сделав замену переменных

$$t \to u = p^{1/2}(t + \frac{q}{2p}), \quad t = \frac{u}{p^{1/2}} - \frac{q}{2p}, \quad dt = \frac{1}{p^{1/2}} du. \tag{200}$$

в интеграле (195), получим:

$$I_n^{\alpha\eta} = \frac{e^{-\Gamma}}{p^{1/2}} \cdot \frac{1}{p^{n/2}} \cdot \int\limits_{u_A}^{u_C} \left(u - \frac{q}{2p^{1/2}}\right)^n e^{-u^2} du. \tag{201}$$

Здесь пределы интегрирования

$$u_A = p^{1/2}\left(t_A + \frac{q}{2p}\right), \quad u_C = p^{1/2}\left(t_C + \frac{q}{2p}\right). \tag{202}$$

Подставив выражения (193) для t_A и t_C, найдем:

$$\begin{cases} u_A &= (\alpha S^2 + \eta)^{1/2} \frac{1}{S}\left(\frac{\eta}{\eta + \alpha S^2} x - z_C\right), \\ u_C &= (\alpha S^2 + \eta)^{1/2} \frac{1}{S}\left(\frac{\eta}{\eta + \alpha S^2} x - z_A\right). \end{cases} \tag{203}$$

Используя формулу (201) получим:

$$I_n^{\alpha\eta} = \frac{e^{-\Gamma}}{p^{3/2}} \cdot \left(\frac{q^2}{4p}\mathcal{L}_0^{AC} - \frac{q}{p^{1/2}}\mathcal{L}_1^{AC} + \mathcal{L}_2^{AC}\right). \tag{204}$$

где

$$\mathcal{L}_n^{AC} = \int\limits_{u_A}^{u_C} u^n e^{-u^2} du. \tag{205}$$

Функция $\mathcal{L}_n^{AC}$ является конкретным значением интеграла $\mathcal{L}_n$ (54) на промежутке $[u_A, u_C]$.

Для интегралов $\mathcal{L}_n^{AC}$ справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$\mathcal{L}_n^{AC} = \frac{1}{2}\left(u_A^{n-1} e^{-u_A^2} - u_C^{n-1} e^{-u_C^2}\right) + \frac{n-1}{2}\mathcal{L}_{n-2}^{AC}, \tag{206}$$

следующее из рекуррентного соотношения (55).

Частные значения

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0^{AC} &= , \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\text{erf}\left]\frac{u_C}{\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{u_A}{\sqrt{2}}\right)\right] \\ \mathcal{L}_0^{AC} &= \frac{1}{2}\left(e^{-t_A^2} - e^{-t_C^2}\right), \\ \mathcal{L}_0^{AC} &= \frac{1}{2}\left(u_A e^{-u_A^2} - u_C e^{-u_C^2}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\text{erf}\left]\frac{u_C}{\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{u_A}{\sqrt{2}}\right)\right]. \end{cases} \tag{207}$$

4.3.2 Кусочно-линейная функция

Рассмотрим кусочно-линейную модельную функцию (120):

$$f_{\text{lin}}(z) = \begin{cases} f_A & , \quad z < z_A, \\ d + ez & , \quad z \in [z_A, z_C], \\ f_C & , \quad z > z_C. \end{cases} \tag{208}$$

Подставим функцию (208) в интеграл (175), тогда интегральное вейвлет-преобразование для обобщенного МНАТ вейвлета g_η будет иметь следующий вид:

$$\tilde{W}_\eta^{\text{lin}}(u) = \frac{1}{S^\beta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\text{lin}}(z) g_\eta^{\text{MH}} \left(\frac{u-z}{S} \right) dz = \frac{1}{S^\beta} (I_A^{\text{MH}} + I_B^{\text{MH}} + I_C^{\text{MH}}). \tag{209}$$

Здесь

$$\begin{cases} I_A^{\text{MH}} = f_A \int\limits_{-\infty}^{z_A} g_\eta^{\text{MH}} \left(\frac{x-z}{S}\right) dz = f_A S \int\limits_{t_C}^{\infty} g_\eta^{\text{MH}}(t) dt & = & f_A S \mathbf{J}_A, \\ I_B^{\text{MH}} = \int\limits_{z_A}^{z_C} (d+ez) g_\eta^{\text{MH}} \left(\frac{x-z}{S}\right) dt & = & d \cdot K_0^{\text{MH}} + e \cdot K_1^{\text{MH}} \\ I_C^{\text{MH}} = f_C \int\limits_{z_C}^{\infty} g_\eta^{\text{MH}} \left(\frac{x-z}{S}\right) dz = f_C S \int\limits_{-\infty}^{t_A} g_\eta^{\text{MH}}(t) dt & = & f_C S \mathbf{J}_C. \end{cases} \tag{210}$$

Здесь параметры t_A и t_C даны формулами (193). Интегралы $\mathbf{J}_A$ и $\mathbf{J}_C$ определены соотношениями (192), а интеграл

$$K_n^{\text{MH}} = \int\limits_{z_A}^{z_C} z^n g_\eta^{\text{MH}} \left(\frac{x-z}{S} \right) dz = S \int\limits_{t_A}^{t_C} (x - tS)^n g_\eta^{\text{MH}}(t) dt. \tag{211}$$

Здесь интеграл

$$K_0^{\text{MH}} = \int\limits_{z_A}^{z_C} g_\eta^{\text{MH}} \left(\frac{x-z}{S} \right) dz = S \int\limits_{t_A}^{t_C} g_\eta^{\text{MH}}(t) dt = 2\eta S \left(t_C e^{-\eta t_C^2} - t_A e^{-\eta t_A^2} \right). \tag{212}$$

Неопределенный интеграл

$$\int (x - tS)\, g_\eta^{\text{MH}}(t) dt = \big(-2\eta S t^2 + 2\eta x t - S\big) e^{-\eta t^2} + C = \left[2\eta t(x - St) - S\right] e^{-\eta t^2} + C. \tag{213}$$

Тогда

$$K_1^{\text{MH}} = S \left(\left[2\eta t_C (x - S t_C) - S\right] e^{-\eta t_C^2} - \left[2\eta t_A (x - S t_A) - S\right] e^{-\eta t_A^2} \right). \tag{214}$$

4.3.3 Кусочно-квадратичная функция

Рассмотрим кусочно-квадратичную модельную функцию:

$$f_{\text{sq}}(z) = \begin{cases} f_A & , \quad z < z_A, \\ d + ez + fz^2 & , \quad z \in [z_A, z_C], \\ f_C & , \quad z > z_C. \end{cases} \tag{215}$$

Подставляя функцию (215) в интеграл (175) получим интегральное вейвлет-преобразование для обобщенного MHAT вейвлета W_η^{MH}:

$$\tilde{W}_\eta^{\text{sq}}(u) = \frac{1}{S^\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\text{sq}}(z) g_\eta^{\text{MH}}\left(\frac{u-z}{S}\right) dz = \frac{1}{S^\beta}(I_A^{\text{MH}} + I_B^{\text{MH}} + I_C^{\text{MH}}). \tag{216}$$

Здесь

$$\begin{cases} I_A^{\text{MH}} = f_A \int\limits_{-\infty}^{z_A} g_\eta^{\text{MH}}\left(\frac{x-z}{S}\right) dz = f_A S \int\limits_{t_C}^{\infty} g_\eta^{\text{MH}}(t) dt & = & f_A S \mathbf{J}_A, \\ I_B^{\text{MH}} = \int\limits_{z_A}^{z_C} (d + ez + fz^2) g_\eta^{\text{MH}}\left(\frac{x-z}{S}\right) dt & = & d \cdot K_0^{\text{MH}} + e \cdot K_1^{\text{MH}} + f \cdot K_2^{\text{MH}} \\ I_C^{\text{MH}} = f_C \int\limits_{z_C}^{\infty} g_\eta^{\text{MH}}\left(\frac{x-z}{S}\right) dz = f_C S \int\limits_{-\infty}^{t_A} g_\eta^{\text{MH}}(t) dt & = & f_C S \mathbf{J}_C. \end{cases} \tag{217}$$

Здесь параметры t_A и t_C даны формулами (193). Интегралы $\mathbf{J}_A$ и $\mathbf{J}_C$ определены соотношениями (192), а интегралы K_0^{MH} и K_1^{MH} — формулами (212) и (214).

Интеграл

$$K_2^{\text{MH}} = \int\limits_{z_A}^{z_C} z^2 g_\eta^{\text{MH}}\left(\frac{x-z}{S}\right) dz = S \int\limits_{t_A}^{t_C} (x - tS)^n g_\eta^{\text{MH}}(t) dt. \tag{218}$$

Неопределенный интеграл

$$\int (x - tS)^2\, g_\eta^{\text{MH}}(t) dt = 2\left[\eta(x - tS)^2 t - S(x - tS)\right] e^{-\eta t^2} - S^2 \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\, \text{erf}(\sqrt{\eta} t) + C. \tag{219}$$

Тогда интеграл

$$K_2^{\text{MH}} = \begin{cases} S\left[2\left[\eta(x - t_C S)^2 t_C - S(x - t_C S)\right] e^{-\eta t_C^2} - S^2 \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\, \text{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_C\right) - \right. \\ \left. \quad 2\left[\eta(x - t_A S)^2 t_A - S(x - t_A S)\right] e^{-\eta t_A^2} - S^2 \sqrt{\frac{\pi}{\eta}}\, \text{erf}\left(\sqrt{\eta}\, t_A\right)\right]. \end{cases} \tag{220}$$

4.4 Вейвлет-преобразование функций, заданных таблицей значений

4.4.1 Методика расчета

Пусть функция $f(z)$ задана на дискретном множестве точек $\{z_0, z_1, \ldots, z_n\}$ со значениями $\{f_0, f_1, \ldots, f_n\}$, где $f_i = f(z_i)$. Полагается, что $z_0 = z_A$ и $z_n = z_C$.

Методика расчета амплитуды вейвлет-преобразования (175) основана на использовании соотношений (15), (39)-(40). При этом за пределами области задания функции $[z_0, z_n]$ значения функции полагаются постоянными и равными либо асимптотическим значениям $f_A = \lim f(z), z \to -\infty$ и $f_C = \lim f(z), z \to \infty$ либо средними значениями $\overline{f(z)}$, вычисляемым по $r \ll n$ значениям функции $f(z_i) = f_i$ у левой и правой границ области задания функции. При этом в формуле (39) полагается $V_A = 0$ и $V_C = 0$.

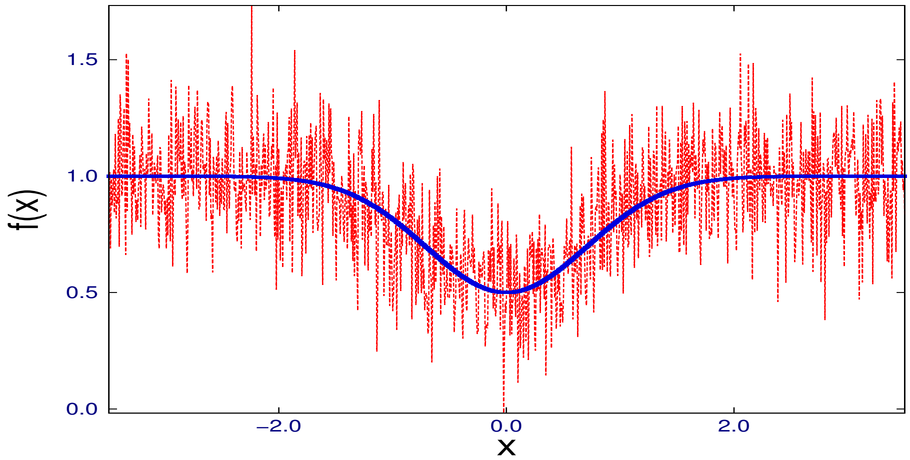


Рис. 1: Модельная функция с параметрами $a = 1.0$, $b = -0.5$, $\alpha = 1.0$ без вклада шумовой компоненты (сплошная синяя линия) и с таким вкладом (красная пунктирная линия).

4.4.2 Вейвлет-преобразование обобщенной функции Гаусса: МНАТ вейвлет

Рассмотрим вейвлет-преобразование обобщенной модельной функции Гаусса (190) на промежутке $[-3.5, 3.5]$ со следующим параметрами:

$$a = 1.0,\ b = -0.5,\ \alpha = 1.0,\ f_A = f_C = 1,\ \beta = 1/2. \qquad (221)$$

На рисунке 1 показан график модельной функции $f(x)$ как с учетом, так и без учета вклада шумовой компоненты с отношением сигнал к шуму $S/N = 5$.

Квадрат амплитуды (энергия) вейвлет-преобразования $\hat{W}_S^2(u)$ функции $f(x)$ показано на Рис. 1.

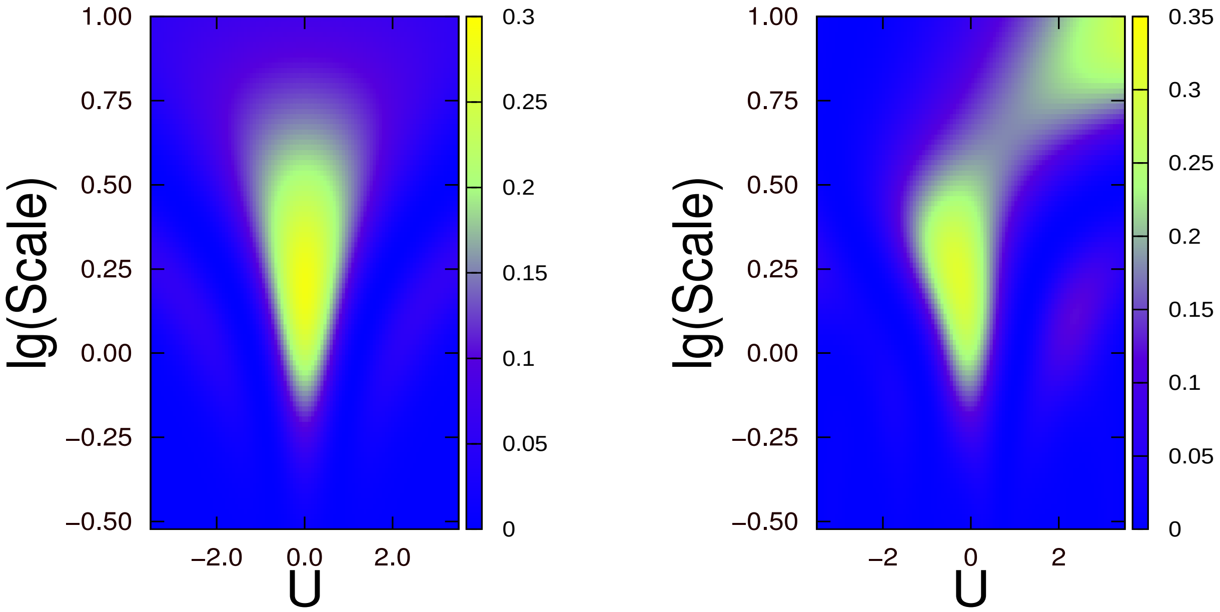


Рис. 2: Квадрат амплитуды вейвлет-преобразования модельной функции $f(x)$ в интервале масштабов $S \in [0, 3, 10]$ без учета вклада шумовой компонента (слева) и с ее учетом (справа).

Максимум амплитуды вейвлет-преобразования соответствует масштабам $S \sim [1.4, 1.8]$, соответствующим ширине функции Гаусса $\sigma = \sqrt{2}$. Анализ рисунка 2 показывает, что даже для низкого отношения S/N основной компонент вейвлет-преобразования на масштабах $S \in [0.5, 3]$ мало меняется.

4.4.3 Вейвлет-преобразование модельного спектра с MHAT вейвлетом

Рассмотрим модельный рентгеновский спектр с тремя компонентами в области $[4, 8]$ Å как без шума, так и с вкладом шумовой компоненты при отношении $S/N = 10$.

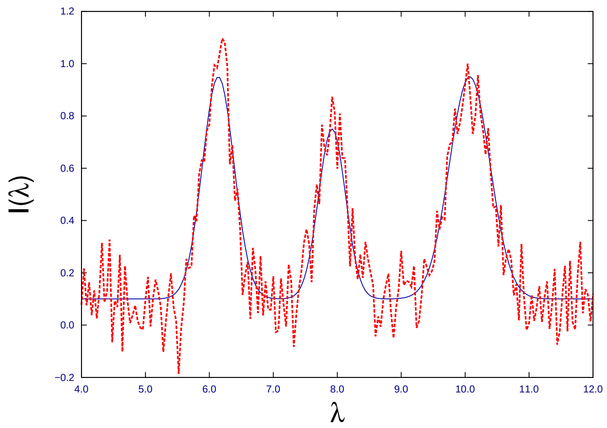


Рис. 3: Модельный рентгеновский спектр с тремя линиями и слабым континуумом с шумом (красный пунктир) и без шума (сплошная линия).

Рассмотрим зависимость вида вейвлет-преобразования функции, показанной на Рис. 3 в зависимости от величины параметра β.

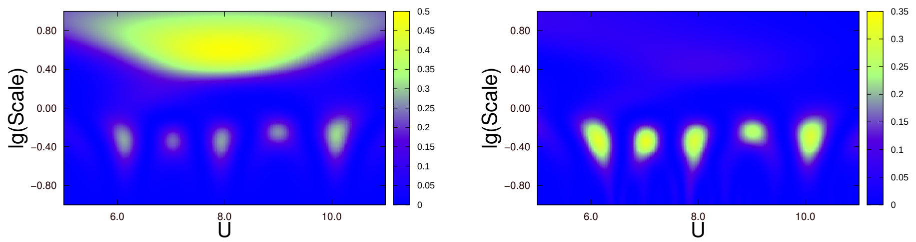


Рис. 4: Вейвлет-преобразование модельный рентгеновского спектра, представленного на Рис. 3, без вклада шумового компонента (слева) и с таким вкладом (справа) при $\beta = 1/2$.

График вейвлет-преобразования модельной функции при различных масштабах S и при стандартном значении $\beta = 1/2$ показан на Рис. 4. При больших масштабах $S = 3 - 6$ компоненты вейвлет-преобразования, относящиеся к разным линиями, сливаются.

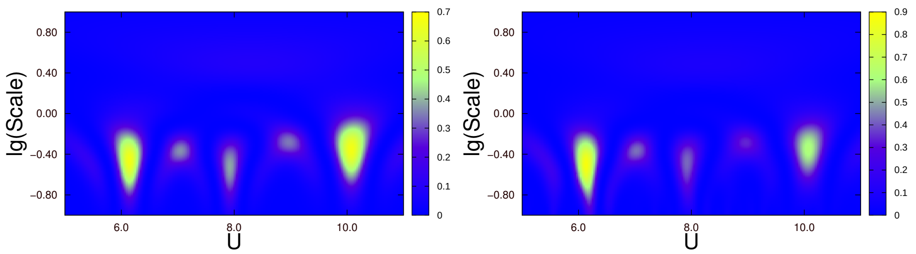


Рис. 5: То же, что на Рис. 4, но при $\beta = 1$ и $S/N = 10$.

При значении $\beta = 1$ компонент вейвлет-преобразования модельной функции на больших масштабах $S = 3 - 6$ подавлен, что хорошо видно на Рис. 5.

4.4.4 Вейвлет-преобразование: распределение по масштабам S

Локальный спектр энергии вейвлет-преобразования определяется согласно [2] следующим образом:

$$E(S,u) = \left|\tilde{W}(S,u)\right|^2 , \tag{222}$$

где $\tilde{W}(S,u)$ — вейвлет-преобразование для масштаба S и сдвига u.

Глобальный спектр энергии вейвлет-преобразования

$$E_{\mathrm{w}}(S) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(S,u)du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\tilde{W}(S,u)\right|^2 du\,. \tag{223}$$

Методика расчета глобального спектра энергии. Для расчета глобального спектра энергии для вейвлет-преобразования, заданного на массиве сдвигов $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$, где N – число значений u, для которых рассчитано значение $E(S,u)$ может быть использовано следующее соотношение:

$$E_{\mathrm{w}}(S) = \sum_{i=1}^{N} g_i E(S,u_i)\,. \tag{224}$$

Здесь g_i – вес значения $E(S,u_i)$ в сумме (224). В дальнейшем будем использовать значения $g_1 = g_N = 1/2$ и $g_i = 1$ для $i = 2,3,\ldots,N-1$, что соответствует формуле трапеций в сумме (224).

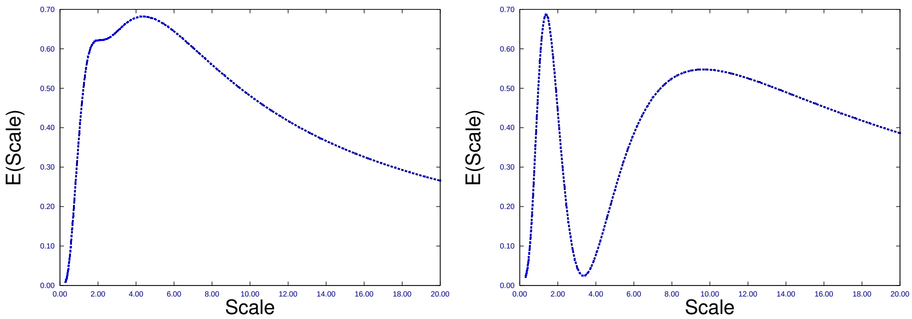


Рис. 6: Энергия вейвлет-преобразования модельной функции (221) без вклада шумовой компоненты (слева) и с таким вкладом (справа).

Глобальный спектр энергии вейвлет-преобразования модельной функции (221) представлена на Рис. 6. Максимум спектра энергии соответствует ширине профиля модельной функции на Рис. 1. Добавление шумовой компоненты к модельной функции приводит к появлению дополнительного максимума, соответствующего вкладу шумовой компоненты.

Динамический спектр распределения энергии вейвлет-преобразования по масштабам. Если спектр источника меняется со временем, то меняется со времени и соответствующее распреление глобального спектра энергии вейвлет-преобразования (224).

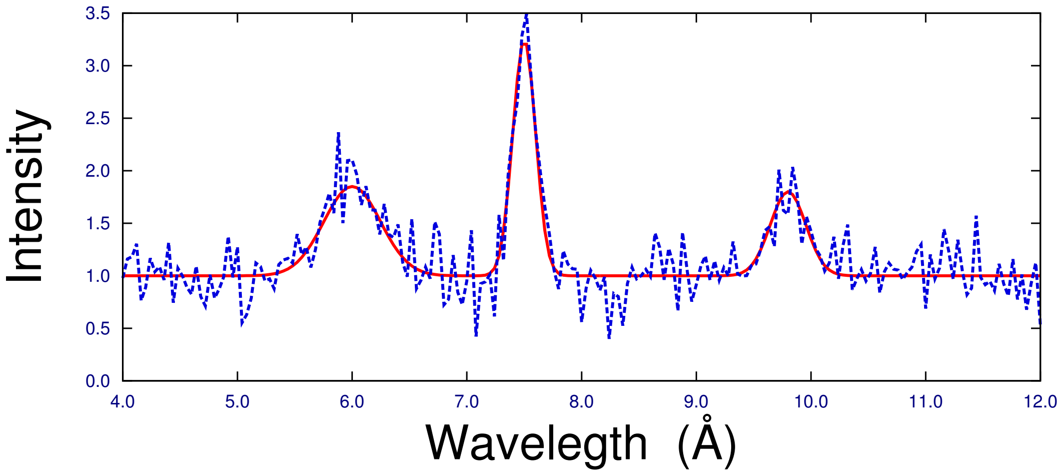


Рис. 7: Модельный рентгеновский спектр в момент времени $t = 0$ без учета вклада шумовой компоненты (сплошная красная линий) при отношении сигнал/шум $S/N = 5$ и без учета такого вклада (синий пунктир).

Рассмотрим модельный эмиссионный рентгеновский спектр в области $4 - 12$ Åс тремя линиями на длинах волн 6.00, 7.50 и 9.80 Åи ширинами 0.35, 0.14 и 0.22 Åв момент времени $t = 0$. На Рис. 7.

Предположим, что за время $T = 19.80$ дня было получено 100 спектров, при этом амплитуды, положения и ширины спектральных линий. Изменения профилей рентгеновских линий со временем представлены на Рис. 8.

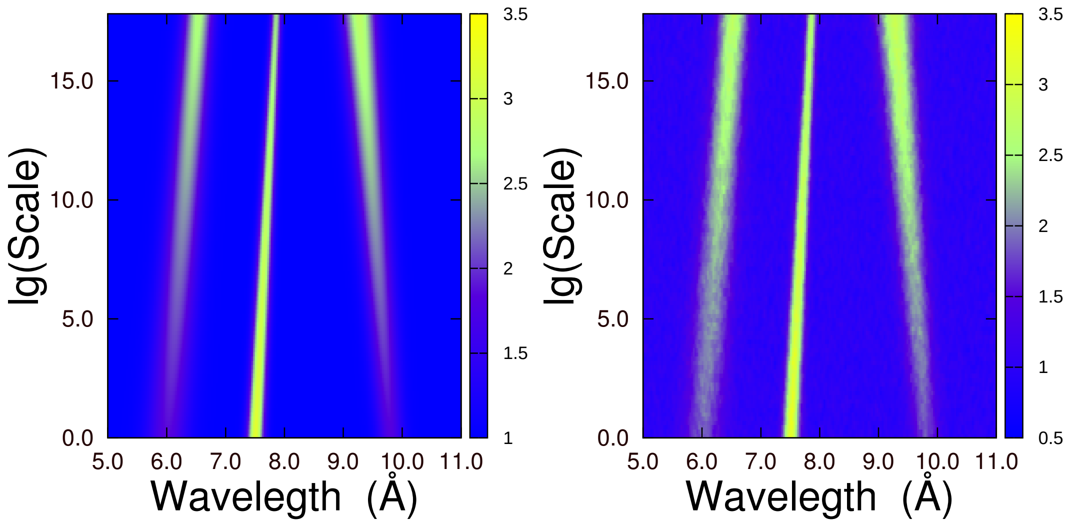


Рис. 8: Вариации профилей рентгеновских линий, представленных на Рис. 7 со временем.

Пусть для какого-либо объекта получено N спектров в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_N$. Совокупность глобальных спектров энергии для этих спектров будем называть динамическим спектром распределения энергии вейвлет-преобразования по масштабам.

Подобный спектр приведен на Рис. 9. Максимум амплитуды квадрата вейвлет-преобразования соответствует масштабу $S = 7.1 - 7.2$ Å. Видно, что добавление шумового компонента даже при небольшом значении $S/N = 5$ практически не меняет динамический спектр энергии вейвлет-преобразования и, соответственно, значение масштаба на котором этот максимум достигается.

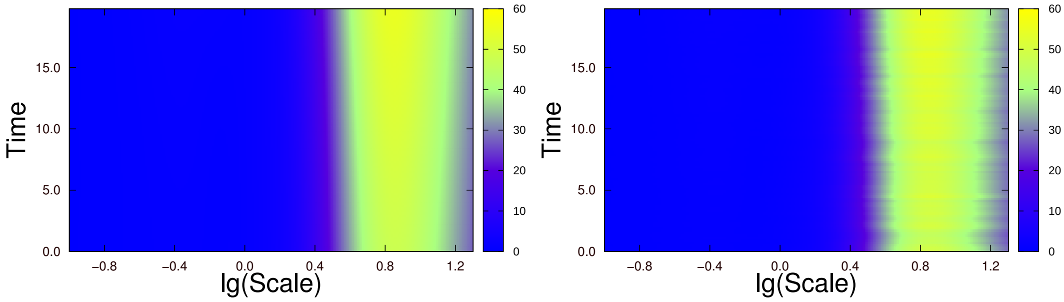


Рис. 9: Динамический спектр энергии вейвлет-преобразования модельных профилей, представленных на Рис. 7–Рис. 8 с учетом (слева) и без учета (справа) вклада шумового компонента.

4.5 Вейвлет преобразование: вейвлет Морле

4.5.1 Вейвлет-преобразование элементарных функций

Для построения надежных алгоритмов вычисления амплитуды вейвлет-преобразования и оценки их точности необходимы точные выражения амплитуды для различных пробных функций, для которых эту величину можно вычислить аналитически.

Наиболее эффективный способ получения аналитических выражений для вейвлет-преобразования элементарных функций – использование аппарата Фурье-анализа. Применяя к формуле (175) преобразование Фурье по переменной u, получим:

$$\hat{W}(S,\omega) = S^{1-\beta}\hat{g}^*(-S\omega)\hat{f}(\omega) = S^{1-\beta}(\hat{g}(S\omega))^*\,, \tag{225}$$

где * означает комплексное сопряжение. Эта формула соответствует выражению (30) в книге [2] при стандартном значении $\beta = 1/2$. Применяя к (225) обратное преобразование Фурье, получим:

$$\tilde{W}(S,u) = \frac{S^{1-\beta}}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{g}^*(-S\omega)\hat{f}(\omega)e^{i\omega u}d\omega\,. \tag{226}$$

При $\beta = 1/2$ приходим к соотношению (48) в [2].

4.5.2 Вейвлет Морле

DOG вейвлеты являются действительными анализирующими вейвлетами. При анализе сигналов, в частности, временных рядов, используются и комплексные вейвлеты. Одним из наиболее часто используемых комплексных материнских вейвлетов является вейвлет Морле [5, 8]:

$$g(x) = e^{-(x/\alpha)^2}\left[e^{ik_0x} - e^{-(k_0\alpha)^2/4}\right]. \tag{227}$$

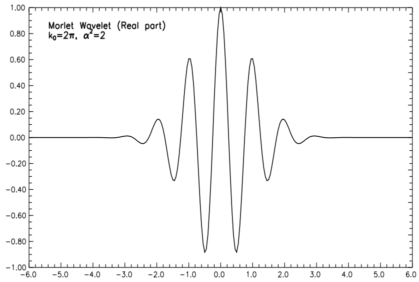
Вейвлет Морле – это плоская волна e^{ik_0x} с частотой $\nu = k_0/2\pi$, модулированная функцией Гаусса $e^{-(x/\alpha)^2}$. Постоянное слагаемое $e^{-(k_0\alpha)^2/4}$ добавляется для выполнения условия (177). Обычно выбираются значения $k_0 = 2\pi$ и $\alpha = \sqrt{2}$, тогда

$$g(x) = e^{-x^2/2}\left[e^{i2\pi x} - e^{-k_0^2/4}\right]. \tag{228}$$

Действительная и мнимая части вейвлета Морле записываются следующим образом:

$$\left\{\begin{array}{lcl} Re[g(x)] & = & e^{-(x/\alpha)^2}\left[\cos(k_0x) - e^{-(k_0\alpha)^2/4}\right], \\ Im[g(x)] & = & e^{-(x/\alpha)^2}\sin(k_0x) \end{array}\right. \tag{229}$$

и показаны на Рис. 10. Результаты расчетов показывают, что вклад второго слагаемого в формуле (227) в большинстве случаев пренебрежимо мал. Например, при стандартных значений параметров $k_0 = 2\pi$ и $\alpha = \sqrt{2}$ абсолютная величина этого слагаемого составляет $\approx 3 \times 10^{-9}$.



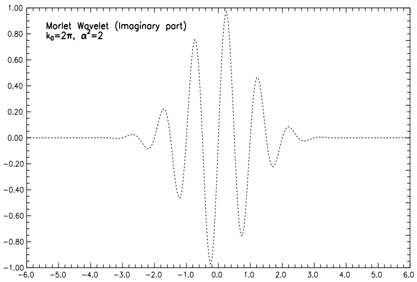


Рис. 10: Действительная (вверху) и мнимая (внизу) части вейвлета Морле при $k_0 = 2\pi$ и $\alpha = \sqrt{2}$

Преобразование Фурье вейвлета Морле имеет следующий вид:

$$\hat{g}(\omega) = \alpha\sqrt{\pi}\left[e^{-\alpha^2(k_0-\omega)^2/4} - e^{-\alpha^2(k_0^2+\omega^2)/4}\right]. \tag{230}$$

Отметим, что в выражении (20) в [2] во втором экспоненциальном выражении в квадратных скобках содержится опечатка. Для получения правильного выражения следует сделать замену $(k_0 + \omega)^2 \to (k_0^2 + \omega^2)$.

Вейвлет-преобразование синусоиды Фурье-анализ основан на переводе информации об анализируемой функции из временной (пространственной) области в частотную. При анализе периодических или квази-периодических сигналов они представляются как линейная комбинация синусоид с постоянными или медленно меняющимися амплитудами и частотами. Фурье-образ синусоиды в частотной области сводится к сумме двух дельта-функций. В вейвлет-анализе образ синусоиды более сложен. Рассмотрим синусоиду

$$f(x) = Asin(\omega_0 x) = \frac{A}{2i}\left[e^{i\omega_0 x} - e^{-i\omega_0 x}\right]. \tag{231}$$

Фурье-образ этой функции имеет вид:

$$\hat{f}(x) = \frac{A\pi}{i}\left[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)\right]. \tag{232}$$

Подстановка (232) в (226) дает

$$\tilde{W}(S,u) = \frac{AS^{1-\beta}}{2i}\left[e^{i\omega_0 u}\hat{g^*}(-S\omega_0) - e^{-i\omega_0 u}\hat{g^*}(S\omega_0)\right]. \tag{233}$$

Используя выражение (230) для Фурье-преобразования вейвлета Морле и, подставляя его в соотношение (233), найдем:

$$\tilde{W}(s,u) = AS^{1-\beta}\alpha\sqrt{\pi}\times \tag{234}$$
$$\left\{\frac{1}{2i}\left[e^{i\omega_0 u-\alpha^2(k_0+S\omega_0)^2/4} - e^{-i\omega_0 u-\alpha^2(k_0-S\omega_0)^2/4}\right] - \sin(\omega_0 u)e^{-\alpha^2(k_0^2+S^2\omega_0^2)/4}\right\} \quad .$$

Вейвлет-преобразование (234) является комплекснозначной функцией аргумента u. Действительная и мнимая части преобразования равны:

$$Re\Big[\tilde{W}(S,u)\Big] = \frac{AS^{1-\beta}\alpha\sqrt{\pi}}{2}\sin(\omega_0 u)\left\{e^{-\alpha^2(k_0-S\omega_0)^2/4} + e^{-\alpha^2(k_0+S\omega_0)^2/4} - 2e^{-\alpha^2(k_0^2+S^2\omega_0^2)/4}\right\} \tag{235}$$

$$Im\Big[\tilde{W}(S,u)\Big] = \frac{AS^{1-\beta}\alpha\sqrt{\pi}}{2}\cos(\omega_0 u)\left\{e^{-\alpha^2(k_0-S\omega_0)^2/4} - e^{-\alpha^2(k_0+S\omega_0)^2/4}\right\} \tag{236}$$

То есть как действительная, так и мнимая части вейвлет-преобразования синусоиды являются гармоническими функциями с такими же частотой и периодом, что и исходная синусоида.

Распределение энергии сигнала по масштабам описывается квадратом модуля амплитуды вейвлет-преобразования (локальной скалограммой)

$$P(S,u) = |\tilde{W}(S,u)|^2 = Re^2 + Im^2.$$

Используя соотношения (235)-(236) вычислим локальный спектр энергии для вейвлет-преобразования синусоиды:

$$P(S,u) = A^2\alpha^2\frac{\pi S^{2-2\beta}}{4}\left[e^{-(\alpha^2 f)/2} + e^{-(\alpha^2 g)/2} + \delta\right] . \tag{237}$$

где $f = (k_0 - S\omega_0)^2$ а $g = (k_0 + S\omega_0)^2$.

Параметр

$$\delta = 2e^{-(\alpha^2 h)/2}\times\left[3\sin^2(\omega_0 u) - \cos^2(\omega_0 u) - 2\sin^2(\omega_0 u)\left(e^{\alpha^2(f+h)/4} + e^{\alpha^2(g+h)/4}\right)\right] . \tag{238}$$

Здесь $h = k_0^2 + S^2\omega_0^2 = (f+g)/2$. При стандартных значениях параметров k_0 и α поправочный множитель $\delta \ll 1$ и им можно пренебречь. На Рис. 11 даны действительная и мнимая часть вейвлет-преобразования, а также распределение энергии вейвлет-преобразования по масштабу S.

Максимум локального спектра энергии синусоиды практически не зависит от u и достигается на масштабах

$$S_{\max} \approx \frac{k_0}{\omega_0} \approx \frac{k_0}{2\pi}T_0\,, \tag{239}$$

где T_0 – период анализируемой синусоиды. При выборе стандартного значения $k_0 = 2\pi$ величина $S_{\max} \approx T_0$. Таким образом, максимумы квадрата амплитуды вейвлет-преобразования с использованием вейвлетов Морле соответствуют периодам гармонических компонентов анализируемого сигнала.

Слабая степенная зависимость квадрата амплитуды вейвлет-преобразования в соотношении (237) приводит к тому, что максимум функции $P(u,S)$ достигается при $S_{\max} \approx 12.2$, тогда как отношение $k_0/\omega_0 = 12$. При выборе параметра $\beta = 1$ можно исключить степенную зависимость локального спектра энергии от масштаба S и, соответственно, сдвиг величины $S_{\max}$. Интенсивность энергии сигнала в пространстве масштабов S равна

$$P_{\max} \approx A^2\alpha^2\frac{\pi S^{2-2\beta}}{4}\,, \tag{240}$$

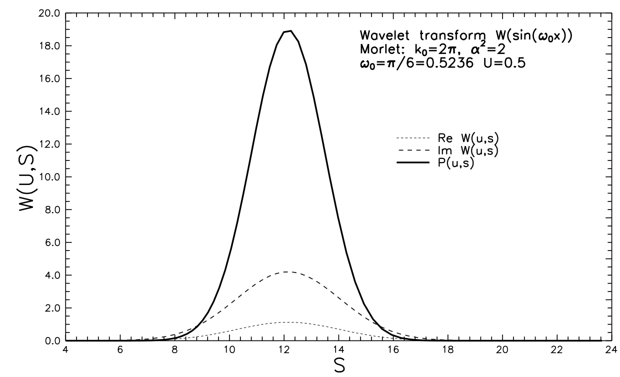


Рис. 11: Действительная (пунктир с короткими штрихами) и мнимая (пунктир с длинными штрихами) части вейвлет-преобразования функции $\sin(\omega_0 x)$ ($\omega_0 = 0.5236 = \pi/6$, $u = 0.5$) при использовании вейвлета Морле с параметрами $k_0 = 2\pi$ и $\alpha = \sqrt{2}$. Жирная сплошная линия - локальный спектр энергии вейвлет-преобразования $P(S, u)$.

4.5.3 Вейвлет-преобразование в шкале псевдочастот

Недостатком стандартного представления амплитуды вейвлет-преобразования в шкале (U, S) – сдвигов и масштабов при использовании вейвлетов Морле является линейная зависимость максимума амплитуды вейвлет-преобразования для гармонических функций от параметра k_0 (см. соотношение 239).

По этой причине, при использовании значений данного параметра отличных от стандартного значения $k_0 = 2\pi$, максимумы скалограмм и скейлограмм сдвигаются по оси масштабов. Кроме того, при сравнении результатов анализа сигналов с помощью Фурье и вейвлет-анализа использование в первом случае шкалы часто, а во втором случае шкалы масштабов не позволяет выполнить прямое сопоставление положений максимумов амплитуды преобразований. При разных значениях k_0 максимумы амплитуд вейвлет-преобразования одной и той же функции будут сдвинуты по оси масштабов пропорционально k_0 и не будут совпадать.

Для облегчения такого сравнения предлагаем использовать для представления амплитуды вейвлет-преобразования шкалу *псевдочастот*

$$\nu' = k_0/2\pi S.$$

В этой шкале положения максимумов локального спектра гармонической функции $a\sin(\omega_0 x)$ энергии согласно формуле (239) будут находиться на псевдочастотах

$$\nu'_{\max} \approx \nu_0 \,, \tag{241}$$

где $\nu_0 = \omega_0/2\pi$. Сказанное иллюстрируется на Рис. 12, на котором нанесено распределение локального спектра энергии синусоиды при различных значениях k_0.

При $k_0 > \pi$ положение максимума скалограммы близко к значению частоты синусоиды. Полуширина анализирующего вейвлета Морле $W \approx 2\pi/k_0$, поэтому при малых значениях параметра $k_0 \leq \pi$ она сравнима с длиной анализируемого отрезка синусоиды (см. Рис. 12) и положение максимума сдвигается в область меньших частот (больших масштабов).

4.5.4 Численные методы вычисления амплитуды вейвлет-преобразования

На практике анализируемый сигнал $f(x)$ известен лишь в конечном числе точек, поэтому для вычисления интеграла (175) требуется использовать численное интегрирование. Следует также учесть, что величина $f(x)$ включает в себя вклад шумового компонента $N(x)$,

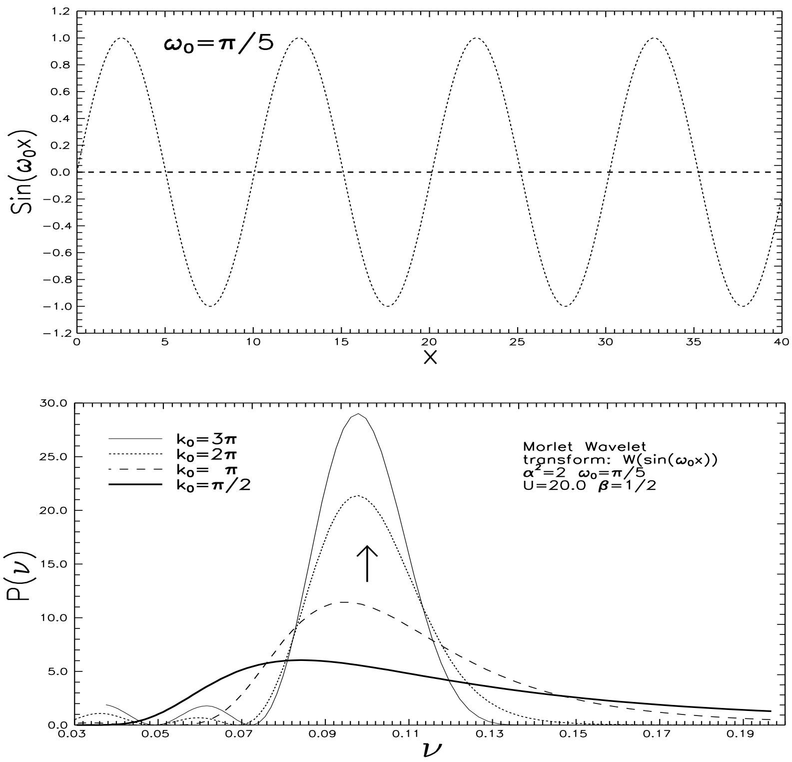


Рис. 12: вверху: анализируемая функция $\sin(\pi/5x)$; внизу: зависимость скалограммы вейвлет-преобразования синусоиды $P(S,U)$ от параметра k_0 в шкале псевдочастот $\nu = k0/(2\pi S)$.

амплитуда которого зависит от яркости изучаемого объекта и качества принимающей аппаратуры и является, поэтому, случайной функцией.

Стандартные методы численного интегрирования детерминированных функций не всегда дают хорошие результаты при интегрировании случайных функций. Вместо них обычно используются различного рода численные оценки, вычисляемые по дискретному множеству $X = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{N-1}\}$ конечного числа n значений аргумента функции $f(x)$ и множеству $F = \{f_0, f_1, f_2, \ldots ..., f_{N-1}\}$ значений функции, таких, что $f_k = f(x_k)$.

Пусть $W^{\rm est}(S,u)\,[X,F,P]$ – какая-либо оценка амплитуды вейвлет-преобразования. Будем считать оценку *состоятельной*, если для детерминированных функций (с пренебрежимо малым вкладом шумового компонента) при малых значениях параметра S:

$$W^{\rm est}(S,u)\,[X,F,P] \xrightarrow{\Delta_x \to 0, \quad \Delta_x \ll s \ll (x_{N-1}-x_0)} \tilde{W}(s,u)\,. \tag{242}$$

Здесь

$$\boldsymbol{\Delta_x = \Delta_x X) = \max_{k\in[0,n-1]}(|x_k - x_{k-1}|) -} \tag{243}$$

длина максимального промежутка между последовательными значениями аргумента. Для равномерного распределения значений аргумента $x,$: $\Delta_x = (x_{n-1} - x_0)/n$. При больших значениях параметра S ширина вейвлета сравнима с длиной промежутка $[x_0,\, x_{n-1}]$ (подробнее см. в [2, 5]) и соотношение (242) не выполняется. Для значений S, сравнимых с величиной Δ_x, будут существенны погрешности численного интегрирования для оценки $W^{\rm est}(S,u)\,[X,F,P]$.

Для разных типов анализирующих вейвлетов следует использовать, вообще говоря, разные процедуры интегрирования в формуле (175). Рассмотрим, поэтому процедуры вычисления амплитуды вейвлет-преобразования для MHAT-вейвлетов и вейвлетов Морле отдельно.

4.5.5 Вычисление амплитуды вейвлет-преобразования для вейвлетов Морле

Для вейвлетов Морле при выполнении численного интегрирования в формуле (175) будем использовать методику, предложенную в работе [6] и подробно описанную в книге [2].

Для оценки амплитуды вейвлет-преобразования используем следующее выражение (формула (41) в [2]):

$$\tilde{W}_{\mathrm{A}}(S,u) = \frac{G(S,u)}{n(S,u)}\,, \tag{244}$$

где

$$G(S,u) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k g^* \left(\frac{x_k - u}{S}\right)\,, \tag{245}$$

и

$$n(S,u) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{B}\left(\frac{x_k-u}{S}\right)^2}\,. \tag{246}$$

В формуле (246) $B=2$ для MHAT вейвлета и $B=\alpha^2$ для вейвлета Морле. Согласно [6], оценка (244) называется амплитудной вейвлет-функцией.

Проверим выполнение условия (242) для оценки (244) для равномерного ряда $x_k = \Delta_x k, \quad k = 0,1,...,n-1$. Для равномерного ряда $\Delta x = \Delta_x$. Обозначим $X = (n-1)x$. Сделаем следующие оценки:

$$G(s,u) = \frac{1}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n-1} f_k g^* \left(\frac{x_k - u}{S}\right) \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int\limits_0^X f(x) g\left(\frac{x-u}{S}\right) dx = \frac{1}{\Delta x} G(S,u,X)\,. \tag{247}$$

$$n(S,u) = \frac{1}{\Delta x}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{1}{B}\left(\frac{x_k-u}{S}\right)^2} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int\limits_0^X e^{-\frac{1}{B}\left(\frac{x-u}{s}\right)^2} dx = \frac{1}{\Delta x} n(S,u,X)\,. \tag{248}$$

Таким образом, в пределе $\Delta x \to 0$

$$\tilde{W}_{\mathrm{A}}(S,u) \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{G(S,u,X)}{n(S,u,X)}\,, \tag{249}$$

Оценим функции $G(S,u,X)$ и $n(S,u,X)$ в переделе малых масштабов S (более точно, при $\Delta_x \ll S \ll X$, см. пункт 4.5.5). Сделав в интеграле (247) замену $v = (x-u)/S$, получим:

$$G(S,u,X) = S\int_{-u/S}^{(x-u)/S} f(Sv+u) g^*(v)\,. \tag{250}$$

В интеграле (248) сделаем замену $w = (x-u)/(S\sqrt{B})$, тогда:

$$n(S,u,X) = s\sqrt{B}\int_{-u/(S\sqrt{B})}^{(x-u)/(S\sqrt{B})} e^{-w^2} dw = S\frac{\sqrt{\pi B}}{2}\left[erf\left(\frac{u}{\sqrt{B}S}\right) + erf\left(\frac{X-u}{\sqrt{B}S}\right)\right]\,, \tag{251}$$

где интеграл ошибок (см., например, [9, 10])

$$erf(x) = \varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{x\sqrt{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\,. \tag{252}$$

При малых $S \le X$ для $u \in (0, X)$ отношения $u/S \gg 1$ и $(x-u)/S \gg 1$, поэтому в интегралах (251) и (252) нижний и верхний пределы интегрирования можно заменить на $-\infty$ и ∞ соответственно. Сделав в данных интегралах обратные замены $x = vS + u$ и $x = wS\sqrt{B} + u$, соответственно, найдем:

$$G(S, u, X) \xrightarrow{s \ll X} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) g^* \left(\frac{x-u}{S} \right) dx = s^\beta \tilde{W}(u, S)\,. \tag{253}$$

и

$$n(S, u, X) \xrightarrow{s \ll X} S\sqrt{B} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2} dw = S\sqrt{\pi B}\,. \tag{254}$$

Подставляя соотношения (254) и (253) в формулу (244), получим:

$$\tilde{W}_{\mathrm{A}}(S, u) \xrightarrow{S \ll X} \frac{S^{\beta-1}}{\sqrt{\pi B}} W(S, u)\,. \tag{255}$$

Введем *модифицированную амплитудную вейвлет-функцию*

$$\tilde{W}_{\mathrm{AM}}(S, u) = \sqrt{\pi B}\, S^{1-\beta}\, \tilde{W}_{\mathrm{A}}(S, u)\,, \tag{256}$$

тогда

$$\tilde{W}_{\mathrm{AM}}(S, u) \xrightarrow{S \ll X} \tilde{W}(S, u)\,. \tag{257}$$

Таким образом, модифицированная амплитудная вейвлет-функция может быть использована для непосредственной оценки амплитуды вейвлет-преобразования. Отметим, что соотношение (242) выполняется только для равномерного распределения аргумента x. При неравномерном распределении значений x_k оно должна быть модифицирована.

Для вейвлетов Морле $B = \alpha^2$, тогда

$$\tilde{W}_{\mathrm{AM}}(S, u) = \sqrt{\pi}\, \alpha\, S^{1-\beta}\, \tilde{W}_{\mathrm{A}}(S, u) \qquad \text{(Вейвлеты Морле)}\,. \tag{258}$$

4.5.6 Алгоритм расчета амплитуды вейвлет-преобразования для вейвлетов Морле

Представим модифицированную амплитудную вейвлет-функцию $\tilde{W}_{\mathrm{AM}}(s, u)$ в виде суммы действительной и мнимой части:

$$\tilde{W}_{\mathrm{AM}}(S, u) = A(S, u) + iB(S, u)\,. \tag{259}$$

Используя соотношения (229) и (244)-(246), найдем:

$$A(S, u) = Re\left[\tilde{W}_{\mathrm{AM}}(S, u)\right] = \frac{\sqrt{\pi}\, \alpha\, S^{1-\beta}}{n(S, u)} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-(y_k/\alpha)^2} \; \left[\cos(k_0 y_k) - e^{(k_0 \alpha)^2/4}\right] \tag{260}$$

,

$$B(S,u) = Im\left[\tilde{W}_{\rm AM}(S,u)\right] = \frac{\sqrt{\pi}\,\alpha\,S^{1-\beta}}{n(S,u)} \sum_{k=0}^{n-1} f_k e^{-(y_k/\alpha)^2}\ \sin(k_0 y_k)\,. \qquad (261)$$

и

$$n(S,u) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-(y_k/\alpha)^2}\,. \qquad (262)$$

Здесь $f_k = f(x_k)$, $y_k = (x_k - u)/S$. Скалограмма (спектр мощности вейвлет-преобразования в пространстве (u,S)) определяется соотношением:

$$P(S,u) = \left|\tilde{W}_{\rm AM}(S,u)\right|^2 = A^2(S,u) + B^2(S,u)\,. \qquad (263)$$

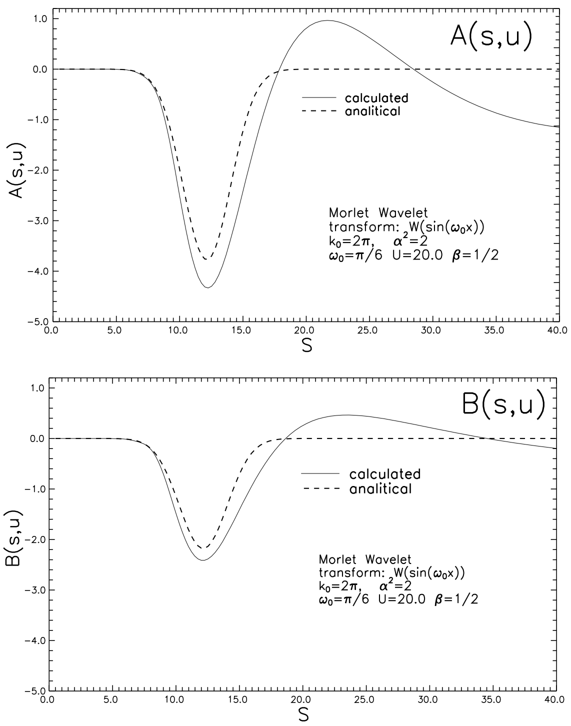


Рис. 13: Сравнение действительной ($A(S,u)$,вверху) и мнимой ($B(S,u)$,внизу) частей амплитуды вейвлет преобразования синусоиды $\sin(\omega_0 x)$ с $\omega_0 = 1$ при использовании вейвлета Морле с параметрами $k_0 = 2\pi$ и $\alpha = \sqrt{2}$ при $u = 20.0$. Сплошная линия – амплитуда, вычислена по формулам (260)-(261), пунктир – согласно (235)-(236).

Сравнение амплитуд численного и аналитического вейвлет-преобразования Для выяснения точности описанной в пункте 4.5.5 методики вычисления амплитуды вейвлет-преобразования сравним на Рис. 13 действительную и мнимую части амплитуды вейвлет-преобразования синусоиды $\sin(x)$, вычисленные согласно данной методике – сплошная линия и по точным аналитическим формулам(235)-(236) – пунктир. При вычислениях задавались значения $X = 40.0$ и $\Delta x = 0.02$.

Результаты численного расчета спектра мощности вейвлет-преобразования синусоиды согласно соотношению (263) сравниваются на Рис. 14 с полученными по аналитической формуле (237). Из анализа рисунков видно, что положения максимумов численных и аналитических функций $A(S,u)$, $B(S,u)$ и $P(S,u)$ близки, тогда как абсолютные значения этих функций могут существенно различаться.

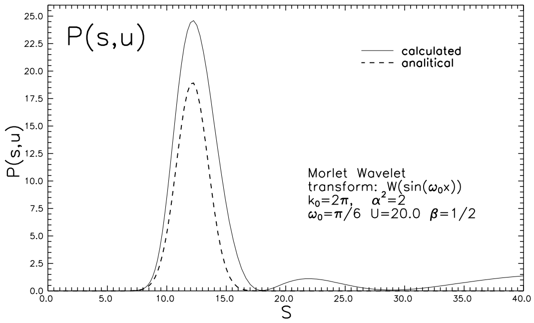


Рис. 14: То же, что на Рис.13., но для спектра мощности вейвлет-преобразования $P(S, u)$.

В области вблизи максимума амплитуды вейвлет-преобразования $S \approx 12$ значения амплитуды, вычисленные численно по формулам (260)-(263) существенно меньше по абсолютной величине, чем рассчитанные по точным формулам (235)-(236). Для того, чтобы выяснить причину данного расхождения, приведем на графике 15 значения функции $n(S, u, X)$ вычисленные численно в сравнении с аналитическими значениями этой функции. Видно, что в области малых масштабов S численные и аналитические оценки близки, тогда как в промежуточной области $S \in [5-20]$ численные значения $n(s, u, X)$ существенно ниже аналитических. Указанные расхождения связаны с погрешностями численного интегрирования быстро меняющейся функции $exp(-((x_k - u)/S)/B)$ в области промежуточных значений S.

Точно также, численные значения оценки функции $n(S, u) = n(S, u, X)/\delta X$ существенно ниже точного значения этой величины, поэтому абсолютные значения вычисленных численно значений функций $A(S, u)$ и $B(S, u)$ будут заниженными, что видно на рисунке 13. При дальнейшем увеличении масштаба S условие $S \ll X$ не выполняется, поэтому асимптотическое значение $S\sqrt{\pi B}$ (см. формулу (254) будет существенно больше как точного, так и численного значений функции $n(S, u, X)$.

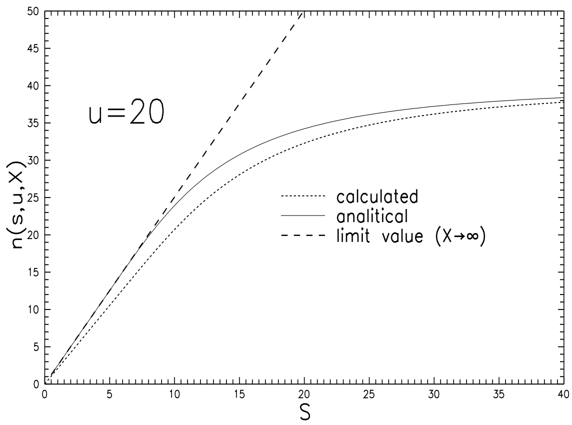


Рис. 15: Сравнение численной оценки (246) интеграла $n(S, u, X)$ – пунктир с короткими штрихами с точным значением (251) – тонкая сплошная линия и предельным значением (254) – пунктир с длинными штрихами.

Зависимость амплитуды от параметра сдвига U

На рис. 16 представлена зависимость параметров $A(S, U)$ и $B(S, U)$ от U. Хорошо видно падение точности расчета амплитуды вейвлет-преобразования вблизи краев области задания функции вне треугольника достоверности (см., [2]).

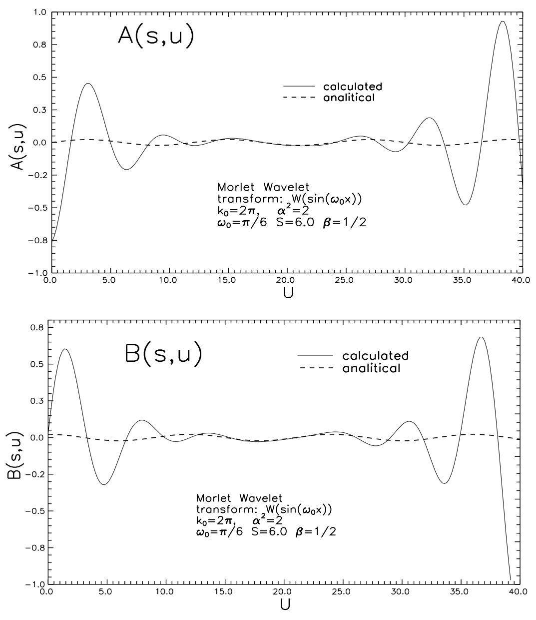


Рис. 16: Зависимость параметров $A(S,U)$ и $B(S,U)$ от U.

Зависимость скалограммы $P(S,U)$ от U показана на рис. 17.

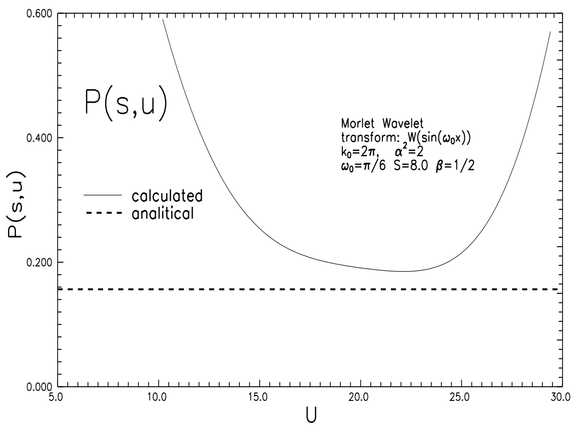


Рис. 17: Зависимость скалограммы $P(S,U)$ от U.

Вейвлет-преобразование шума Для разделения регулярного и случайного компонентов сигнала крайне важно исследовать статистические свойства вейвлет-преобразования шумовой компоненты сигнала. Будем считать, что анализируемая функция

$$r_k = r(x_k), \qquad k = 0, 1, ..., n-1\,, \tag{264}$$

является выборкой некоррелированных значения случайной величины $r(x)$, распределенной по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D = \sigma_0^2$ (дискретный белый шум):

$$\langle x_i x_j \rangle = \begin{cases} \sigma_0^2, & i = j\,, \\ 0, & i \neq j\,. \end{cases} \tag{265}$$

Используя соотношения (65)-(67), приведенные в [2], легко получить, что функции $A(S,u)$ и $B(S,u)$ при фиксированном значении параметра сдвига u представляют собой нормально распределенные случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{2} Z(S,u)\,, \tag{266}$$

где функция

$$Z(S,u) = \frac{\pi\,\alpha^2\,S^{2-2*\beta}}{n^2(S,u)} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-2\tau_k^2/\alpha^2}\,. \tag{267}$$

Здесь $\tau_k = (x_k - u)/S$.

При выводе формулы (267) предположено, что среднее значение $\langle \cos^2(k_0 x_k) \rangle = \langle \sin^2(k_0 x_k) \rangle = 1/2$, а вторым слагаемым в квадратных скобках в формуле (260) можно пренебречь.

Рассмотрим, аналогично [2] нормированную скалограмму

$$p(S,u) = \frac{P(S,u)}{\sigma_0^2 Z(S,u)}\,. \tag{268}$$

Величина $2\,p(S,u)$ (сумма двух нормально распределенных величин с единичной дисперсией) имеет распределение ξ^2 с двумя степенями свободы, то есть нормированная скалограмма $2\,p(S,u)$ является случайной величиной от переменной S с экспоненциальным распределением:

$$f(p)dp = e^{-p}\,. \tag{269}$$

Вероятность $\mathcal{P}$ того, что отсчеты нормированной скалограммы будут больше заданной величины S_0, определяется следующим соотношением:

$$\mathcal{P}\left\{p(s,u) > S_0\right\} = \int\limits_{S_0}^{\infty} f(p)dp = e^{-S_0}\,. \tag{270}$$

Зададим уровень значимости $q \ll 1$, определяющий вероятность редкого события – превышения отсчета нормированной скалограммы заданной величины S_q, тогда $S_q = -\ln q$. С вероятностью $p = 1 - q$ можно утверждать, что значения скалограммы, $P(s,u)$, удовлетворяющие неравенству

$$P(S,u) > \sigma_0^2\, Z(S,u) S_q\,, \tag{271}$$

связаны с сигналом, а не с шумом. Функция $Z(S,u)$ слабо зависит от параметра сдвига u.

5 ЛИТЕРАТУРА

Список литературы

[1] *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.*, Интегралы и ряды. Элементарные функции, М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 801 с. (1981)

[2] *Витязев В.В.*, Вейвлет-анализ временных рядов, СПб., Изд. СПбГУ (2016)

[3] *Иткин В.Ю., Кочуева О.Н.*, Интерполяция и сглаживание данных в пакете MATLAB, М. (2016)

[4] *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.*, СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ. Формулы, графики, таблицы, М.: Наука, 344 с. (1964)

[5] *Короновский А.А. Храмов А.Е.*, "Непрерывный вейвлет-анализ М., Физматлит, (2003)

[6] Foster G., Astron. J., **112**, 1709 (1996)

[7] http://ru.dsplib.org/content/fourier_transform_prop/fourier_transform_prop.html

[8] Grossman A., Morlet J., SAIAM J.Math. Anal., **15**, 273, (1984)

[9] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Формулы, графики, таблицы, М., изд. Наука (1977)

[10] Попов Б.А., Теслер Г.С., *Вычисление функций на ЭВМ*,Киев, изд. Наукова Думка (1984)

ПРИЛОЖЕНИЯ

A Вспомогательные формулы

A.1 Интегралы $I_n(a,b)$ и $I_n(a,b,c)$

Рассмотрим следующие важные интегралы:

$$I_n(a,b) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-(ax^2+bx)} dx\,, \tag{272}$$

где параметр $a>0$, а параметр b может быть произвольным.

и

$$I_n(a,b,c) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-(ax^2+bx+c)} dx\,, \tag{273}$$

Очевидно, что

$$I_n(a,b,c) = I_n(a,b)e^{-c}\,, \tag{274}$$

A.1.1 Случай $n=0$

Если $n=0$, то

$$I_0(a,b) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx)} dx\,. \tag{275}$$

Представим:

$$ax^2+bx = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}\,.$$

Сделаем замену $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 = y$, тогда $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}\dfrac{dy}{\sqrt{y}}$, а

$$I_0(a,b) = \frac{1}{\sqrt{a}}\,e^{b^2/4a}\int\limits_{0}^{\infty} y^{1/2-1}e^{-y}dy\; = \frac{1}{\sqrt{a}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{\,b^2/4a} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\;e^{\,b^2/4a}. \tag{276}$$

Интеграл

$$I_0(a,b,c) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\;e^{\,b^2/4a-c}. \tag{277}$$

A.1.2 Рекуррентные формулы

Дифференцируя выражение (272) по параметру b, найдем:

$$I_{n+1}(a,b) = -\frac{\partial I_n(a,b)}{\partial b}\,. \tag{278}$$

Используя соотношение (278) n раз получим окончательное выражение:

$$I_n(a,b) = (-1)^n \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\partial^n}{\partial b^n} \left[e^{\,b^2/4a} \right] . \tag{279}$$

При дифференцировании интеграла (272) по параметру a получим еще одно рекуррентное соотношение:

$$I_{n+2}(a,b) = -\frac{\partial I_n(a,b)}{\partial a} . \tag{280}$$

A.1.3 Частные случаи

Рассмотрим частные случаи интеграла (272) при $n \le 4$. Выражения при $n = 0$ даются формулой (275). Используя рекуррентные соотношения (278) и (280), найдем:

$$I_1(a,b) = -\frac{\partial I_0(a,b)}{\partial b} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} b e^{\,b^2/4a} , \tag{281}$$

$$I_2(a,b) = -\frac{\partial I_1(a,b)}{\partial b} = -\frac{\partial I_0(a,b)}{\partial a} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \left(1 + \frac{b^2}{2a} \right) e^{\,b^2/4a} . \tag{282}$$

и

$$I_3(a,b) = -\frac{\partial I_2(a,b)}{\partial b} = -\frac{\partial I_1(a,b)}{\partial a} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \left(\frac{b}{2a} \right) \left[3 + \frac{b^2}{2a} \right] e^{b^2/4a} . \tag{283}$$

$$I_4(a,b) = -\frac{\partial I_3(a,b)}{\partial b} = -\frac{\partial I_2(a,b)}{\partial a} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{5/2}} \left[3 + \frac{6b^2}{2a} + \frac{b^4}{(2a)^2} \right] e^{b^2/4a} . \tag{284}$$

Интегралы $I_n(a,b,c)$ при $n \le 4$ равны:

$$I_1(a,b,c) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} b e^{\,b^2/4a-c} , \tag{285}$$

$$I_2(a,b,c) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \left(1 + \frac{b^2}{2a} \right) e^{\,b^2/4a-c} . \tag{286}$$

и

$$I_3(a,b,c) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} \left(\frac{b}{2a} \right) \left[3 + \frac{b^2}{2a} \right] e^{b^2/4a-c} . \tag{287}$$

$$I_4(a,b,c) = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{5/2}} \left[3 + \frac{6b^2}{2a} + \frac{b^4}{(2a)^2} \right] e^{b^2/4a-c} . \tag{288}$$

A.2 Интеграл $I_n^{z_1,z_2}(a,b,c)$

Рассмотрим следующий важный интеграл:

$$I_n^{z_1,z_2}(a,b,c) = \int\limits_{z_1}^{z_2} x^n e^{-(ax^2+bx+c)} dx , \tag{289}$$

где параметр $a > 0$, а параметры b и c — произвольны. Интеграл (289) является обобщением интеграла (273).

A.2.1 Случай $n = 0$

Если $n = 0$, то

$$I_0^{z_1,z_2}(a,b,c) = \int\limits_{z_1}^{z_2} e^{-(ax^2+bx+c)} dx\,. \tag{290}$$

Представим:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = u^2 + \Gamma.$$

Здесь

$$u^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2,\ \Gamma = c - \frac{b^2}{4a}, \tag{291}$$

Сделаем замену $u = a^{1/2}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$, тогда

$$x = \frac{u}{a^{1/2}} - \frac{b}{2a} = fu + g, \quad dx = \frac{du}{a^{1/2}}, \tag{292}$$

где

$$f = \frac{1}{a^{1/2}}, \quad g = -\frac{b}{2a}. \tag{293}$$

Окончательно

$$I_0^{z1,z2}(a,b,c) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\Gamma} \int\limits_{u_1}^{u_2} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} e^{-\Gamma}\left[\mathrm{erf}(u_2) - \mathrm{erf}(u_1)\right]\,, \tag{294}$$

где мы использовали формулу (48).

Здесь

$$\begin{cases} u_1 = a^{1/2}\left(z_1 + \frac{b}{2a}\right), \\ u_2 = a^{1/2}\left(z_2 + \frac{b}{2a}\right), \quad . \end{cases} \tag{295}$$

A.2.2 Случай $n = 1$

Если $n = 1$, то

$$I_1^{z_1,z_2}(a,b,c) = \int\limits_{z_1}^{z_2} x e^{-(ax^2+bx+c)} dx\,. \tag{296}$$

Сделаем замену $u = a^{1/2}\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$ и используем соотношения (292), получим:

$$I_1^{z1,z2}(a,b,c) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\Gamma} \int\limits_{u_1}^{u_2} (fu+g) e^{-u^2} du\,. \tag{297}$$

Используя формулы

$$\int u e^{-u^2} du = -\frac{1}{2} e^{-u^2} + C, \quad \int e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}(u) + C, \tag{298}$$

получим

$$I_1^{z1,z2}(a,b,c) = \frac{e^{-\Gamma}}{2\sqrt{a}} \left[f \left(e^{-u_1^2} - e^{-u_2^2} \right) + g\sqrt{\pi} \left(\mathrm{erf}(u_2) - \mathrm{erf}(u_1) \right) \right]. \tag{299}$$

Подставляя выражения (293) для коэффициентов f и g, найдем:

$$I_1^{z1,z2}(a,b,c) = \frac{e^{-\Gamma}}{2a} \left[e^{-u_1^2} - e^{-u_2^2} + \frac{b\sqrt{\pi}}{2} \left[\mathrm{erf}(u_1) - \mathrm{erf}(u_2) \right] \right]. \tag{300}$$

A.2.3 Рекуррентные формулы

Дифференцируя выражение (289) по параметру b, найдем:

$$I_{n+1}^{z_1,z_2}(a,b,c) = -\frac{\partial I_n^{z_1,z_2}(a,b,c)}{\partial b}. \tag{301}$$

Используя соотношение (289) n раз получим окончательное выражение:

$$I_n^{z_1,z_2}(a,b,c) = \frac{(-1)^n}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \; \frac{\partial^n}{\partial b^n} \left[e^{-\Gamma} \left[\mathrm{erf}(u_2) - \mathrm{erf}(u_1) \right] \right]. \tag{302}$$