

Санкт-Петербургский государственный университет
Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН

О.П. Быков, К.В. Холшевников

**ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ
НЕБЕСНЫХ ТЕЛ**

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2013

ББК 22.6

А 72

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Ю.Д.Медведев
(ИПА РАН),
кандидат физ.-мат. наук, доц. В.Б.Титов
(С.-Петербург. гос. ун-т),

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Быков О.П., Холшевников К.В.

А 72

Прямые методы определения орбит небесных тел – СПб,
2013. – 151 с. ISBN 978-5-288-05393-1

В учебном пособии изложены основные методы определения орбит небесных тел, базирующиеся непосредственно на дифференциальных уравнениях движения (прямые методы). В качестве наблюдательной базы служат современные высокоточные позиционные наблюдения астероидов, комет и ИСЗ. Подробно рассматривается метод Лапласа и его существенная модификация (метод параметров видимого движения), использующая вместо фиксированной декартовой системы отсчета сопровождающий трехгранник. Приводятся многочисленные примеры. Книга может быть полезной и служить справочником для специалистов в области определения орбит и наблюдателей – любителей астрономии, вооруженных телескопами с современной приемной аппаратурой, а также может использоваться в качестве учебного пособия студентами и аспирантами соответствующего профиля.

ББК 22.6

© О.П.Быков, К.В.Холшевников, 2013
© С.-Петербургский гос. университет, 2013

ISBN 978-5-288-05393-1

Оглавление

Введение	6
Глава 1. Методы наблюдений небесных тел	12
1.1 Краткий обзор методов наблюдений небесных тел	12
1.2 Современные ПЗС-наблюдения	14
1.3 Точность ПЗС-наблюдений астероидов	21
1.4 Значение плотных равноточных рядов наблюдений на примере первых фотографических наблюдений ИСЗ	25
1.5 Возможность классификации небесных тел на ос- нове параметров их видимого движения	30
Глава 2. Геометрия кривых на сфере	34
2.1 Элементарные формулы векторной алгебры	35
2.2 Параметризация сферы	36
2.3 Первая и вторая квадратичные формы. Символы Кристофеля	38
2.4 Кривые на сфере. Естественный трехгранник	40
2.5 Производные от ортов естественного трехгранника	48
2.6 Сводка формул дифференциальной геометрии сферы, используемых при определении орбит небесных тел	49
Задачи к главе 2	52
Глава 3. Основные уравнения прямых методов опреде- ления орбит и получение входящих в уравне- ния параметров из наблюдений	61
3.1 Система обозначений	62
3.1.1 Гелиоцентрическое движение небесного тела	62
3.1.2 Геоцентрическое движение небесного тела	64
3.1.3 Относительное геоцентрическое движение небесного тела	66

3.2	Дифференцирование по времени векторов, характеризующих положение наблюдателя	66
3.3	Метод Лапласа	68
3.4	Метод параметров видимого движения	69
3.5	Определение параметров, входящих в основные уравнения, из наблюдений	70
3.6	Методические ошибки прямых методов определения орбит небесных тел	77
3.7	Применение математического моделирования для исследования влияния методических ошибок . . .	79
3.8	Возможность определения ПВД посредством компьютерной обработки последовательных ПЗС-кадров с изображениями небесных тел	82
3.9	Учет возмущений на этапе определения первоначальной орбиты	83
	Задачи к главе 3	84
Глава 4. Решение уравнений		89
4.1	Определение орбиты при наличии совместных угловых и дальномерных наблюдений	89
4.2	Алгоритм решения системы уравнений метода Лапласа	90
4.3	Алгоритм решения системы уравнений метода ПВД	93
4.4	Круговая орбита	94
4.5	Параболическая орбита	96
4.5.1	Параболическая орбита в окрестности перигелия	96
4.5.2	Произвольная параболическая орбита . . .	97
4.6	Эллиптическая орбита небесного тела по ПВД первого порядка и априорной информации	99
4.6.1	Гипотеза перигелийного прохождения . . .	99
4.6.2	Гипотеза принадлежности астероида известному метеорному потоку	101
4.7	Методы Тэффа-Холла, Данжона и улучшение орбит небесных тел	102
4.8	О точности элементов орбит, вычисляемых прямыми методами	104
4.9	Рекомендации по практическому применению прямых методов	106
	Задачи к главе 4	115
Глава 5. Особые случаи определения орбит небесных тел		117

5.1	Точка остановки	118
5.1.1	Существование точек остановки, гелиоцентрический случай	118
5.1.2	Существование точек остановки, геоцентрический случай	122
5.1.3	Решение уравнений при $\dot{\mathbf{D}} = 0$	124
5.2	Движение по большому кругу	126
5.2.1	Условия, влекущие обращение геодезической кривизны в нуль, гелиоцентрический случай	126
5.2.2	Условия, влекущие обращение геодезической кривизны в нуль, геоцентрический случай	129
5.3	Решение уравнений при $\varkappa = 0, \mu > 0$	130
	Задачи к главе 5	131
Глава 6. Эфемеридное значение параметров видимого движения		134
6.1	Вычисление параметров видимого движения при известной орбите	134
6.2	Вычисление топоцентрических ПВД	136
6.3	Эфемериды нового типа: не только положения небесного тела, но и его ПВД	137
6.4	Краткий обзор современных эфемеридных систем	139
Заключение		141
Литература		144

Введение

Методы определения орбит небесных тел из наблюдений, восходящие к Ньютону, Эйлеру, Лапласу и Гауссу, получили новую область применения с началом космической эры, открытой 4 октября 1957 года запуском первого советского искусственного спутника Земли. С тех пор на протяжении уже более 50 лет задача высокоточного определения элементов орбит ИСЗ (а теперь и многочисленных фрагментов космического мусора) по разного рода наблюдательным данным, как и задача описания видимых движений спутников на основе получаемых орбит, не теряют своей актуальности. То же можно сказать об определении орбит комет и астероидов, открываемых теперь сотнями и тысячами каждый год. Традиционно высокоточные орбиты новых небесных тел определяют в два этапа. На первом используется относительно небольшое число наблюдений, покрывающих часть (обычно малую) траектории, и в результате решения соответствующих уравнений в нашем распоряжении оказывается *предварительная*, или *первоначальная* орбита. На втором этапе орбита улучшается, привлекаются все имеющиеся наблюдения, и в результате их статистической обработки получают то, что раньше называли *окончательной* орбитой. Сейчас этот термин выходит из употребления, поскольку процесс улучшения орбит идет непрерывно, по мере поступления новых наблюдений. Заметим, что термин *улучшение орбиты* означает уточнение наших знаний об орбите, и до 1957 года был совершенно естествен. Но теперь действительно изменяют орбиты космических аппаратов, чтобы они лучше служили поставленным целям. В недалеком будущем будут изменять и орбиты малых астероидов и комет. Такие изменения называют *коррекцией* орбиты. Стремительный прогресс средств наблюдений тел Солнечной системы (включая искусственные небесные тела) сопровождался адекватным прогрессом мето-

дов улучшения их первоначальных или априорно известных орбит с использованием больших массивов наблюдений, выполняемых на сети станций слежения. По нашему мнению, этого нельзя сказать о методах определения первоначальных орбит. Мы надеемся, что эта книга поможет выправить положение. Ведь современные наблюдения (особенно это касается наблюдений ИСЗ, зачерчивающих большую дугу при одном прохождении над обсерваторией) дают возможность быстро определить предварительную орбиту сравнительно высокой точности.

Впервые задача об определении орбиты неизвестного небесного тела по скудному набору наблюдений была сформулирована Лапласом в 1780 году в „Мемуаре об определении орбит комет“ [66]. Задача была решена в предположении, что в фиксированную эпоху известно положение объекта *на небесной сфере*, а также его первые и вторые производные по времени. С точки зрения теории, как отмечал А.Д.Дубяго [28], „едва ли можно найти более совершенное решение, чем полученное Лапласом“. Более того, критически проанализировав все существующие в то время работы по вопросу о методах определения орбит из позиционных наблюдений, М.А.Вильев доказал [26], что „в пределе — при бесконечном уменьшении промежутков времени между отдельными наблюдениями — все теоретически правильные способы определения параболических орбит из двух полных и одного неполного наблюдения и определения орбиты без предположения относительно эксцентриситета из трех полных наблюдений переходят в способ Лапласа, основные уравнения которого непосредственно следуют из дифференциальных уравнений гелиоцентрического движения светила“.

Однако техника XIX и даже первой половины XX века не позволяла определить входные для метода Лапласа величины с приемлемой точностью. Постановка и решение реалистичной задачи, когда известно положение объекта на небесной сфере в три последовательных момента времени, было дано Гауссом в его знаменитой работе „Теория движения небесных тел, обращающихся вокруг Солнца по коническим сечениям“ [62]. Метод Лапласа, несмотря на неоднократные попытки, предпринимаемые в XIX веке, практически реализовать не удалось [67, 47]. Это можно объяснить многими причинами. Лаплас и Гаусс были современниками, и возникшая в 1801 году в связи с открытием первой малой планеты проблема определения ее орбиты, казалось, не могла не привлечь внимания

Лапласа. Ведь только что открытая малая планета была к весне 1801 г. потеряна, и надо было обнаружить ее вновь. Но история не сохранила никаких сведений о намерениях определить орбиту Цереры методом Лапласа. Как ни странно, ни он сам, ни его окружение эту задачу не рассматривали, и до сих пор вопрос об альтернативном определении орбиты Цереры по её 41 положению, полученному из наблюдений в январе–феврале 1801 года, остается открытым. Ради исторической справедливости хорошо бы выполнить эту работу, используя тогдашние данные о движении Земли.

Одной из основных причин, затрудняющих практическое применение метода Лапласа, было то, что видимое движение известных в то время небесных тел было незначительным на малых интервалах времени, а точность наблюдений — невысокой. Поэтому получение надежных значений первых и вторых производных сферических координат светил представляло значительные трудности. Другим серьезным препятствием являлось то, что требуемые первые и вторые производные сферических координат светила традиционно рекомендовалось находить численно, используя лишь три положения светила в соответствующие три момента времени — по аналогии с тремя положениями в методе Гаусса. Это не могло не приводить к существенной методической ошибке и, как следствие, к нереальным элементам орбит, которые трудно было улучшить по совокупности всех остальных имеющихся наблюдений из-за хорошо известной теперь зависимости процессов улучшения орбит от точности первоначальных элементов, используемых в качестве улучшаемых. Только в конце 1950-х годов Ж.Ковалевский в своей диссертации успешно применил метод Лапласа для определения орбиты малой планеты *1372 Бранбантия*, отказавшись от численного вычисления производных посредством разностей положений и используя полиномиальное представление массивов сферических координат по степеням времени с последующим дифференцированием этих полиномов [64].

Появление искусственных небесных тел не изменило принятого подхода к проблеме определения орбит. В первых публикациях [51] задача формулировалась следующим образом: в результате обработки выполненных наблюдений подобрать с помощью метода наименьших квадратов такие параметры орбиты спутника, при которых вычисленные его координаты наилучшим образом согласуются с координатами наблюдаемыми. Проблема определения первоначальных орбит, в основном, решалась по данным тра-

екторных измерений, которые выполнялись во время вывода ИСЗ на орбиту. Правда, Ж.Ковалевский и Ф.Барлье в Париже [65, 53] и В.Ф.Проскурин и К.П.Ивановская в Ленинграде [30] в начале 1960-х годов пытались применить метод Лапласа к определению орбит ИСЗ, используя оптические наблюдения, выполненные с одной станции за одно прохождение спутника. Но попытки этих исследователей не увенчались успехом вследствие того, что в первом случае наблюдения были распределены на топоцентрической дуге более 30° , и используемые полиномы высоких степеней по времени дали нереальные значения вторых производных координат; во втором случае были взяты визуальные наблюдения спутника, которые заведомо не соответствовали требуемой точности. В итоге в области определения орбит космических объектов утвердились методы улучшения, и главными проблемами здесь стали четкая организация разнообразных наблюдений на обширной сети станций слежения, передача измерительной информации в центры сбора и обработки, создание надежной теории движения ИСЗ, которая необходима при работе с продолжительными по времени рядами наблюдений.

Современная техника оптико-электронных наблюдений позволяет получать с помощью ПЗС-телескопа десятки положений небесного тела на короткой дуге в известные моменты времени на фоне звезд, а также вычислять скорости изменения этих положений со временем. Некоторые авторы в связи с этим утверждали, что «появившаяся возможность вычислять мгновенные топоцентрические угловые скорости небесного тела...заставляет рассмотреть новую проблему определения его первоначальной орбиты: вычисления орбитальных элементов из наблюдений углов и угловых скоростей» [69]. На самом деле эта проблема не нова, ей уже более двух столетий, если считать со времени постановки и теоретического решения этой проблемы Лапласом в 1780 г. Кроме того, в восьмидесятые годы прошлого века в Пулковской обсерватории А.А.Киселевым был предложен метод параметров видимого движения (метод ПВД), развивающий идеи Лапласа и позволяющий определять надежные элементы кеплеровых орбит ИСЗ и двойных звезд по результатам их фотографических наблюдений на короткой дуге видимой траектории [5, 6, 7, 18, 34, 35, 37, 38].

Классический лапласов метод определения орбиты небесного тела по положению и изменениям этого положения с течением време-

ни, а также метод ПВД, наблюдательную основу которого составляют шесть параметров видимого движения объекта, следуя терминологии М.Ф.Субботина [11], относят к прямым методам определения орбит, использующих непосредственно дифференциальные уравнения движения небесного тела. Оба метода в оптимальных условиях их применения дают однозначные и устойчивые решения, которые близки к реальным элементам орбит наблюдавшихся небесных тел. Надо только отказаться от вычисления первых и вторых производных лишь по трем положениям. В наших работах используется вся совокупность наблюдательных данных на топоцентрической дуге определенной длины, которые статистически обрабатываются для надежного определения шести параметров, характеризующих видимое движение объекта (положение, скорость и ускорение на небесной сфере). Заметим, впрочем, что в оригинальных работах А.А.Киселева и О.П.Быкова мощный аппарат дифференциальной геометрии на сфере был использован не в полной мере. В частности, не рассматривалось понятие геодезической кривизны, сильно упрощающее уравнения. Здесь мы выводим уравнения, несколько отличающиеся по форме от использованных в предшествующих статьях. Форма их решения также видоизменена.

Предполагается знакомство читателя со стандартными курсами математики и физики в объеме физико-математических и технических факультетов университетов, а также с курсами общей астрономии, астрометрии и частью курса небесной механики, трактующей задачу двух тел и начала теории возмущенного движения.

В **первой главе** речь идёт о методах наблюдений небесных тел — от визуальных до современных оптико-электронных с помощью ПЗС-матриц. **Вторая глава** рассказывает о геометрии кривых на сфере. Мы решили посвятить этому целую главу, поскольку в астрономических курсах эта тема практически не затрагивается, а в посвященных дифференциальной геометрии математических курсах не выделяется из общей теории кривых на произвольных поверхностях. **Третья глава** описывает наблюдательную основу прямых методов определения орбит из оптических наблюдений. Выводятся уравнения классического метода Лапласа и пулковского метода параметров видимого движения (метода ПВД). Сравниваются системы уравнений двух названных прямых методов, представлены специальные алгоритмы вычисления параметров видимого движения второго порядка и проанализированы их систематические

ошибки. В **четвертой главе** приводятся алгоритмы решения систем уравнений прямых методов при различном наборе наблюдательных данных и априорной информации о движении объекта. Здесь же кратко представлены другие методы определения орбит, в частности, весьма перспективная модификация метода Лапласа, предложенная А.Данжоном [47] и реализованная М.Ю.Клокачевой [39]. **Пятая глава** посвящена случаям вырождения системы уравнений определения орбит, когда собственное движение или геодезическая кривизна видимой траектории небесного тела обращается в нуль. Исследовано, в каких обстоятельствах возможно вырождение и как надо модифицировать алгоритмы решения уравнений. В **шестой главе** выведены формулы, описывающие видимое движение известного небесного тела над наземным наблюдателем, и представлена пулковская эфемеридная программная система ЭПОС, с помощью которой можно решать большой ряд астрономических задач: вычисление эфемерид объекта по его известным элементам, контроль наблюдений, идентификация наблюдаемых небесных тел, визуализация движения небесных тел и т.д. В **заключении** рассмотрены перспективы применения прямых методов в современных условиях при решении разных задач по вычислению орбит небесных тел из наблюдений средствами наземного и космического базирования. Кроме того, здесь представлен перечень вопросов, которые ещё требуют своего решения для успешного использования прямых методов в задачах контроля околоземного космического пространства и экологии ближнего космоса.

В конце каждой из глав 2 – 5 приводятся задачи. Трудные задачи сопровождаются указаниями или даже схемами решения. Решения некоторых задач используется в основном тексте, чтобы не загромождать его утомительными выкладками. Ко всем задачам приводятся ответы, так что наша книга может служить справочником.

Учебное пособие отражает большой опыт работы первого автора за более чем тридцатипятилетний период по вычислению оскулирующих орбит искусственных спутников Земли, астероидов и комет, а также преподавательский опыт авторов, читавших спецкурсы по определению и улучшению орбит в Петербургском и Томском университетах.

Глава 1

Методы наблюдений небесных тел

1.1 Краткий обзор методов наблюдений небесных тел

Наблюдательная астрономия возникла тогда, когда древний человек сделал первый шаг от простого созерцания небосвода с расположенными на нем светилами к осмыслению их движений в течение сначала коротких, а потом и продолжительных интервалов времени. Собственно, и само понятие времени возникло в этот же период осознания наблюдаемых периодичностей в смене природных явлений, например, света и темноты, тепла и холода. Постепенно пришло умение сопоставлять разнообразные факты бытия, искать причины и следствия, а затем объяснять видимым движением небесных светил некоторые особенности повседневной жизни и своего существования. Поэтому первым методом астрономических наблюдений был и долго оставался **визуальный**, а основными инструментами — человеческий глаз и мозг.

Прекрасный анализ первобытной астрономии и астрономии древнего мира дан в [4, 27].

По мере развития цивилизации и науки появились астрономические приборы, сперва примитивные, затем более совершенные, вооружившие астронома гораздо более мощными средствами наблюдений, такими, как армиллярная сфера, гномон, квадрант, астролябия, солнечные часы и, наконец, телескоп. Методы визуальных наблюдений с помощью телескопов стали называться **оптическими**. Они многократно повысили количество наблюдаемых небесных тел, точность определения их положений на небесной сфере,

и господствовали в наблюдательной астрономии до конца XIX века, когда были вытеснены **фотографическими** методами, которые, конечно, являются оптическими, но регистрация принимаемого излучения небесных тел производится не глазом наблюдателя, а фотографической пластинкой или фотопленкой. Это имеет много преимуществ, и среди них знаменитая и понятная без комментариев триада: документальность, интегральность и моментальность. Фотографические пластинки, полученные в различных обсерваториях мира в результате выполнения многочисленных научных программ за сто лет развития астрономии в XX веке, следует считать национальным достоянием в каждом государстве. Такие архивы — сокровищница мировой науки.

После второй мировой войны в наблюдательную астрономию пришли **радиотехнические** методы наблюдений. С их внедрением и развитием возникло новое направление в астрономии — радиоастрономия, исследующая излучение небесных светил в радиодиапазоне. С их помощью появилась возможность измерять *расстояния* до небесных тел и *скорости* изменения этих расстояний — впервые в астрометрии, которая тысячелетиями была связана с измерением лишь *направлений* на небесные светила.

В конце прошлого века в астрономии произошла очередная техническая революция: наступила эпоха **ПЗС-методов** наблюдений, точнее говоря — методов **оптико-электронных**. Сейчас никто не удивляется цифровым фотоаппаратам, видеокамерам, разнообразным системам контроля и слежения, в основе которых лежат так называемые ПЗС-матрицы (**Приборы с Зарядовой Связью**), имеющие способность оцифровывать любые изображения, которые получают в фокальной плоскости фотокамеры или телескопа, и воспроизводить эти изображения на экране дисплея, допуская их высокоточные измерения. ПЗС-наблюдения небесных тел по сравнению с фотографическими на два порядка эффективнее по скорости и комфортности при сохранении трех компонентов вышеназванной фотографической триады. ПЗС-наблюдения всего за десять лет произвели настоящий переворот в наблюдательной астрономии, и за ними, несомненно, блестящее будущее.

Заметим, что все методы наблюдений небесных тел требуют фиксации времени наблюдений, точность которой должна соответствовать точности определения положений. Особенно важна засечка времени при наблюдениях быстро движущихся объектов: ИСЗ и

астероидов, сближающихся с Землей. В первом случае надо обеспечить регистрацию моментов времени не хуже тысячной доли секунды, во втором в подавляющем большинстве случаев можно ограничиться десятными долями секунды.

1.2 Современные ПЗС-наблюдения

В астрометрии первые серьезные результаты с применением ПЗС-матриц были получены группой Тома Герелса в Лунно-планетной лаборатории Аризонского университета США. Сами ПЗС-матрицы появились при разработке американской программы СОИ (стратегическая оборонная инициатива) в начале 1980-х годов, и уже через пять лет стало возможным использовать их в научных целях для астрономических наблюдений. Создание новых оптико-электронных средств контроля космического пространства — быстрых, надежных и эффективных — являлось одной из задач названной программы, которая была успешно решена американскими специалистами и промышленностью. В России в это время для такой работы уже не было условий, и здесь мы значительно отстали. Тем не менее быстрое внедрение в мировую астрономию новых средств наблюдений за прошедшие два десятилетия имело огромное значение для нашей науки. Сейчас в Америке, Европе, Японии каждый астроном-любитель, имея телескоп сравнительно скромных размеров, но оснащенный ПЗС-матрицей, может работать и работает, скажем, в области наблюдений астероидов и комет, практически профессионально. Поэтому позиционные наблюдения любителей астрономии широко используются при решении задачи контроля околоземного космического пространства в целях обнаружения объектов, опасно сближающихся с Землей. Более того, фотографические пластинки для астрономов уже практически не выпускаются, поскольку все обсерватории мира оснащены современными ПЗС-камерами и компьютерами, полностью вытеснившими фотографические наблюдения.

Никогда за всю историю астрономии ещё не имелось возможности так оперативно, массово и точно получать положения и блеск небесных тел по результатам их позиционных и фотометрических наблюдений — практически сразу же после их окончания. Кроме того, ПЗС-наблюдения могут иметь исключительно большую плотность и насыщенность: можно „набрать“ множество следующих

друг за другом ПЗС-кадров и детально изучать движение, скажем, астероида или кометы на короткой топоцентрической дуге, тем более, что специальное программное обеспечение позволяет объединять полученные близкие по времени ПЗС-кадры в один сводный, на котором можно увидеть всю наблюденную траекторию объекта. Это открывает новые возможности исследований, особенно в области оперативного определения орбит небесных тел. Точность наблюдений этих объектов по крайней мере в два раза, а то и на порядок выше, чем точность аналогичных фотографических наблюдений. Многие из перечисленных возможностей были в последние годы реализованы сотрудниками Пулковской обсерватории.

Наиболее успешным применением ПЗС-матриц авторам представляются наблюдения ИСЗ, космического мусора, комет, астероидов Главного пояса и пояса Эджворта-Койпера. Сейчас в этой области только для астероидов Главного пояса накоплено огромное число наблюдений для более 500 000 объектов. Информация хранится в Международном центре малых планет, США. Таблица 1.1 дает представление о числе выполненных ПЗС-наблюдений нумерованных и нenumерованных астероидов в 2003-2004 годах обсерваториями мира. Фотографические наблюдения астероидов в настоящее время не производятся. Однако накопленные архивы фотографических пластинок не потеряли своего значения. Они переводятся на современные носители информации для обеспечения возможности отождествления вновь открываемых малых планет с их наблюдениями в прошлом.

Как видно из данных таблицы, за год обсерватории мира, как любительские, так и профессиональные, получают несколько миллионов положений для сотен тысяч малых планет. При этом следует иметь в виду, что в столбце „Обсерватории“ представлено общее число таковых, работавших в указанный период; в соседнем интервале дат среди них могут оказаться другие обсерватории, которых не было среди представленных ранее. Всего под эгидой Международного Астрономического Союза за последние пять лет в ПЗС-наблюдениях астероидов участвовало порядка тысячи обсерваторий, две трети из которых были любительскими. Основной вклад вносят профессиональные обсерватории, работающие по программам наблюдений астероидов, сближающихся с Землей. Некоторые из них имеют светосильные полностью автоматизированные ПЗС-телескопы с большими полями зрения (см. табл. 1.2, обс. 704). Но

Таблица 1.1: Данные Международного центра малых планет, обработанные пулковскими астрономами в 2003-2004 гг. для оценки точности ПЗС-наблюдений малых планет обсерваториями мира

Даты	М а л ы е п л а н е т ы				
	Ненумерованные			Нумерованные	
	Число положений	Объем (Мб)	Обсерватории	Число положений	Объем (Мб)
2003 02	601200	49.3	180	1017190	83.4
2003 03	158459	13.0	129	246649	20.2
2003 06	427928	35.1	171	789704	65.8
2003 09	283573	23.2	175	375056	30.8
2003 11	552160	45.3	184	703737	57.7
Всего	2023320	165.9		3132336	257.9
2004 02	689294	56.5	194	1041378	85.4
2004 05	585026	48.0	239	1129297	92.6
2004 08	429130	35.2	203	875159	71.8
2004 10	583080	47.8	272	815653	66.9
Всего	2286530	187.5		3861487	316.7

и малые любительские телескопы дают вполне хорошие результаты (см. там же, obs. 938), выполняя задачу накопления наблюдений вновь открываемых объектов для уверенного вычисления их орбит. О точности наблюдений дают представление табл. 1.2 и 1.3. Оценки точности выполнены по пулковской методике, главной идеей которой является использование в качестве своеобразного репера надежных орбит хорошо исследованных объектов (избранных нумерованных астероидов, спутников систем ГЛОНАСС и GPS и т.п.). Вычисленные для них астрометрические положения будут отягощены ошибками, по крайней мере на порядок меньшими ошибок наблюдений. Поэтому полученные на обсерватории значения $(O - C)^1$ могут рассматриваться как ошибки реальных наблюдений.

¹от латинского Observatum minus Calculatum, наблюденное минус вычисленное.

Таблица 1.2: Точность мировых ПЗС-наблюдений малых планет в 1999-2003 гг.

Код МЦМП	Страна, обсерватория	Диаметр, фокус (м)	Поле зрения	Масштаб, ("/px), каталог	Число		Средняя ошибка одного положения		
					планет	поло- жений	по α	по δ	тип
291	USA, Kitt Peak, Spacewatch II	1.8	390 x 30'	1.0" USNO	4362	16482	0.24"	0.19"	int
2002		4.7			612	4249	0.35	0.25	ext
291					7188	28048	0.24	0.18	int
2003					1124	7969	0.34	0.23	ext
691	USA, Kitt-Peak, Spacewatch-I	0.88	390 x 30'	1.1" USNO	1114	5823	0.23	0.26	int
1999		4.6			458	3408	0.40	0.34	ext
691					1898	10540	0.20	0.21	int
2000					635	5261	0.34	0.31	ext
691					4697	19194	0.22	0.20	int
2001					787	5389	0.38	0.34	ext
691					3856	14934	0.21	0.22	int
2002					680	4440	0.33	0.38	ext
691					20954	101722	0.20	0.18	int
2003					7553	50350	0.33	0.38	ext
621	Germany, Bergisch Gladbach	0.60	11 x 10'	1.2" USNO	17	125	0.21	0.15	int
1999		3.1			17	134	0.22	0.21	ext
621					22	152	0.14	0.12	int
2000					19	156	0.22	0.15	ext
621					73	480	0.24	0.20	int
2001					55	455	0.28	0.21	ext
621					102	649	0.30	0.22	int
2002					61	493	0.30	0.22	ext
621					241	1416	0.36	0.41	int
2003					101	872	0.37	0.33	ext

Таблица 1.2: Точность мировых ПЗС-наблюдений малых планет в 1999-2003 гг. (продолжение)

Код МЦМП	Страна, обсерватория	Диаметр, фокус (м)	Поле зрения	Масштаб, ("/px), каталог	Число		Средняя ошибка одного положения		
					планет	поло- жений	по α	по δ	тип
673	USA, Table Mountain	0.61	9 x 9'	0.5" ACT	107	995	0.12	0.06	int
1999		9.6			115	1468	0.16	0.22	ext
673					77	594	0.11	0.10	int
2000					49	496	0.10	0.06	ext
673					50	485	0.12	0.06	int
2001					56	731	0.13	0.06	ext
673					145	1326	0.11	0.08	int
2002					124	1561	0.10	0.10	ext
673					161	1031	0.19	0.18	int
2003					111	1023	0.18	0.18	ext
704	USA, LINEAR Lincoln Laboratory, Robot- Telescope	1.0	94 x 72'	2.2" USNO	9958	186649	0.68	0.64	int
1999		2.2			6906	140894	0.70	0.68	ext
704					14203	432368	0.51	0.51	int
2000					11794	354850	0.54	0.55	ext
704					27170	917380	0.49	0.50	int
2001					23898	820112	0.59	0.60	ext
704					48098	1302533	0.49	0.49	int
2002					41426	1151835	0.64	0.65	ext
704					64182	1694101	0.52	0.51	int
2003					53409	1424227	0.63	0.61	ext
938	Portugal, Linhaceira	0.25	14 x 9'	2.2" USNO	31	317	0.38	0.36	int
2001		1.7			28	309	0.62	0.65	ext
938					30	507	0.36	0.38	int
2002					18	262	0.46	0.65	ext
938					52	736	0.34	0.32	int
2003					13	280	0.36	0.34	ext

Таблица 1.3: Пример современных ПЗС-наблюдений астероидов: геоцентрические положения, скорости изменения координат и величины невязок (O-C)

Номер мал.пл.	Код МЦМП	Динамическое время	Геоцентрические положения и их невязки					
			α	(O-C)	δ	(O-C)	V	Z
20755	673	2004 08 28.423528	5h 05m32.106s	-0.16''	+33°15'37.21''	-0.26''		53°
		28.428292	32.363	-0.09	38.87	-0.23		51
		28.434127	32.668	-0.13	40.86	-0.24		50
20755	673	2004 08 28.438935	32.925	-0.08	42.52	-0.24		48
Норм.место 4 наблюд.			28.431221	5 05 32.515	-0.115	+33 15 39.87	-0.242	
				$\pm 0.018''$		$\pm 0.006''$		
Средняя ошибка одного наблюдения				0.037''		0.013''		
Скорости $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$ (за сутки)			53.074 ^s	4.55''	344.34''	1.00''		
Относительные ошибки скоростей(%)				0.6		0.3		
20755	673	2004 08 29.425291	5 06 24.580	-0.14''	+33 21 21.43	-0.15''		51
		08 29.434854	25.088	0.01	21 24.64	-0.23		49
		09 12.454946	5 17 06.897	-0.14	+34 42 30.73	-0.43		34
		12.459895	07.102	0.01	32.55	-0.34		32
		12.465010	07.293	-0.10	34.25	-0.44		31
20755	673	2004 09 12.469876	07.485	-0.07	35.98	-0.42		29
Норм.место 4 наблюд.			12.462432	5 17 07.194	-0.075	+34 42 33.38	-0.407	
				$\pm 0.032''$		$\pm 0.023''$		
Средняя ошибка одного наблюдения				0.064''		0.046''		
Скорости $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$ (за сутки)			39.168	2.58''	350.03	-1.53''		
Относительные ошибки скоростей(%)				0.4		0.4		

Таблица 1.3: Пример современных ПЗС-наблюдений астероидов: геоцентрические положения, скорости изменения координат и величины невязок (O-C) (продолжение)

Номер мал.пл.	Код МЦМП	Динамическое время	Геоцентрические положения и их невязки					
			α	(O-C)	δ	(O-C)	V	Z
20755	673	2004 10 13.449031	5 27 24.715	$-0.11''$	+37 49 45.88	$-0.29''$		13
		13.453542	24.703	-0.16	47.51	-0.31		12
		13.458054	24.700	-0.08	49.20	-0.28		10
20755	673	2004 10 13.462571	24.689	-0.11	50.85	-0.28		9
Норм.место 4 наблюд.			13.455800	5 27 24.702	-0.115	+37 49 48.36	-0.290	
				$\pm 0.017''$		$\pm 0.007''$		
Средняя ошибка одного наблюдения				$0.033''$		$0.014''$		
Скорости $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$ (за сутки)				-1.732	$2.79''$	368.42	$1.06''$	
Относительные ошибки скоростей(%)				9.7		0.3		
Средние значения (O-C) из 14 наблюдений				$-0.096'' \pm 0.014''$		$-0.296'' \pm 0.023''$		
Средняя ошибка одного наблюдения				$0.054''$		$0.085''$		
4181	673	2004 08 28.498748	5 38 16.229	$-0.08''$	+ 9 40 08.65	$-0.03''$		48
		28.503446	16.661	0.22	07.76	-0.11		47
		2004 08 29.495701	5 39 43.277	0.03	+ 9 37 14.86	-0.01		48
		29.513903	44.859	0.00	11.57	-0.07		43
		2004 09 12.521255	5 59 03.965	0.11	+ 8 47 13.81	-0.08		36
		12.524499	04.217	0.09	13.01	-0.07		35
		2004 09 27.443306	6 16 55.935	0.21	+ 7 37 08.37	-0.11		49
		27.446722	56.146	0.05	07.34	-0.08		48
		2004 10 13.467050	6 32 01.480	0.05	+ 6 07 58.02	-0.04		36
		13.470176	01.631	0.10	56.92	-0.05		35
		2004 10 14.424740	6 32 45.916	0.20	+ 6 02 21.02	-0.13		46
		14.429253	46.117	0.12	19.48	-0.09		45
Средние значения (O-C) из 12 наблюдений				$0.092'' \pm 0.026''$		$-0.073'' \pm 0.010''$		
Средняя ошибка одного наблюдения				$0.090''$		$0.035''$		

1.3 Точность ПЗС-наблюдений астероидов

Анализ точности астрономических наблюдений был и остается одним из традиционных направлений в исследованиях пулковских астрономов. При наблюдениях малых планет этот анализ обычно выполняется **орбитальным методом** с помощью разностей (O-C), т.е. путем сравнения наблюденных координат небесного тела (O) с его вычисленными координатами (C), для чего требуется знание теории движения наблюденного объекта. В настоящее время теории движения малых планет, имеющих большие массивы астрометрических наблюдений, разработаны и реализуются в виде различных высокоточных программных систем. Такими теориями обеспечены нумерованные малые планеты, имеющие продолжительные ряды позиционных наблюдений, выполненных за многие десятилетия и в различных оппозициях. Орбиты нумерованных астероидов могут служить эталоном, относительно которого можно проверять качество текущих наблюдений, выполняемых на современных телескопах с ПЗС-приемниками излучения. В получаемых разностях (O-C), которые характеризуют отличие наблюденного положения от предвычисленного эфемеридного, почти всю „ответственность“ за появление существенных значений этих величин и — что особенно важно — за разброс этих значений в течение одной ночи или нескольких близких ночей несут именно наблюдения, а не теория движения нумерованной малой планеты. Справедливости ради надо уточнить, что теории движения тел Солнечной системы регулярно требуют новых наблюдений для своего совершенствования, поэтому появление в разностях (O-C) систематической составляющей вполне закономерно: именно ее наличие указывает на необходимость проведения очередного процесса улучшения элементов орбиты. Однако в нашем методе важна лишь случайная компонента в разностях (O-C), а систематическая их составляющая и ее вариации в пределах нескольких последовательных ночей может привлечь внимание только в случае квазисинхронных наблюдений одной и той же малой планеты несколькими телескопами. Это будет свидетельствовать о появлении систематической ошибки наблюдений на какой-либо обсерватории, где величины разностей (O-C) резко отличаются от остальных. С этим может разобраться только наблюдатель, если он своевременно заметит такое явление при анализе своих наблюдений в сравнении с данными дру-

гих обсерваторий. Правда, не исключены случаи заметных колебаний разностей (О-С) одной и той же нумерованной малой планеты при ее наблюдениях на одной обсерватории в течение нескольких последовательных ночей, что, как правило, вызывается ошибками звездных каталогов или такими особенностями движения астероида, как его тесное сближение с Землей или другой большой планетой. Но далеко не все профессиональные астрономы и тем более астрономы-любители подробно и тщательно анализируют свои наблюдения перед отправкой их в Международный центр малых планет, а последний вследствие огромного и всё возрастающего объема поступающей информации не может оперативно оценить качество получаемых материалов: там это делается только при улучшении орбит, т.е. очень поздно с точки зрения возможности обнаружения, понимания и устранения ошибок наблюдений самим наблюдателем. В процессе улучшения орбит аномально большие величины разностей (О-С) просто исключаются из обработки независимо от причин, их породивших.

Существенной чертой в нашем методе исследования точности наблюдений является уже упоминавшееся положение о роли наблюдений (О) при анализе разностей (О-С), полученных за одну ночь. Вычисляя ошибку этих разностей по всей совокупности величин (О-С) для данной малой планеты в данную ночь (см. табл.1.3), мы можем пересчитать ее в среднюю ошибку одного наблюдения по каждой из сферических координат. Множество таких средних ошибок, которые вычислены по статистически достоверным данным (десять-двадцать разных нумерованных малых планет с числом положений более трех для каждой в одну ночь), можно еще раз осреднить и вычислить тем самым среднюю ошибку одного наблюдения, которая будет характеризовать качество работы данной обсерватории „в среднем“, т.е. показывать суммарное влияние на результаты наблюдений всей системы „Атмосфера + Телескоп + ПЗС-матрица + Метод обработки изображений + Точность измерений + Астрометрическая редукция“. Эта осредненная характеристика будет определять внутреннюю точность наблюдений (в табл. 1.2 она сопровождается символом **int**). К внутренней ошибке добавляется еще влияние звездного каталога, и мы рассматриваем совокупную среднюю ошибку как характеристику внешней точности (в табл.1.2 — **ext**). Наблюдателю важно знать качество своей работы каждую ночь, поэтому мы считаем целесообразным прове-

дение такой оценки точности непосредственно на обсерваториях на следующий день после наблюдений. Но для этого надо, во-первых, не пренебрегать наблюдениями нумерованных малых планет, которые практически всегда видны в поле зрения телескопов, выполняющих наблюдения малых тел по разнообразным программам, и, во-вторых, иметь необходимое математическое обеспечение. Мы используем программную систему ЭПОС, созданную в Пулковской обсерватории коллективом авторов под руководством В.Н.Львова [42].

Иллюстрацией нашего анализа точности ПЗС-наблюдений служат данные табл. 1.3. В ней представлены ПЗС-наблюдения нескольких нумерованных (NMP) малых планет в течение близких ночей или в одну ночь. Все наблюдения выполнены на одной из лучших стабильно работающих профессиональных обсерваторий — Table Mountain, USA, MPC code 673 — с типичным для наблюдений астероидов телескопом-рефлектором, имеющим шестидесятисантиметровое зеркало, фокусное расстояние около девяти метров и ПЗС-матрицу с хорошим масштабом — $0.3''$ на пиксел. Число пикселей 4096×4096 , поле зрения небольшое, всего $22' \times 22'$. Достойна внимания величина средней ошибки одного наблюдения — несколько сотых долей секунды дуги по каждой из координат. При фотографических наблюдениях эта ошибка достигает $1''$ и более. Хорошую сходимость показывают сами величины (O-C), особенно для нормальных мест малой планеты 20755 за три ночи наблюдений. Скорости изменения координат, которые вычисляются путем линейной аппроксимации этих координат, полученных в каждую ночь, и сравниваются со своими эфемеридными значениями, имеют небольшую относительную ошибку, кроме случая малости самого значения $\dot{\alpha}$ в наблюдениях за 13 октября 2004 года.

Вторым методом оценки точности ПЗС-наблюдений малых планет самим наблюдателем можно считать **аппроксимационный** [21]. Он более прост и доступен. Представление полученных рядов сферических координат наблюденного небесного тела полиномами по степеням времени может оказаться полезным для обнаружения ошибок наблюдений, особенно грубых. Его желательно выполнять перед отправкой результатов наблюдений в соответствующие центры сбора и обработки информации. Наш опыт работы с данными Международного центра малых планет позволяет утверждать, что далеко не всегда хранящиеся там положения астероидов свободны

от грубых ошибок наблюдений. Между тем простая линейная функция хорошо представляет полученные за ночь координаты объекта, если число наблюдений более двух. Если имеется несколько ночей наблюдений одного и того же небесного тела и число положений в каждую ночь — три и более, то можно использовать квадратичный полином. Коэффициенты этого полинома определяются по методу наименьших квадратов. Ошибки полученных коэффициентов будут характеризовать точность выполненных наблюдений в случайном отношении. При этом возникает еще одна возможность суждения о точности наблюдений — за счет анализа скоростей изменения $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$ и их ошибок. На первом этапе такого контроля, особенно если наблюдаемый объект далек от Земли, можно пренебречь поправками за параллакс, которые требуют знания расстояния до наблюдавшегося объекта.

Более сложным является еще один способ оценки точности наблюдений малых планет, если имеются квазисинхронные положения одного и того же небесного объекта с нескольких станций наблюдения [8]. Мы называем его „синхропосадка“. В этом случае полиномиальное представление координат, полученных на одной станции, используется для проверки наблюдений нескольких других станций. Это выполняется как и при обычных вычислениях (О-С), только в качестве (С) фигурируют вычисления с коэффициентами аппроксимирующих полиномов для каждой из станций, участвующих в сеансе одновременных наблюдений. Если разности (О-С), вычисленные на одной из станций при использовании коэффициентов полиномов других станций, всякий раз будут систематически отличаться от таковых, полученных на самой этой станции, то можно констатировать, что в наблюдениях последней имеется систематическая ошибка, которую необходимо найти и устранить. Следует помнить, что в этом способе оценки точности надо иметь ряды положений астероидов, приведенных к геоцентру. Необходимые для этого расстояния до наблюдаемого объекта можно найти по его эфемеридам, если объект каталогизирован, или из определения его предварительной орбиты.

Представленные внеорбитальные способы исследования случайных и систематических ошибок полезны и в случае наблюдений ИСЗ, высокоточные элементы орбит которых чаще всего наблюдателям неизвестны. Когда ПЗС-матрицы будут массово применяться при наблюдениях ИСЗ, подобный метод позволит сравнительно

легко прокалибровать новые приемники излучения для каждого телескопа.

Оперативный автоматический анализ точности позиционных наблюдений астероидов, содержащихся в базе данных Международного центра малых планет, который выполняется поквартально в Пулковской обсерватории с регулярным сообщением результатов наблюдателям, дает постоянные объективные характеристики наблюдательной работы обсерваторий [60]. Полученные осредненные оценки точности позволят ввести для каждой обсерватории веса наблюдений, которые надлежит учитывать в процедурах улучшения орбит. Эта научная проблема сейчас становится практически значимой, поскольку число позиционных наблюдений постоянно растет, число наблюдателей увеличивается, и без комплексного анализа точности работы каждого с введением соответствующих весовых коэффициентов скоро станет невозможным корректное проведение процедуры улучшения орбит.

1.4 Значение плотных равноточных рядов наблюдений на примере первых фотографических наблюдений ИСЗ

Начало эпохи освоения космического пространства было положено 4 октября 1957 г. запуском первого советского искусственного спутника Земли. Не следует думать, что научная общественность не была информирована о подготовке к возможным запускам ИСЗ. Было широко известно, что специальный научный комитет по проведению Третьего международного геофизического года еще в октябре 1954 г. изложил программу выведения на околоземную орбиту американских ИСЗ на 1957-1958 гг, а почти все доклады на VI Международном астронавтическом конгрессе (Копенгаген, август 1955) были связаны с проблемами запуска ИСЗ, организации его наблюдений и получения научной информации. На этом конгрессе советская делегация, возглавлявшаяся академиком Л.И.Седовым и впервые участвовавшая в таком форуме, заявила, как сообщала зарубежная печать, что „создание в СССР искусственного спутника Земли — дело ближайшего будущего“ и что „советский ИСЗ будет более совершенным, чем американский“. Как оказалось впослед-

ствии, Советский Союз действительно запустил свой спутник на пять месяцев раньше Соединенных Штатов Америки.

Большая подготовка к запуску первых ИСЗ была проведена в США, где разработали обстоятельную научную программу исследований с их помощью, создали сеть станций наблюдения этих новых астрономических объектов и оснастили эти станции специально сконструированными телескопами — фотографическими камерами Бейкер-Нанн, чтобы получать координаты спутника из обработки его положений на фоне звезд. Звезды использовались при фотографических и визуальных наблюдениях спутников в качестве реперов, имеющих точные сферические координаты, по отношению к которым определялись координаты ИСЗ. Станции таких наблюдений ИСЗ располагались по всему земному шару и вместе с пунктами радиотехнических наблюдений должны были передавать свои данные в вычислительный центр, в котором уточнялись теории движения ИСЗ и осуществлялся прогноз их движения для последующих наблюдений. Американские ученые летом 1957 г. приняли большую делегацию советских астрономов, посетивших несколько крупных астрономических центров, и ознакомили наших специалистов с организацией работ по предстоящим оптическим наблюдениям искусственных спутников Земли [12].

Несмотря на то, что о дате запуска нашего спутника не было сообщено заранее, американская система слежения быстро вошла в режим его наблюдений. Уже 8 октября 1957 г. визуальные наблюдения яркой ракеты носителя ИСЗ-1 были опубликованы в Циркуляре Международного Астрономического Союза N 1621, а еще через неделю там же, в N 1622, были приведены и элементы ее орбиты. Именно последнюю ступень ракеты-носителя первого ИСЗ — яркого объекта, быстро перемещавшегося по небу на фоне звезд — большинство землян принимало непосредственно за спутник, который на самом деле был недоступен оптическим наблюдениям без специальной аппаратуры, поскольку имел слабый видимый блеск.

В нашей стране для наблюдения ИСЗ к осени 1957 г. была срочно развернута сеть станций визуальных спутниковых наблюдений при каждой обсерватории, практически при каждом университете и педагогическом институте. Основным прибором являлась астрономическая трубка АТ-1, аналогичная американской разработке для визуальных наблюдений, а методика была основана на опыте наблюдений метеоров — быстро движущихся астрономических

объектов. Визуальные наблюдения имели относительно невысокую точность, но за счет их массовости можно было ожидать успеха в их использовании при определении орбиты ИСЗ.

Что касается высокоточных фотографических наблюдений спутников, то времени на создание специальной техники для этого мы не имели. И тогда в Пулковской обсерватории молодые астрономы Дмитрий Евгеньевич Щеголев, Борис Алексеевич Фираго, Лев Моисеевич Зациорский, Галина Валентиновна Панова, Лев Александрович Панайотов, Алексей Алексеевич Киселев и другие под руководством академика Александра Александровича Михайлова, директора обсерватории и Председателя Астрономического совета Академии наук СССР, „приспособили“ для фотографирования ИСЗ широкоугольную аэрофотосъемочную камеру НАФА-Зс, простую, доступную и надежную в работе, поскольку она давно и успешно использовалась на самолетах-бомбардировщиках для фиксации результатов бомбометания по назначенным наземным целям. Эта камера имела объектив диаметром 10 см, фокусное расстояние 25 см и поле зрения 30×50 градусов. Ее установили на азимутальную монтировку, имевшую возможность быстрого наведения на движущийся небесный объект, снабдили автоматическим затвором с фиксацией моментов его открытия-закрытия и получили инструмент, точность фотографических наблюдений на котором с последующей их обработкой предложенными в Пулково методами сразу же достигла точностей, получаемых на специально разработанных до запуска спутников американских фотографических камерах Бейкер-Нанн. Такие спутниковые установки, быстро изготовленные в массовом порядке на основе аэрофотоаппаратов НАФА-Зс и переданные в обсерватории и на станции слежения по всей территории Советского Союза, успешно решили задачу определения орбит ИСЗ и получения новых научных результатов относительно размеров земного эллипсоида, плотности верхней атмосферы и аномалий гравитационного поля Земли.

Таким образом, была с успехом и в короткое время решена задача получения точных положений искусственных спутников Земли для решения научных и практических задач. Позднее, в 1960-ые годы в СССР усилиями астрономов Латвийского университета были построены специальные спутниковые телескопы. Опыт, накопленный в Пулковской обсерватории во время проведения наблюдений

ИСЗ с помощью простой аэрофотосъемочной камеры, сыграл большую роль при их создании.

Первая в мире фотография с изображением траектории спутника на фоне звезд (вернее, следа его ракеты-носителя) была получена в Австралии, на острове Тасмания, в ночь с 6 на 7 октября 1957 г. на обычном телескопе. Этот снимок был опубликован в известном научном журнале „Nature“, том 180, N 4591. На нем среди обычных изображений звезд можно увидеть только протяженную непрерывную тонкую светлую полосу, идущую по диагонали кадра. Это был чисто иллюстративный снимок, научной информации он дать не мог.

В СССР первая астрономическая фотография с изображениями ракеты-носителя ИСЗ-1 была получена в Пулковской обсерватории Тамарой Петровной Киселевой 10 октября 1957 г. на телескопе-астрографе АКД. Этот фотоснимок был выполнен так, чтобы доставить максимально возможный объем научной информации. Для этого во время экспонирования путем быстрого открывания и закрывания затвора телескопа с фиксацией моментов времени след спутника прерывался и вместо длинной тонкой сплошной линии становился на фотографии штриховым. Каждому штриху соответствовал свой момент времени экспозиции. Измерение прямоугольных координат концов этих штрихов позволяло вычислить сферические координаты спутника для наблюдаемых моментов времени. При обработке этой фотографии была выполнена также фотометрия нескольких штрихов по траектории движения спутника и установлена переменность его блеска, что свидетельствовало о вращении наблюдавшегося объекта и потом получило название „кувыркание“ нестабилизированного спутника. Совершенно новым для астрономии стало вычисление топоцентрической угловой скорости движения спутника и ее направления на небесной сфере, т.е. получение параметров изменения положения спутника в близкие моменты времени для наблюдателя, находящегося на поверхности Земли. Все эти результаты были оперативно опубликованы в „Астрономическом циркуляре“ Академии наук, N 186 за 15 октября 1957 г.

В более поздних работах пулковских астрономов этот подход, характерный глубиной проникновения в сущность проблемы с целью извлечения всей имеющейся в наблюдениях информации, был использован для создания не только новых методов спутниковых

наблюдений и их обработки, но и для решения различных практических задач в области определения орбит небесных тел. В частности, подобный подход в 1980-е годы обеспечил — впервые в практике мировой астрономии — решение задачи об определении орбиты визуально-двойной звезды по данным ее плотных высокоточных фотографических наблюдений на короткой топоцентрической дуге с помощью пулковского 26-дюймового рефрактора [38]. Правда, малость видимого годичного движения двойной звезды не позволяет вычислить угловое ускорение, и в связи с этим астрометрические наблюдения должны быть дополнены наблюдениями разности лучевых скоростей компонент двойной и значениями их тригонометрических параллаксов.

Особенно актуальными пулковские идеи и разработки становятся сейчас, в эпоху электронно-оптических наблюдений небесных тел на телескопах, где в качестве приемников излучения используются ПЗС-матрицы. Эти приборы, как уже отмечалось, позволяют выводить на дисплей компьютера все то, что в данный момент „видит“ телескоп, а также выполнять точные измерения практически в реальном масштабе времени. Их применение в фотографической астрометрии повысило производительность труда астрономов-наблюдателей на два порядка, обеспечив, помимо скорости получения результатов наблюдений, их высокую плотность, т.е. дало возможность получать насыщенные ряды положений небесных тел на короткой топоцентрической дуге наблюдений. Такие ряды доставляют дополнительную информацию о параметрах видимого движения объекта по небесной сфере, а именно: угловой скорости и ускорении, позиционном угле и кривизне видимой траектории спутника, что позволяет определить его орбиту, используя разработанный в Пулкове метод параметров видимого движения, оперативно отождествить наблюдаемый объект с известными каталогизированными объектами, а также вычислить эфемериды для продолжения наблюдений. Перечисленные выше новые параметры тоже могут быть вычислены как эфемеридные по строгим формулам, в которых известные элементы орбиты спутника связаны с известным геоцентрическим положением наблюдателя. Можно констатировать, что в решении задач по контролю околоземного пространства оптическими средствами — будь то слежение за системами действующих или пассивных спутников, изучение распределения космического техногенного мусора или наблюдения за сближающимися с Землей

астероидами и кометами, способными стать потенциально опасными для нашей цивилизации — пулковский опыт первых наблюдений спутников Земли занял достойное место в ряду современных методов наблюдений небесных тел.

1.5 Возможность классификации небесных тел на основе параметров их видимого движения

В XX веке астрометрические данные вычислялись в основном путем обработки фотопластинок, где фиксировались изображения опорных звезд и исследуемого объекта. Фотографический метод был чрезвычайно трудоемок и не оперативен, поэтому наблюдатели редко набирали более двух последовательных положений одного и того же астероида за ночь, а если число положений было больше, то в процессе обработки получали так называемое нормальное место, т.е. среднее из нескольких положений наблюденного астероида. В течение нескольких дней или недель наблюдений появлялся разрозненный (вследствие погодных условий) ряд положений астероида. Ни о каких параметрах видимого движения (ПВД), кроме сферических координат, и речи не возникало. Даже в эпоху спутниковых наблюдений, выполнявшихся американскими камерами Бейкер-Нанн, наши коллеги в США не могли иметь плотных насыщенных рядов спутниковых координат в близкие моменты времени, поскольку камера (ее создавали задолго до запуска спутника) была конструктивно устроена так, что разрывы по времени между двумя соседними положениями спутника были очень велики. После окончания экспозиции требовалось перемотать пленку, выполнить передвижение камеры по траектории движения ИСЗ вперед, обогнать спутник, остановиться и подготовиться для начала новой экспозиции. Поэтому в исследованиях наших зарубежных коллег не могло появиться такого подхода, как в Пулковской обсерватории. У нас, как уже упоминалось, спутниковая фотографическая камера на базе аэрофотоаппарата имела поле зрения 30×50 градусов, фиксация времени открывания и закрывания её затвора позволяла „рвать“ след спутника на отдельные штрихи и определять сферические координаты их концов, так что „цепочка“ таких положений даже при угловой скорости 2° в секунду давала более десяти близ-

ких положений на снимке. Если же длительное время наблюдался спутник, имевший меньшую угловую скорость и двигавшийся на нисходящем для наблюдателя витке по направлению к горизонту, на фотографии зачастую можно было непосредственно увидеть кривизну видимой траектории (стрелку прогиба) и угловое ускорение — как изменение длины штриха от начала к концу зафиксированной траектории при одной и той же заданной величине экспозиции. Кстати, первая публикация каталога положений второго советского спутника, наблюдавшегося в Пулковской обсерватории, содержала не только традиционные координаты, но и величины угловых скоростей и позиционных углов спутника [44].

Еще одна возможность обнаружить дополнительную информацию в плотных рядах сферических координат спутников представилась во время проведения сеансов их синхронных наблюдений в целях космической геодезии. Здесь требовалось обеспечить синхронизацию наблюдений яркого спутника на сети станций, чтобы треугольники космической триангуляции были замкнутыми, и по результатам наблюдений со станций с известными геоцентрическими координатами и с определяемой станции вычислить координаты последней. Провести физическую синхронизацию открывания затворов спутниковых камер в то время, да и сейчас практически невозможно, а задача геодезической связи континентов была чрезвычайно интересной. В США для решения этой задачи был спроектирован специальный спутник ANNA с мощной лампой-вспышкой, которая давала серию световых импульсов в определенные моменты времени: их можно было наблюдать со всех станций синхронно. Но гораздо раньше в Пулковской обсерватории решили эту проблему методом так называемой **математической синхронизации**, суть которого была проста и остроумна. Станциям надлежало начинать наблюдения спутника в избранном интервале видимости, например, каждую четную минуту с десятой секунды и вести их 15 секунд. В результате получался ряд координат из 15 положений, которые аппроксимировались полиномом по степеням времени (редко выше второй), а коэффициенты этих полиномов определялись методом наименьших квадратов. Затем выбирался общий момент для всех станций внутри интервала, и для него с помощью того же полиномиального представления вычислялись координаты спутника на каждой станции на этот общий момент. Всё это и обеспечивало искомую синхронизацию. Это же полиномиальное представление

давало возможность вычислить в качестве „побочного продукта“ первые и вторые производные координат наблюдаемого спутника, а также угловую топоцентрическую скорость, её позиционный угол, угловое ускорение и кривизну видимой траектории, причем для вычисления двух последних параметров были необходимы высокоточные наблюдения на топоцентрической дуге в $10\text{--}20^\circ$. Таким образом, продолжительные ряды близких по времени положений спутника на короткой дуге могли доставлять дополнительную, новую информацию о его движении. Однако использование этой информации оставляло желать лучшего, в основном, вследствие больших затрат труда для получения рядов фотографических наблюдений с необходимой плотностью и точностью. К счастью, теперь положение постепенно меняется. ПЗС-астрометрия, несомненно, воспримет и будет использовать идеологию параметров видимого движения и дополнительную информацию о движении объекта, содержащуюся в его насыщенных наблюдениях на короткой дуге.

Из сказанного следует, что вместе с традиционными рядами положений небесных тел появляется возможность простым и надежным способом — путем линейной или квадратичной аппроксимации этих положений — вводить в рассмотрение параметры, характеризующие видимое движение наблюдаемого небесного тела, а именно: его угловую скорость и угловое ускорение, позиционный угол его движения и кривизну видимой траектории объекта. Иногда, как при фотографировании первых ИСЗ в Пулковке камерами с большими полями зрения, эти параметры становились визуально заметными, но чаще всего они вычислялись из обработки наблюдений. В теорию их ввел А.А.Киселев в 1971 году при выводе системы уравнений метода ПВД [34, 35]. Мы опишем это подробно в главе 3. В главе 6 параметры видимого движения получают свое выражение через элементы кеплеровой орбиты небесного тела и параметры, характеризующие положение наблюдателя.

Появление параметров видимого движения в качестве новых наблюдаемых и эфемеридных характеристик движения позволяет выявить некоторые особенности движения небесных тел, которые можно использовать для их классификации. Показательной в этом смысле является угловая скорость небесного тела. Если ее величина достаточно велика (градусы, минуты или секунды дуги за секунду), то мы имеем дело со спутником Земли или его фрагментом. Если значение угловой скорости — порядка градуса или менее за

сутки, то наблюдавшийся объект — обычный астероид Главного пояса, а если угловая скорость — несколько секунд в час, и к тому же блеск объекта слабее 22-й звездной величины, то это объект пояса Эджворта-Койпера. В последнем случае обращение к величине блеска имеет важное значение, так как и обычная малая планета при смене прямого движения на попятное и наоборот всегда имеет небольшую угловую скорость. Но при этом у нее быстро изменяется позиционный угол, и кривизна траектории весьма значительна.

Что касается ИСЗ, то и в этом случае угловые скорости и кривизна могут указывать, например, на нахождение объекта на геостационарной орбите, вблизи апогея или перигея, а также на то, идет ли спутник по низкой или высокоэллиптической орбите. Можно набрать систематический материал для анализа видимых движений разных небесных тел в разнообразных условиях их наблюдений. Очевидно, интерес к выработке конкретных рекомендаций при интерпретации получаемых ПВД для классификации наблюдавшихся неизвестных объектов в ближайшие годы будет только расти.

Глава 2

Геометрия кривых на сфере

Начнем с принятых в этой книге единых обозначений.

Пространства \mathbb{R} (числовая прямая), \mathbb{R}^n , \mathbb{S} (единичная двумерная сфера, вложенная в \mathbb{R}^3), \mathbb{T} (касательная к \mathbb{S} плоскость) обозначаются полными буквами. Векторы обозначаются жирными буквами, их декартовы координаты — теми же буквами обычного шрифта с индексами 1, 2, 3, их длины — теми же буквами обычного шрифта без индексов. Для единичных векторов используются заглавные буквы, для векторов произвольной длины — строчные. Матрицы обозначаются фигурными буквами. Производные по времени t отмечаются точками.

С древнейших времен астрономы проектируют светила на небесную (единичную по терминологии математиков) сферу. Используется центральная проекция. Пусть точка $A \in \mathbb{R}^3$ в фиксированной системе отсчета Ox_1, x_2, x_3 имеет координаты (x_1, x_2, x_3) . Можно считать A концом отложенного от начала радиус-вектора $\mathbf{r} = OA$ с теми же координатами. По традиции мы пишем $\mathbf{r}(x_1, x_2, x_3)$ вместо $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ или $\mathbf{r}(r_1, r_2, r_3)$. Центральная проекция сопоставляет точке A точку \tilde{A} единичной сферы \mathbb{S} с координатами $(x_1/r, x_2/r, x_3/r)$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, что равносильно сопоставлению вектору $\mathbf{r} = OA$ вектора $\mathbf{R} = O\tilde{A}$ с координатами $(x_1/r, x_2/r, x_3/r)$.

Поскольку в астрономических приложениях за O выбирается, как правило, центр избранного небесного тела (в этой книге — Солнца или Земли) или окулярный конец телескопа, а за A — исследуемое небесное тело (в этой книге — астероид, комета или ИСЗ), всегда можно считать $A \neq O$. Примем поэтому $A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$, $r > 0$.

Именно под влиянием астрономии была создана сферическая тригонометрия, а позднее — дифференциальная геометрия кривых на произвольных поверхностях. Сферическая тригонометрия вошла неотъемлемой частью в астрономические курсы. Парадоксально, но геометрия кривых на сфере в учебниках астрономии практически не рассматривается. Между тем общие формулы дифференциальной геометрии кривых на произвольной поверхности настолько существенно упрощаются в сферическом случае, что их стоит рассмотреть отдельно — как это имеет место для кривых на плоскости. Геометрия на сфере оказывается лишь немного сложнее геометрии на плоскости (а иногда и проще, например, для соприкасающейся окружности). Описанию дифференциальной геометрии на сфере и посвящена эта глава.

2.1 Элементарные формулы векторной алгебры

Напомним основные формулы векторной алгебры. Направленные вдоль осей x_1, x_2, x_3 орты обозначим через **I**, **J**, **K**. Скалярное, векторное, смешанное и двойное векторное произведение векторов подчиняются следующим правилам:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\mathbf{b} &= ab \cos \varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1), \\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| &= ab \sin \varphi, \\ (\mathbf{a} \mathbf{b} \mathbf{c}) &= \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \mathbf{b}(\mathbf{a}\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\mathbf{b}).\end{aligned}$$

Здесь φ — угол между векторами **a** и **b**; нижний индекс отвечает номеру координаты. Например, $\mathbf{a} = a_1\mathbf{I} + a_2\mathbf{J} + a_3\mathbf{K}$.

Смешанное произведение меняет знак при перемене мест любых двух векторов и инвариантно относительно циклических перестановок векторов.

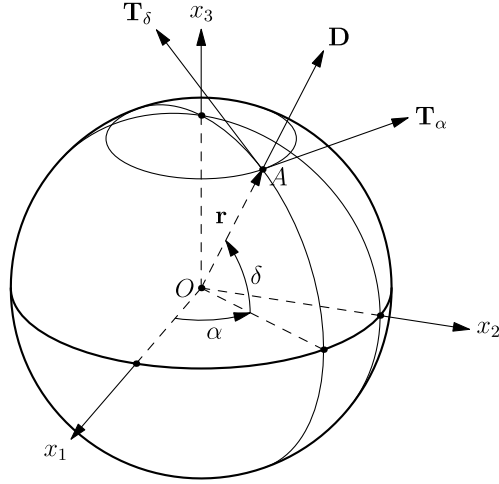


Рис. 2.1: Параметризация сферы. Орты \mathbf{T}_α , \mathbf{T}_δ , \mathbf{D} , направленные по касательным к координатным линиям и внешней нормали, соответственно, ортогональны и образуют правую тройку.

2.2 Параметризация сферы

Небесная (единичная) сфера \mathbb{S} есть поверхность в \mathbb{R}^3 с уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \quad (2.1)$$

Точку на сфере, как на любой двумерной поверхности, можно задать двумя криволинейными координатами. Как принято в астрономии, мы используем α (прямое восхождение, долгота) и δ (склонение, широта), рис. 2.1. Пара α, δ *упорядочена*. Именно, обозначим через \mathbf{T}_α орт касательной к параллели (в сторону возрастания α), через \mathbf{T}_δ — к меридиану (в сторону возрастания δ), через \mathbf{D} — орт внешней нормали к сфере. Тогда $\mathbf{D} = \mathbf{T}_\alpha \times \mathbf{T}_\delta$. Заметим, что при замене склонения δ на полярное расстояние $\delta' = \pi/2 - \delta$ следует брать упорядоченную пару δ', α , ибо $\mathbf{D} = \mathbf{T}_{\delta'} \times \mathbf{T}_\alpha$.

Параметрические уравнения сферы:

$$x_1 = \cos \delta \cos \alpha, \quad x_2 = \cos \delta \sin \alpha, \quad x_3 = \sin \delta. \quad (2.2)$$

Предпочтительнее записать их в векторной форме:

$$\mathbf{r} = (\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta). \quad (2.3)$$

На практике принято

$$0 \leq \alpha < 2\pi \quad (\text{или } -\pi < \alpha \leq \pi), \quad -\pi/2 \leq \delta \leq \pi/2. \quad (2.4)$$

Однако в теории всегда считается $-\infty < \alpha < \infty$, поскольку функции на сфере имеют период 2π по α . Более того, можно принять $-\infty < \alpha, \delta < \infty$, если отождествить точки (α, δ) и $(\alpha + \pi, \pi - \delta)$ и воспользоваться 2π -периодичностью по α, δ . Действительно, подстановка $(\alpha \mapsto \alpha + \pi, \delta \mapsto \pi - \delta)$ не меняет декартовых координат (2.2). Все же, если не оговорено противное, полагаем $|\delta| \leq \pi/2$ во избежание появления отрицательных $\cos \delta$.

Замечание. Парадоксально, но отождествление сферических координат $(\alpha, \delta) = (\alpha + \pi, \pi - \delta)$ редко *осознается* астрономами, хотя интуитивно его *чувствует* каждый наблюдатель. Оно материализуется в астрономии *перекладкой трубы* [40, глава 5].

В дифференциальной геометрии важную роль играют частные производные первого и второго порядка от радиуса-вектора по криволинейным координатам:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (-\cos \delta \sin \alpha, \cos \delta \cos \alpha, 0), \\ \mathbf{r}_2 &= (-\sin \delta \cos \alpha, -\sin \delta \sin \alpha, \cos \delta), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{11} &= (-\cos \delta \cos \alpha, -\cos \delta \sin \alpha, 0), \\ \mathbf{r}_{12} &= (\sin \delta \sin \alpha, -\sin \delta \cos \alpha, 0), \\ \mathbf{r}_{22} &= (-\cos \delta \cos \alpha, -\cos \delta \sin \alpha, -\sin \delta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

В этой главе нижние индексы 1 и 2 у вектора \mathbf{r} означают дифференцирование по α и δ , соответственно.

Вектор \mathbf{r}_2 совпадает с \mathbf{T}_δ . Вектор \mathbf{r}_1 совпадает с \mathbf{T}_α по направлению, но имеет меньшую длину:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{T}_\delta, \quad \mathbf{r}_1 = \cos \delta \mathbf{T}_\alpha, \quad |\mathbf{r}_1| = \cos \delta. \quad (2.7)$$

Более того, он обращается в нуль на полюсах $\delta = \pm\pi/2$. Поэтому, хотя сфера — аналитическая замкнутая поверхность без особенностей (и все ее точки равноправны), параметризация (2.2) сингулярна в двух точках: северном и южном полюсе. Можно построить

параметризацию с единственной особой точкой, но параметризации сферы без особенностей не существует [43, задача 5 к § 14 части 1].

Сингулярность параметризации в полюсах не влияет на результаты, получаемые аналитически. Поскольку реальных особенностей на сфере нет, появление $\cos \delta$ в знаменателе должно компенсироваться появлением $\cos \delta$ в числителе. Однако при численном исследовании придется делить друг на друга малые величины, и малые погрешности исходных данных могут привести к неприемлемой потере точности и даже остановке программы из-за деления на машинный ноль. Поэтому при анализе движения светил в окрестности полюсов надо быть осторожным — вплоть до перемены основной плоскости xy .

2.3 Первая и вторая квадратичные формы. Символы Кристофеля

Здесь и далее мы будем пользоваться понятиями и формулами дифференциальной геометрии кривых на заданной поверхности, излагаемыми подробно в многочисленных учебниках и монографиях — см., например, [43, 45, 46]. Основная наша задача — получить выражения соответствующих величин для частного случая сферы \mathbb{S} , когда формулы существенно упрощаются.

Первая квадратичная форма на поверхности представляет собой квадрат линейного элемента ds :

$$ds^2 = g_{11}d\alpha^2 + 2g_{12}d\alpha d\delta + g_{22}d\delta^2,$$

где g_{ik} — компоненты (ковариантные) симметрического положительно определенного метрического тензора:

$$g_{11} = \mathbf{r}_1^2, \quad g_{12} = g_{21} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2, \quad g_{22} = \mathbf{r}_2^2.$$

Пользуясь (2.5), найдем

$$g_{11} = \cos^2 \delta, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1, \quad \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \cos \delta, \quad (2.8)$$

так что

$$ds^2 = \cos^2 \delta d\alpha^2 + d\delta^2. \quad (2.9)$$

Обращение g_{12} в ноль свидетельствует об ортогональности координат α, δ .

Контравариантные компоненты g^{ik} метрического тензора совпадают с элементами обратной к g_{ik} матрицы:

$$g^{11} = \frac{1}{\cos^2 \delta}, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = 1. \quad (2.10)$$

Нормаль к поверхности определяется ортом

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}.$$

Для сферы

$$\mathbf{D} = (\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta), \quad (2.11)$$

т.е. $\mathbf{D} = \mathbf{r}$. Мы получили хорошо известное свойство сферы: радиус-вектор нормален к ее поверхности.

Вторая квадратичная форма описывает уклонение кривой на поверхности от касательной плоскости. Коэффициенты формы суть

$$G_{11} = \mathbf{r}_{11}\mathbf{D}, \quad G_{12} = G_{21} = \mathbf{r}_{12}\mathbf{D}, \quad G_{22} = \mathbf{r}_{22}\mathbf{D}.$$

Пользуясь (2.6, 2.11), найдем

$$G_{11} = -\cos^2 \delta, \quad G_{12} = 0, \quad G_{22} = -1. \quad (2.12)$$

Вторая форма оказалась совпадающей с первой с точностью до знака! В частности, гауссова кривизна

$$K_{Gauss} = \frac{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

оказалась тождественно равной единице:

$$K_{Gauss} = 1, \quad (2.13)$$

что, конечно, можно получить без всяких вычислений: кривизна каждого нормального сечения сферы (большого круга) равна 1.

Символы Кристофеля первого рода $\Gamma_{s,ik}$, симметричные по второй паре индексов $\Gamma_{s,ik} = \Gamma_{s,ki}$, определяются формулами

$$\Gamma_{s,ik} = \mathbf{r}_s \mathbf{r}_{ik}.$$

Пользуясь (2.5, 2.6), найдем

$$-\Gamma_{1,12} = \Gamma_{2,11} = \cos \delta \sin \delta, \quad \Gamma_{1,11} = \Gamma_{1,22} = \Gamma_{2,12} = \Gamma_{2,22} = 0. \quad (2.14)$$

Символы Кристоффеля второго рода Γ_{ik}^s симметричны по нижним индексам $\Gamma_{ik}^s = \Gamma_{ki}^s$ и определяются формулами

$$\Gamma_{ik}^s = g^{sm} \Gamma_{m,ik}, \quad (2.15)$$

где подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу m . Таким образом,

$$\Gamma_{12}^1 = -\operatorname{tg} \delta, \quad \Gamma_{11}^2 = \cos \delta \sin \delta, \quad \Gamma_{11}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0. \quad (2.16)$$

Естественно, формуле (2.15) отвечает двойственная формула:

$$\Gamma_{s,ik} = g_{sm} \Gamma_{ik}^m. \quad (2.17)$$

2.4 Кривые на сфере. Естественный трехгранник

В геометрии, как и в астрономии, используется множество различных систем декартовых координат. Будем обозначать их четырьмя символами: началом отсчета и тремя ортами координатных осей. Исходная система $\mathcal{O}_1(O) = O\mathbf{I}\mathbf{J}\mathbf{K}$. Фиксируем точку $A(\alpha, \delta) \in \mathbb{S}$. Положение близких точек можно определить не только в исходной системе $\mathcal{O}_1(O)$, но и в системе $\mathcal{O}_2(A) = A\mathbf{T}_\alpha\mathbf{T}_\delta\mathbf{D}$. Полезно ввести систему $\mathcal{O}_2(O) = O\mathbf{T}_\alpha\mathbf{T}_\delta\mathbf{D}$. Она получается из $\mathcal{O}_1(O)$ поворотом осей, а $\mathcal{O}_2(A)$ из $\mathcal{O}_2(O)$ — переносом начала из O в A .

Выведем формулы перехода. Систему $\mathcal{O}_2(O)$ можно получить из $\mathcal{O}_1(O)$ поворотом на угол $\pi/2 + \alpha$ вокруг оси x_3 , а затем поворотом на угол $\pi/2 - \delta$ вокруг новой оси x_1 , см. рис. 2.1. Любой вектор $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ преобразуется согласно формулам матричной алгебры:

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathcal{A}_3(\pi/2 + \alpha) \mathcal{A}_1(\pi/2 - \delta) \mathbf{r}^{(2)}.$$

Здесь $\mathbf{r}^{(s)}$ — вектор \mathbf{r} , координаты которого отнесены к системе $\mathcal{O}_s(O)$, \mathcal{A}_k — матрица поворота вокруг координатной оси x_k . Как известно,

$$\mathcal{A}_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы, получим

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathcal{B}_{12}(\alpha, \delta) \mathbf{r}^{(2)}, \quad (2.18)$$

где

$$\mathcal{B}_{12} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\sin \delta \cos \alpha & \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha & \cos \delta \sin \alpha \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \end{pmatrix}.$$

Три столбца матрицы \mathcal{B}_{12} состоят из координат ортов $\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\delta, \mathbf{D}$ системы \mathcal{O}_3 в системе \mathcal{O}_1 , как и должно быть по общей теории. Так что перемножение матриц служило лишь для контроля.

Рассмотрим теперь кривую $\Phi \in \mathbb{S}$. Примем некоторую ее точку $A(\alpha, \delta) \in \Phi$ за начальную. Обозначим через $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$ производные по времени в точке A , через $\mu \mathbf{T}$ — вектор скорости в точке A , причем $\mu \geq 0$, $|\mathbf{T}| = 1$. Таким образом, \mathbf{T} определяет направление, а μ — величину скорости. Поскольку производная единичного вектора ему ортогональна, вектор \mathbf{T} лежит в касательной плоскости, т.е. в плоскости векторов $\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\delta$. Поэтому \mathbf{T} можно представить в виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_\alpha \sin \psi + \mathbf{T}_\delta \cos \psi, \quad (2.19)$$

см. рис. 2.2.

Угол ψ в астрономии называют позиционным углом. Он равен углу, на который надо повернуть \mathbf{T}_δ до совмещения с \mathbf{T} по часовой стрелке, если смотреть с конца вектора \mathbf{D} , как привыкли смотреть математики. Астрономы же смотрят не извне, а изнутри небесной сферы. Поэтому с точки зрения находящегося в центре сферы наблюдателя угол ψ возрастает против часовой стрелки. Заметим, что в учебниках астрометрии встречается определение ψ , совпадающее с только что указанным с точностью до замены направления счета ψ на противоположное. На практике принято $0 \leq \psi < 2\pi$ или $-\pi < \psi \leq \pi$; в теории предпочтительнее $-\infty < \psi < \infty$.

Скорость движения точки A мы определили двояко: через $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$ и через μ, ψ (аналогия с декартовыми и полярными координатами). Связь между ними почти очевидна. По определению $\dot{\mathbf{r}} = \mu \mathbf{T}$, или с учетом (2.19)

$$\mathbf{r}_1 \dot{\alpha} + \mathbf{r}_2 \dot{\delta} = \mu \mathbf{T}_\alpha \sin \psi + \mu \mathbf{T}_\delta \cos \psi.$$

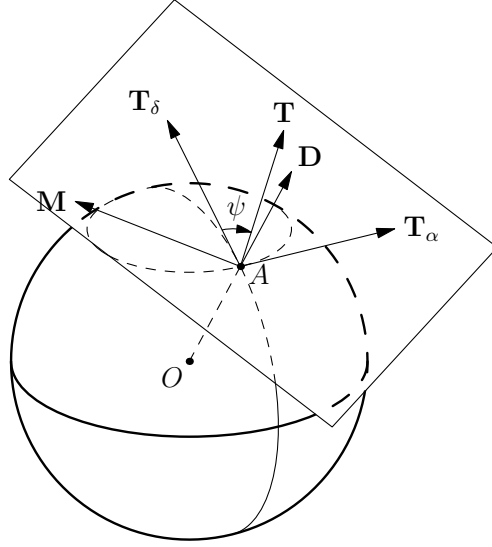


Рис. 2.2: Касательная плоскость и лежащие в ней орты \mathbf{T}_α , \mathbf{T}_δ , \mathbf{T} , \mathbf{M} , а также нормальный к ним орт \mathbf{D} ; ψ — позиционный угол.

Поскольку $\mathbf{r}_1 = \mathbf{T}_\alpha \cos \delta$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{T}_\delta$, получаем

$$\mu \sin \psi = \dot{\alpha} \cos \delta, \quad \mu \cos \psi = \dot{\delta}. \quad (2.20)$$

Обращение формул (2.20) элементарно:

$$\mu = \sqrt{\dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta + \dot{\delta}^2}, \quad \cos \psi = \frac{\dot{\delta}}{\mu}, \quad \sin \psi = \frac{\dot{\alpha} \cos \delta}{\mu}. \quad (2.21)$$

Первая из формул (2.21) сразу следует из выражения (2.9) для первой квадратичной формы.

Повернем теперь оси координат вокруг вектора \mathbf{D} на угол $\pi/2 - \psi$. Получим системы $\mathcal{O}_3(A) = ATMD$ и $\mathcal{O}_3(O) = OTMD$, где $\mathbf{M} = \mathbf{D} \times \mathbf{T}$. Очевидно, $\mathbf{r}^{(2)} = \mathcal{A}_3(\pi/2 - \psi)\mathbf{r}^{(3)}$, или с учетом (2.18)

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathcal{B}_{13}(\alpha, \delta, \psi)\mathbf{r}^{(3)}, \quad (2.22)$$

где $\mathcal{B}_{13} = \mathcal{B}_{12}\mathcal{A}_3(\pi/2 - \psi)$. Перемножая матрицы, получим

$$\mathcal{B}_{13} = (\mathbf{T}, \mathbf{M}, \mathbf{D}). \quad (2.23)$$

Мы представили матрицу \mathcal{B}_{13} как совокупность трех вектор-столбцов $\mathbf{T}, \mathbf{M}, \mathbf{D}$ в системе \mathcal{O}_1 (для векторов начало координат системы безразлично, важны лишь направления осей и их порядок). Очевидно,

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \begin{pmatrix} -\sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \sin \delta \cos \alpha \\ \sin \psi \cos \alpha - \cos \psi \sin \delta \sin \alpha \\ \cos \psi \cos \delta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \cos \psi \sin \alpha - \sin \psi \sin \delta \cos \alpha \\ -\cos \psi \cos \alpha - \sin \psi \sin \delta \sin \alpha \\ \sin \psi \cos \delta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Переходя от $\sin \psi, \cos \psi$ к $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$ согласно (2.21), представим матрицу \mathcal{B}_{13} в том же виде (2.23) при

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \begin{pmatrix} -(\dot{\alpha} \cos \delta \sin \alpha + \dot{\delta} \sin \delta \cos \alpha)/\mu \\ (\dot{\alpha} \cos \delta \cos \alpha - \dot{\delta} \sin \delta \sin \alpha)/\mu \\ \dot{\delta} \cos \delta / \mu \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} (-\dot{\alpha} \cos \delta \sin \delta \cos \alpha + \dot{\delta} \sin \alpha)/\mu \\ (-\dot{\alpha} \cos \delta \sin \delta \sin \alpha - \dot{\delta} \cos \alpha)/\mu \\ \dot{\alpha} \cos^2 \delta / \mu \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Мы получили формулы первого порядка, аппроксимирующие движение A равномерным движением по прямой в касательной плоскости или, что то же, равномерным движением по большому кругу на сфере. Перейдем к формулам второго порядка, учитывающим вторые производные от α, δ по времени, или, что то же, ускорение A , порождающее искривление траектории Φ . Теперь аппроксимирующая кривая — соприкасающийся малый круг, и движение по нему в общем случае неравномерно.

Введем единичный вектор главной нормали \mathbf{N} к траектории Φ . Поскольку векторы $\mathbf{D}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$ для любой поверхности (не только сферы \mathbb{S}) ортогональны \mathbf{T} , они лежат в одной плоскости, так что можно записать

$$\mathbf{N} = \pm \mathbf{M} \sin \beta - \mathbf{D} \cos \beta, \quad (2.24)$$

где β — угол между векторами \mathbf{N} и $-\mathbf{D}$. Последний минус вызван желанием взять за β острый угол. Действительно, из выпуклости сферы следует, что \mathbf{N} направлен внутрь сферы и угол между \mathbf{N} и \mathbf{D} — тупой. Знак плюс перед \mathbf{M} берется, если угол между \mathbf{N} и \mathbf{M} — острый. В этом случае касательная к Φ (вектор \mathbf{T}) вращается против часовой стрелки, т.е. влево по курсу, если смотреть с конца вектора \mathbf{D} (и по часовой стрелке, вправо по курсу для наблюдателя в центре сферы). Знак минус берется, если угол между \mathbf{N} и \mathbf{M} — тупой. Направление вращения касательной противоположно описанному для предыдущего случая, см. рис. 2.3 и 2.4. Если угол между \mathbf{N} и \mathbf{M} — прямой, то $\mathbf{N} = -\mathbf{D}$, $\beta = 0$, малый круг превращается в большой и знак перед \mathbf{M} безразличен. Ситуация на сфере даже проще, чем на плоскости: там соприкасающаяся окружность минимальной кривизны есть прямая, или окружность бесконечного радиуса.

Угол β однозначно связан с кривизной c кривой Φ , рассматриваемой как кривая в \mathbf{R}^3 . Действительно, по теореме Менье $c \cos \beta$ с точностью до знака равно отношению квадратичных форм:

$$c \cos \beta = -\frac{G_{11}d\alpha^2 + 2G_{12}d\alpha d\delta + G_{22}d\delta^2}{g_{11}d\alpha^2 + 2g_{12}d\alpha d\delta + g_{22}d\delta^2}.$$

В общем случае это отношение зависит от $d\alpha/d\delta$, т.е. от направления вектора \mathbf{T} . Сфера изотропна, и для нее правая часть постоянна и равна единице в силу (2.8, 2.12):

$$c \cos \beta = 1. \quad (2.25)$$

Это соотношение легко получить непосредственно, пользуясь рисунком 2.3. Соприкасающаяся с Φ плоскость проходит через векторы \mathbf{T} и \mathbf{N} . Она пересекается с \mathbb{S} по малому кругу, который служит соприкасающейся окружностью для Φ . Обозначим центр малого круга через B_0 . В треугольнике OAB_0 , очевидно, $AB_0 = \cos \beta$. Но AB_0 есть радиус кривизны Φ и равен $1/c$, что равносильно (2.25).

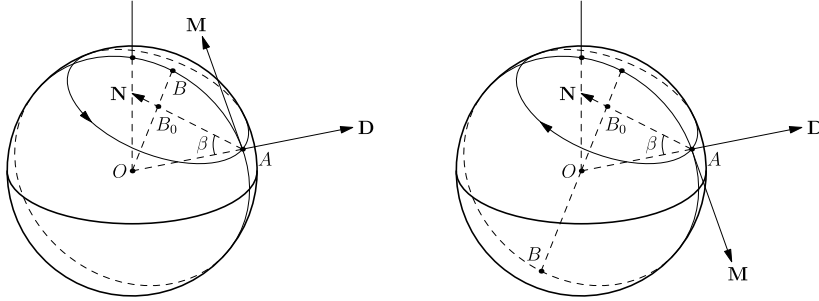


Рис. 2.3: Вектор главной нормали \mathbf{N} , лежащий в плоскости векторов \mathbf{M} , \mathbf{D} и образующий угол $\pi - \beta$ с вектором \mathbf{D} . Вектор \mathbf{T} (не нарисован) перпендикулярен к векторам \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{N} и направлен от нас (слева) и к нам (справа). Точка B_0 — центр кривизны, совпадающий с центром соприкасающегося малого круга, направление движения по которому отмечено стрелкой. Точка B — полюс малого круга, с которого движение видно против часовой стрелки. Вектор OB направлен по бинормали.

Из (2.25) следует

$$\cos \beta = \frac{1}{c}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c}.$$

Осталось ввести последний вектор естественного триэдра, вектор бинормали $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$. В силу (2.24)

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} \cos \beta \pm \mathbf{D} \sin \beta \quad (2.26)$$

с прежним правилом знаков. Конец вектора \mathbf{B} отмечает на сфере \mathbb{S} полюс соприкасающегося малого круга. Внимательное рассмотрение правила знаков показывает, что \mathbf{B} отмечает тот из двух полюсов, с которого движение по малому кругу происходит против часовой стрелки. Если угол между \mathbf{M} и \mathbf{N} острый, то \mathbf{B} отмечает ближайший к малому кругу полюс, а если тупой — то более удаленный. Если плавно изменять кривую Φ так, чтобы вектор \mathbf{T} не менялся, а \mathbf{N} поворачивался от \mathbf{M} до $-\mathbf{M}$, то вектор \mathbf{B} изменится непрерывно, в том числе при прохождении вектора \mathbf{N} через положение, в котором он совпадает с $(-\mathbf{D})$.

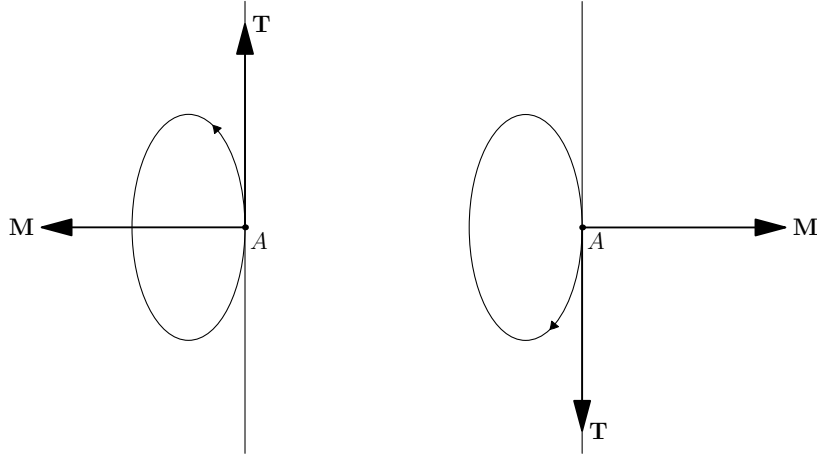


Рис. 2.4: Векторы \mathbf{T} , \mathbf{M} , проекция касательного большого круга (прямая) и соприкасающегося малого круга (эллипс) на касательную плоскость; вид с конца вектора \mathbf{D} . Слева — при остром угле между \mathbf{N} и \mathbf{M} (касательная вращается влево по курсу), справа — при тупом (касательная вращается вправо по курсу).

Формула (2.24) становится гораздо удобнее, если вместо кривизны c ввести геодезическую кривизну \varkappa . Поскольку Φ расположена на искривленной строго выпуклой поверхности, любая кривая *вынужденно* искривляется, чтобы остаться на поверхности. Геодезическая кривизна отвечает за дополнительное искривление и равна нулю для кривой минимальной кривизны. Существуют два равносильных определения \varkappa .

1. Геодезическая кривизна есть коэффициент при \mathbf{M} в разложении вектора кривизны $c\mathbf{N}$ по векторам \mathbf{M} и \mathbf{D} :

$$c\mathbf{N} = \varkappa\mathbf{M} - (c \cos \beta)\mathbf{D},$$

так что в случае сферы согласно (2.25)

$$c\mathbf{N} = \varkappa\mathbf{M} - \mathbf{D}. \quad (2.27)$$

Отсюда получаем

$$c^2 = 1 + \varkappa^2, \quad (2.28)$$

так что вынужденная кривизна любой кривой на сфере равна единице (кривизна большого круга). Геодезическая же кривизна может быть любой:

$$-\infty \leq \kappa \leq \infty. \quad (2.29)$$

Слагаемое $\kappa \mathbf{M}$ называется вектором геодезической кривизны.

Сравнение (2.24) и (2.27) показывает, что

$$\kappa = \pm c \sin \beta \quad (2.30)$$

с вышеописанным правилом знаков.

Формулам (2.24, 2.26) можно придать вид

$$\mathbf{N} = \frac{\kappa}{c} \mathbf{M} - \frac{1}{c} \mathbf{D}, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \mathbf{M} + \frac{\kappa}{c} \mathbf{D}. \quad (2.32)$$

2. Геодезическая кривизна равна кривизне плоской кривой — проекции Φ на касательную плоскость.

Формулы (2.25, 2.28, 2.30) позволяют для кривой на сфере выразить c, β, κ через одну из этих величин:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{1 + \kappa^2} = \frac{1}{\cos \beta}, & \kappa &= \pm \sqrt{c^2 - 1} = \pm \operatorname{tg} \beta, \\ \cos \beta &= \frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa^2}}, & \sin \beta &= \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c} = \frac{|\kappa|}{\sqrt{1 + \kappa^2}}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \sqrt{c^2 - 1} = |\kappa|. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Выразим геодезическую кривизну через производные от α, δ первого и второго порядков. В общем случае она определяется, кроме указанных производных, коэффициентами первой квадратичной формы и символами Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \frac{\mu^3 \kappa}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} &= \dot{\alpha}\ddot{\delta} - \ddot{\alpha}\dot{\delta} + \Gamma_{11}^2 \dot{\alpha}^3 + \\ &+ (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \dot{\alpha}^2 \dot{\delta} + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \dot{\alpha} \dot{\delta}^2 - \Gamma_{22}^1 \dot{\delta}^3. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения (2.8, 2.16), найдем для сферы

$$\mu^3 \kappa = (\dot{\alpha}\ddot{\delta} - \ddot{\alpha}\dot{\delta}) \cos \delta + \cos^2 \delta \sin \delta \dot{\alpha}^3 + 2 \sin \delta \dot{\alpha} \dot{\delta}^2. \quad (2.34)$$

2.5 Производные от ортов естественного трехгранника

Для кривой в \mathbb{R}^3 естественным триэдром называют тройку векторов касательной \mathbf{T} , главной нормали \mathbf{N} и бинормали \mathbf{B} . Производные по времени от этих векторов даются формулами Френе:

$$\dot{\mathbf{T}} = c\mu\mathbf{N}, \quad \dot{\mathbf{N}} = -c\mu\mathbf{T} + \tilde{c}\mu\mathbf{B}, \quad \dot{\mathbf{B}} = -\tilde{c}\mu\mathbf{N}, \quad (2.35)$$

где \tilde{c} — кручение кривой Φ .

Для кривой на поверхности за естественный триэдр лучше взять тройку векторов касательной \mathbf{T} , лежащей в касательной плоскости нормали к касательной $\mathbf{M} = \mathbf{D} \times \mathbf{T}$ и нормали к поверхности \mathbf{D} .

Выразим производные от $\mathbf{T}, \mathbf{M}, \mathbf{D}$ через сами векторы. Для сферы \mathbf{D} совпадает с радиусом-вектором, поэтому по определению $\dot{\mathbf{D}} = \mu\mathbf{T}$. В общем случае по первой из формул Френе (2.35) $\dot{\mathbf{T}} = c\mu\mathbf{N}$. С учетом (2.31) получим для сферы $\dot{\mathbf{T}} = \varkappa\mu\mathbf{M} - \mu\mathbf{D}$. Далее, $\mathbf{M} = \mathbf{D} \times \mathbf{T}$, так что

$$\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{D}} \times \mathbf{T} + \mathbf{D} \times \dot{\mathbf{T}} = \mu\mathbf{T} \times \mathbf{T} + \mathbf{D} \times (\varkappa\mu\mathbf{M} - \mu\mathbf{D}) = \varkappa\mu\mathbf{D} \times \mathbf{M} = -\varkappa\mu\mathbf{T}.$$

Соберем полученные формулы для кривых на сфере:

$$\dot{\mathbf{T}} = \varkappa\mu\mathbf{M} - \mu\mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{M}} = -\varkappa\mu\mathbf{T}, \quad \dot{\mathbf{D}} = \mu\mathbf{T}. \quad (2.36)$$

Отсюда легко получить формулу для второй производной \mathbf{D} :

$$\ddot{\mathbf{D}} = \dot{\mu}\mathbf{T} + \varkappa\mu^2\mathbf{M} - \mu^2\mathbf{D}. \quad (2.37)$$

Обратим внимание, что векторы $\mathbf{T}, \mathbf{M}, \mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}$ определяются положением и скоростью точки A ; векторы $\dot{\mathbf{T}}, \dot{\mathbf{M}}, \ddot{\mathbf{D}}$ — положением, скоростью и ускорением точки A ; векторы $\ddot{\mathbf{T}}, \ddot{\mathbf{M}}$ зависят еще и от третьих производных и потому не приводятся.

Из (2.36, 2.37) получаем красивые формулы для векторного и смешанного произведения:

$$\dot{\mathbf{D}} \times \ddot{\mathbf{D}} = \mu^3(\mathbf{M} + \varkappa\mathbf{D}), \quad (\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{D}}) = \varkappa\mu^3. \quad (2.38)$$

Заметим, что правая часть (2.37) зависит от $\mu, \dot{\mu}, \varkappa$, а правые части (2.38) — лишь от μ, \varkappa . Из (2.38) следует

$$|\dot{\mathbf{D}} \times \ddot{\mathbf{D}}| = c\mu^3. \quad (2.39)$$

Равенства (2.21, 2.34) определяют μ, ψ, \varkappa через $\dot{\alpha}, \dot{\delta}, \ddot{\alpha}, \ddot{\delta}$. Приведем еще формулу для $\dot{\mu}$:

$$\mu \dot{\mu} = \cos^2 \delta \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + \dot{\delta} \ddot{\delta} - \cos \delta \sin \delta \dot{\alpha}^2 \dot{\delta}. \quad (2.40)$$

Соотношения (2.20) представляют $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$ как функции от μ, ψ :

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{\cos \delta} \mu \sin \psi, \quad \dot{\delta} = \mu \cos \psi. \quad (2.41)$$

Чтобы выразить $\ddot{\alpha}, \ddot{\delta}$ через $\mu, \psi, \dot{\mu}, \varkappa$ преобразуем (2.34, 2.40) к виду системы двух линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \sin \psi \cos \delta \ddot{\alpha} + \cos \psi \ddot{\delta} &= \dot{\mu} + \mu^2 \sin^2 \psi \cos \psi \operatorname{tg} \delta, \\ -\cos \psi \cos \delta \ddot{\alpha} + \sin \psi \ddot{\delta} &= \mu^2 [\varkappa - \sin \psi (1 + \cos^2 \psi) \operatorname{tg} \delta]. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Определитель системы равен $\cos \delta$. Окончательно,

$$\begin{aligned} \cos^2 \delta \ddot{\alpha} &= \dot{\mu} \sin \psi \cos \delta + \mu^2 \cos \psi (2 \sin \psi \sin \delta - \varkappa \cos \delta), \\ \cos \delta \ddot{\delta} &= \dot{\mu} \cos \psi \cos \delta + \mu^2 \sin \psi (-\sin \psi \sin \delta + \varkappa \cos \delta). \end{aligned} \quad (2.43)$$

2.6 Сводка формул дифференциальной геометрии сферы, используемых при определении орбит небесных тел

В этом параграфе соберем вместе полезные формулы, выведенные выше и полученные ниже как решения задач к главе 2.

1. Координаты вектор-столбцов $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{M}$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{T} &= \begin{pmatrix} -\sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \sin \delta \cos \alpha \\ \sin \psi \cos \alpha - \cos \psi \sin \delta \sin \alpha \\ \cos \psi \cos \delta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \cos \psi \sin \alpha - \sin \psi \sin \delta \cos \alpha \\ -\cos \psi \cos \alpha - \sin \psi \sin \delta \sin \alpha \\ \sin \psi \cos \delta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

2. Тожждества

$$\begin{aligned}\mathbf{D}\mathbf{D} &= D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = 1, \\ \mathbf{D}\dot{\mathbf{D}} &= D_1\dot{D}_1 + D_2\dot{D}_2 + D_3\dot{D}_3 = 0, \\ \dot{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{D}\ddot{\mathbf{D}} &= \dot{D}_1^2 + \dot{D}_2^2 + \dot{D}_3^2 + D_1\ddot{D}_1 + D_2\ddot{D}_2 + D_3\ddot{D}_3 = 0.\end{aligned}\quad (2.45)$$

3. Разложение $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_{ik}$ по ортам $\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\delta, \mathbf{D}$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \cos \delta \mathbf{T}_\alpha, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{T}_\delta; \\ \mathbf{r}_{11} &= \cos \delta \sin \delta \mathbf{T}_\delta - \cos^2 \delta \mathbf{D}, \quad r_{12} = -\sin \delta \mathbf{T}_\alpha, \quad r_{22} = -\mathbf{D}.\end{aligned}\quad (2.46)$$

4. Разложение $\dot{\mathbf{T}}_\alpha, \dot{\mathbf{T}}_\delta, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}$ по ортам $\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\delta, \mathbf{D}$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{T}}_\alpha &= \dot{\alpha} \sin \delta \mathbf{T}_\delta - \dot{\alpha} \cos \delta \mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{T}}_\delta = -\dot{\alpha} \sin \delta \mathbf{T}_\alpha - \dot{\delta} \mathbf{D}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= \dot{\alpha} \cos \delta \mathbf{T}_\alpha + \dot{\delta} \mathbf{T}_\delta, \\ \ddot{\mathbf{D}} &= (\ddot{\alpha} \cos \delta - 2\dot{\alpha}\dot{\delta} \sin \delta) \mathbf{T}_\alpha + (\dot{\alpha}^2 \cos \delta \sin \delta + \ddot{\delta}) \mathbf{T}_\delta - (\dot{\alpha}^2 \cos^2 \delta + \dot{\delta}^2) \mathbf{D}.\end{aligned}\quad (2.47)$$

5. Разложение векторов \mathbf{T}, \mathbf{M} по ортам $\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{T}_\delta$ и обратно

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \sin \psi \mathbf{T}_\alpha + \cos \psi \mathbf{T}_\delta, \quad \mathbf{T}_\alpha = \sin \psi \mathbf{T} - \cos \psi \mathbf{M}, \\ \mathbf{M} &= -\cos \psi \mathbf{T}_\alpha + \sin \psi \mathbf{T}_\delta, \quad \mathbf{T}_\delta = \cos \psi \mathbf{T} + \sin \psi \mathbf{M}.\end{aligned}\quad (2.48)$$

6. Разложение $\dot{\mathbf{T}}, \dot{\mathbf{M}}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}$ по ортам естественного трехгранника

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{T}} &= \varkappa \mu \mathbf{M} - \mu \mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{M}} = -\varkappa \mu \mathbf{T}, \\ \dot{\mathbf{D}} &= \mu \mathbf{T}, \quad \ddot{\mathbf{D}} = \dot{\mu} \mathbf{T} + \varkappa \mu^2 \mathbf{M} - \mu^2 \mathbf{D}.\end{aligned}\quad (2.49)$$

7. Выражение векторов $\dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}$ через α, δ и их производные

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{D}} &= \dot{\alpha}(-\cos \delta \sin \alpha, \cos \delta \cos \alpha, 0) + \dot{\delta}(-\sin \delta \cos \alpha, -\sin \delta \sin \alpha, \cos \delta), \\ \ddot{\mathbf{D}} &= \ddot{\alpha}(-\cos \delta \sin \alpha, \cos \delta \cos \alpha, 0) + \ddot{\delta}(-\sin \delta \cos \alpha, -\sin \delta \sin \alpha, \cos \delta) - \\ &\quad - \dot{\alpha}^2(\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, 0) - \dot{\delta}^2(\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta) + \\ &\quad + 2\dot{\alpha}\dot{\delta}(\sin \delta \sin \alpha, -\sin \delta \cos \alpha, 0),\end{aligned}\quad (2.50)$$

что можно представить в виде

$$\begin{aligned}
\dot{D}_1 &= -(D_2\dot{\alpha} + D_3\dot{\delta}\cos\alpha), \\
\dot{D}_2 &= D_1\dot{\alpha} - D_3\dot{\delta}\sin\alpha, \\
\dot{D}_3 &= \dot{\delta}\cos\delta, \\
\ddot{D}_1 &= -D_1(\dot{\alpha}^2 + \dot{\delta}^2) + 2D_3\dot{\alpha}\dot{\delta}\sin\alpha - D_2\ddot{\alpha} - D_3\ddot{\delta}\cos\alpha, \\
\ddot{D}_2 &= -D_2(\dot{\alpha}^2 + \dot{\delta}^2) - 2D_3\dot{\alpha}\dot{\delta}\cos\alpha + D_1\ddot{\alpha} - D_3\ddot{\delta}\sin\alpha, \\
\ddot{D}_3 &= -D_3\dot{\delta}^2 + \ddot{\delta}\cos\delta,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\mathbf{D} \times \dot{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} -\dot{\alpha}\cos\delta\sin\delta\cos\alpha + \dot{\delta}\sin\alpha \\ -\dot{\alpha}\cos\delta\sin\delta\sin\alpha - \dot{\delta}\cos\alpha \\ \dot{\alpha}\cos^2\delta \end{pmatrix}.$$

8. Выражение α, δ и их производных через $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}$

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{D_2}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}, \quad \cos\delta = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, \\
\sin\delta &= D_3, \quad \dot{\alpha} = \frac{D_1\dot{D}_2 - D_2\dot{D}_1}{D_1^2 + D_2^2}, \quad \dot{\delta} = \frac{\dot{D}_3}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}, \\
(D_1^2 + D_2^2)^2 \ddot{\alpha} &= (D_1^2 + D_2^2)(D_1\ddot{D}_2 - D_2\ddot{D}_1) - \\
&\quad - 2(D_1\dot{D}_1 + D_2\dot{D}_2)(D_1\dot{D}_2 - D_2\dot{D}_1), \\
(D_1^2 + D_2^2)^{3/2} \ddot{\delta} &= (D_1^2 + D_2^2)\ddot{D}_3 + D_3\dot{D}_3^2.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

9. Выражение параметров видимого движения через α, δ и их производные

$$\mu = \sqrt{\dot{\alpha}^2 \cos^2\delta + \dot{\delta}^2}, \quad \cos\psi = \frac{\dot{\delta}}{\mu}, \quad \sin\psi = \frac{\dot{\alpha}\cos\delta}{\mu}, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\dot{\alpha}\cos\delta}{\dot{\delta}},$$

$$\begin{aligned}
\mu\dot{\mu} &= \dot{\alpha}\ddot{\alpha}\cos^2\delta + \dot{\delta}\ddot{\delta} - \dot{\alpha}^2\dot{\delta}\cos\delta\sin\delta, \\
\mu^3\kappa &= (\dot{\alpha}\ddot{\delta} - \ddot{\alpha}\dot{\delta})\cos\delta + \dot{\alpha}^3\cos^2\delta\sin\delta + 2\dot{\alpha}\dot{\delta}^2\sin\delta,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\psi} &= \mu(\sin\psi\operatorname{tg}\delta - \kappa) = \dot{\alpha}\sin\delta - \mu\kappa, \\
\mu^2\dot{\psi} &= -(\dot{\alpha}\ddot{\delta} - \ddot{\alpha}\dot{\delta})\cos\delta - \dot{\alpha}\dot{\delta}^2\sin\delta,
\end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}
c &= \sqrt{1 + \varkappa^2} = \frac{1}{\cos \beta}, & \varkappa &= \pm \sqrt{c^2 - 1} = \pm \operatorname{tg} \beta, \\
\cos \beta &= \frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varkappa^2}}, & \sin \beta &= \frac{\sqrt{c^2 - 1}}{c} = \frac{|\varkappa|}{\sqrt{1 + \varkappa^2}}, \\
\operatorname{tg} \beta &= \sqrt{c^2 - 1} = |\varkappa|.
\end{aligned} \tag{2.55}$$

10. Выражение производных от α, δ через параметры видимого движения

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha} \cos \delta &= \mu \sin \psi, & \dot{\delta} &= \mu \cos \psi, \\
\ddot{\alpha} \cos^2 \delta &= \dot{\mu} \sin \psi \cos \delta + \mu^2 \cos \psi (2 \sin \psi \sin \delta - \varkappa \cos \delta), \\
\ddot{\delta} \cos \delta &= \dot{\mu} \cos \psi \cos \delta + \mu^2 \sin \psi (-\sin \psi \sin \delta + \varkappa \cos \delta), \\
(\dot{\alpha} \ddot{\delta} - \ddot{\alpha} \dot{\delta}) \cos \delta &= \mu^3 \varkappa - \mu^3 \sin \psi \operatorname{tg} \delta (1 + \cos^2 \psi).
\end{aligned} \tag{2.56}$$

11. Выражение параметров видимого движения через $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}$

$$\begin{aligned}
\mu &= \sqrt{\dot{D}_1^2 + \dot{D}_2^2 + \dot{D}_3^2}, \\
\mu \cos \psi &= \frac{\dot{D}_3}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}, & \mu \sin \psi &= \frac{D_1 \dot{D}_2 - D_2 \dot{D}_1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}, \\
\mu \dot{\mu} &= \dot{D}_1 \ddot{D}_1 + \dot{D}_2 \ddot{D}_2 + \dot{D}_3 \ddot{D}_3, & \mu^3 \varkappa &= \begin{vmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ \dot{D}_1 & \dot{D}_2 & \dot{D}_3 \\ \ddot{D}_1 & \ddot{D}_2 & \ddot{D}_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Замечание. Часть вышеприведенных выражений содержит в знаменателе μ , что влечет сингулярность при равной нулю тангенциальной скорости (собственного движения) светила. Часть выражений содержит в знаменателе $\cos \delta$, или $D_1^2 + D_2^2$, что влечет сингулярность в полюсах. Эти случаи обсуждаются в главе 5.

Задачи к главе 2

Задача 2.1. Рассмотрим две точки A_1, A_2 на единичной окружности с центром в O , или, что равносильно, два единичных вектора $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$. Пусть точка A расположена на дуге окружности между A_1 и A_2 (единичный вектор \mathbf{R} расположен между \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2), рис. 2.5.

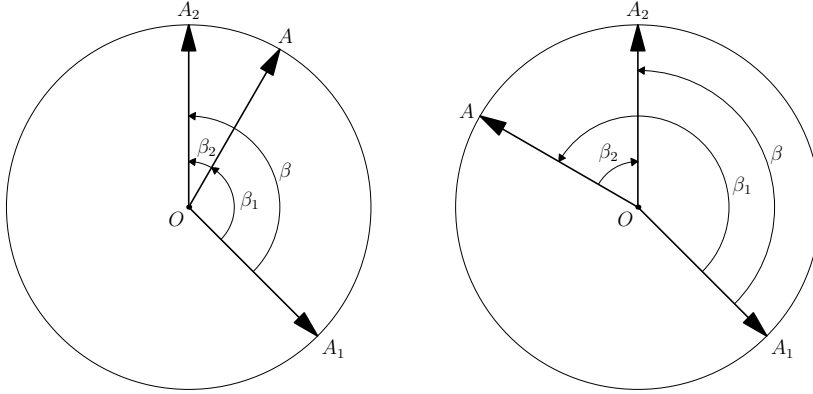


Рис. 2.5: К задачам 2.1 – 2.4. Слева точка A лежит на кратчайшей дуге от A_1 к A_2 , справа — на дополнительной дуге.

Вообще говоря, понятие *между* на окружности не определено. Чтобы придать ему смысл, считаем, что векторы $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ неколлинеарны, и что A лежит на меньшей из двух дуг, соединяющих A_1 и A_2 . Пусть β — угол между векторами \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 , β_s — угол между векторами \mathbf{R} и \mathbf{R}_s . В наших предположениях

$$\beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad 0 < \beta = \beta_1 + \beta_2 < \pi. \quad (2.58)$$

Выразить \mathbf{R} через $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \beta_1, \beta_2$.

Ответ:

$$\mathbf{R} = p_1 \mathbf{R}_1 + p_2 \mathbf{R}_2, \quad (2.59)$$

где

$$p_1 = \frac{\sin \beta_2}{\sin(\beta_1 + \beta_2)}, \quad p_2 = \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta_1 + \beta_2)}.$$

Оба коэффициента p_1, p_2 положительны.

Указание. Для определения p_1 достаточно обе части равенства (2.59) умножить векторно на \mathbf{R}_2 .

Задача 2.2. Представить решение задачи 2.1 в виде

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m_1} (\mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2), \quad (2.60)$$

где

$$m_1 = \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin \beta_2}, \quad m_2 = \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2}.$$

Коэффициенты m_1, m_2 положительны.

Задача 2.3. Модифицируем задачу 2.1. Определим положительное направление на окружности как направление минимального поворота вектора \mathbf{R}_1 до совмещения с неколлинеарным ему вектором \mathbf{R}_2 . Пусть β — угол поворота \mathbf{R}_1 до совмещения с \mathbf{R}_2 , β_1 — угол поворота \mathbf{R}_1 до совмещения с \mathbf{R} , β_2 — угол поворота \mathbf{R} до совмещения с \mathbf{R}_2 , рис. 2.5.

Показать, что если A лежит между A_1 и A_2 , то задача 2.3 совпадает с задачами 2.1, 2.2, включая обозначения и неравенства (2.58).

Задача 2.4. Пусть в условиях задачи 2.3 точка A лежит на дуге, соединяющей A_2 с A_1 в положительном направлении (т.е. на дуге, большей π). Тогда

$$0 < \beta < \pi, \quad \beta < \beta_1 < 2\pi, \quad \beta - 2\pi < \beta_2 < 0, \quad \beta = \beta_1 + \beta_2. \quad (2.61)$$

Показать, что формулы (2.59, 2.60) верны с вышеуказанными значениями p_1, p_2, m_1, m_2 . Однако теперь один или два из коэффициентов p_1, p_2 и один или два из коэффициентов m_1, m_2 отрицательны.

Следующая задача — подготовительная для решения задачи 2.6.

Задача 2.5. Показать, что все параллелепипеды общего положения (все ребра имеют положительную длину, среди плоских углов отсутствуют равные 0 , $\pi/2$ или π) делятся на два класса. Параллелепипед класса \mathcal{A}_1 имеет 2 вершины, к которым примыкают 3 острых плоских угла, и 6 вершин, к которым примыкают 2 тупых и 1 острый плоский угол. Параллелепипед класса \mathcal{A}_2 имеет 2 вершины, к которым примыкают 3 тупых плоских угла, и 6 вершин, к которым примыкают 2 острых и 1 тупой плоский угол.

Указание. Рассмотреть три ребра, исходящих из какой-либо вершины, как векторы. Выразить через них тройки ребер-векторов, исходящих из других семи вершин. Рассмотреть знаки скалярных произведений.

Задача 2.6. Из точки O отложено три вектора \mathbf{r}_s . Обозначим через σ_s угол между двумя векторами, отличными от \mathbf{r}_s .

Выразить смешанное произведение $(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3)$ через длины векторов и углы между ними.

Ответ:

$$(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3) = \pm r_1 r_2 r_3 \xi, \quad (2.62)$$

где

$$\xi = \sqrt{1 - \cos^2 \sigma_1 - \cos^2 \sigma_2 - \cos^2 \sigma_3 + 2 \cos \sigma_1 \cos \sigma_2 \cos \sigma_3}. \quad (2.63)$$

Здесь верхний знак берется, если тройка $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ — правая. Для левой тройки берется нижний знак.

Схема решения. Модуль смешанного произведения равен объему параллелепипеда $OA_1 \dots A_7$, построенного на векторах $OA_s = \mathbf{r}_s$, $s = 1, 2, 3$, см. рис. 2.6. Задача сводится к нахождению расстояния OB , где B — основание перпендикуляра, опущенного из A_3 на плоскость параллелограмма $OA_1A_4A_2$. Пусть B_1, B_2 — основания перпендикуляров, опущенных из A_3 на OA_1 и OA_2 .

Предположим, что наш параллелепипед принадлежит классу A_2 . Не умаляя общности, считаем σ_1, σ_2 острыми углами, а σ_3 — тупым углом. Тогда точки B_1, B_2 лежат на ребрах OA_1, OA_2 (или их продолжениях за A_1, A_2), а точка B лежит внутри угла A_1OA_2 . Обозначим через φ_1, φ_2 углы B_1OB, B_2OB , соответственно (см. рис. 2.6). Можно показать, что

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \sigma_3, \quad \varphi_1 < \pi/2, \quad \varphi_2 < \pi/2,$$

$$OB_1 = r_3 \cos \sigma_2 = OB \cos \varphi_1, \quad OB_2 = r_3 \cos \sigma_1 = OB \cos \varphi_2.$$

После элементарных преобразований получаем уравнение относительно φ_1 :

$$(\cos \sigma_1 - \cos \sigma_2 \cos \sigma_3) \cos \varphi_1 = \cos \sigma_2 \sin \sigma_3 \sin \varphi_1, \quad (2.64)$$

откуда

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \sigma_2 \sin \sigma_3}{\xi_0}, \quad (2.65)$$

где

$$\xi_0 = \sqrt{\cos^2 \sigma_1 + \cos^2 \sigma_2 - 2 \cos \sigma_1 \cos \sigma_2 \cos \sigma_3}.$$

Далее OB находится без труда:

$$OB = \frac{r_3}{\sin \sigma_3} \xi_0. \quad (2.66)$$

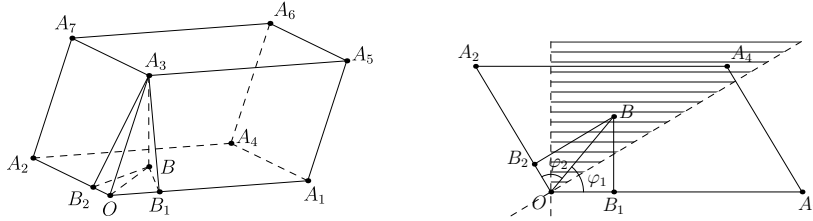


Рис. 2.6: К задачам 2.6 – 2.9. Слева — параллелепипед $OA_1 \dots A_7$, перпендикуляр A_3B , опущенный на плоскость $OA_1A_4A_2$, и перпендикуляры A_3B_1 , A_3B_2 к прямым OA_1 , OA_2 . Справа — чертеж в плоскости $OA_1A_4A_2$.

Если наш параллелепипед принадлежит классу \mathcal{A}_1 , считаем $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ острыми углами. Тогда точки B_1, B_2 по-прежнему лежат на соответствующих сторонах, но точка B может лежать вне угла A_1OA_2 . По-прежнему $\varphi_1 < \pi/2, \varphi_2 < \pi/2$, но связь между углами в зависимости от положения B может быть тройкой: $\varphi_2 = \sigma_3 + \varphi_1$, $\varphi_2 = \sigma_3 - \varphi_1$, $\varphi_2 = \varphi_1 - \sigma_3$. Уравнения типа (2.64) получаются разными, но формулы (2.65, 2.66) остаются справедливыми.

Задача 2.7. Показать, что формула (2.62) верна и в случаях, когда среди углов σ_s встречаются $0, \pi/2$ или π , а также при обращении одной из длин r_s в нуль.

Задача 2.8. Не для всяких σ_s можно указать такие векторы \mathbf{r}_s , чтобы выполнялись условия задачи 2.6. Пусть $0 \leq \sigma_s \leq \pi$, как должно быть для углов между векторами, и пусть $r_s > 0$.

Показать, что задача 2.6 имеет решение, определяемое формулой (2.62), если сумма любых двух σ_s больше третьего; если сумма каких-либо двух σ_s равна третьему (в частности, если одна из величин σ_s равна нулю или π), то существует единственное решение, равное нулю; если сумма каких-либо двух σ_s меньше третьего, то решение не существует.

Задача 2.9. При $\cos \sigma_1 = \cos \sigma_2 = -\cos \sigma_3 = 0.6$ в (2.63) под знаком корня стоит отрицательное число. Показать, что в случае, когда σ_s — углы между указанными в задаче 2.6 векторами, подкоренное выражение в (2.63) неотрицательно.

Схема решения. Вычислим производную:

$$\frac{\partial(\xi^2)}{\partial\sigma_3} = 2 \sin \sigma_3 (\cos \sigma_3 - \cos \sigma_1 \cos \sigma_2).$$

Если $\sigma_3 = 0$, то $\sigma_1 = \sigma_2$, а если $\sigma_3 = \pi$, то $\sigma_1 + \sigma_2 = \pi$. В обоих случаях $\xi^2 = 0$.

Если $\cos \sigma_3 = \cos \sigma_1 \cos \sigma_2$, то

$$\xi^2 = (1 - \cos^2 \sigma_1)(1 - \cos^2 \sigma_2) \geq 0.$$

Задача 2.10. Рассмотрим три точки A_1, A_2, A единичной сферы, являющиеся концами радиусов-векторов $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}$. Известны сферические расстояния σ_s между A и A_s и σ между A_1 и A_2 . Считаем, что все сферические расстояния положительны и меньше π , и что любое расстояние меньше суммы двух других. Таким образом, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma$ являются углами между соответствующими векторами, см. рис. 2.7.

Выразить \mathbf{R} через \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 .

Ответ:

$$\mathbf{R} = p_1 \mathbf{R}_1 + p_2 \mathbf{R}_2 + p \mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 \quad (2.67)$$

при

$$p_1 = \frac{\cos \sigma_1 - \cos \sigma_2 \cos \sigma}{\sin^2 \sigma}, \quad p_2 = \frac{\cos \sigma_2 - \cos \sigma_1 \cos \sigma}{\sin^2 \sigma},$$

$$p = \pm \frac{\sqrt{\sin^2 \sigma - \cos^2 \sigma_1 - \cos^2 \sigma_2 + 2 \cos \sigma \cos \sigma_1 \cos \sigma_2}}{\sin^2 \sigma}.$$

Обратим внимание, что задача имеет два решения, что очевидно заранее: точка A и симметричная ей относительно большого круга $A_1 A_2$ точка равноправны.

Указание. Умножить обе части (2.67) скалярно на \mathbf{R}_1 , а затем на \mathbf{R}_2 и найти p_1, p_2 . Затем умножить обе части скалярно на $\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2$, получить $p \sin^2 \sigma = (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R})$ и воспользоваться решением задачи 2.6.

Задача 2.11. Доказать, что на любой поверхности геодезическая кривизна дается формулой

$$\varkappa = \frac{(\mathbf{D}\ddot{\mathbf{r}})}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}. \quad (2.68)$$

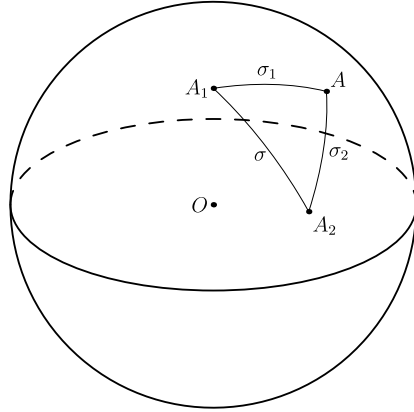


Рис. 2.7: К задаче 2.10. Сферические расстояния σ , σ_1 , σ_2 между точками A_1 и A_2 , A_1 и A , A_2 и A единичной сферы. Величины σ , σ_1 , σ_2 равны углам между векторами $\mathbf{R}_1 = OA_1$ и $\mathbf{R}_2 = OA_2$, $\mathbf{R} = OA$ и \mathbf{R}_1 , \mathbf{R} и \mathbf{R}_2 (не нарисованы), если $0 \leq \sigma, \sigma_1, \sigma_2 \leq \pi$.

Указание. Принять касательную в точке A плоскость за плоскость xu . Согласно второму определению геодезической кривизны

$$\kappa = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}{v^3}.$$

За v следует взять скорость проекции траектории на касательную плоскость (почему $v = |\dot{\mathbf{r}}|$?).

Величина $\dot{x}_1 \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2$ равна третьей компоненте вектора $\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}$, т.е. смешанному произведению $(D\dot{\mathbf{r}}\ddot{\mathbf{r}})$.

Задача 2.12. Завершить доказательство формулы (2.68), использовавшее специальную систему координат; вывести из (2.68) второе соотношение (2.38) для сферы.

Далее все задачи связаны с единичной сферой.

Задача 2.13. Вывести формулы (2.50) дифференцированием первого из равенств (2.44). Преобразовать полученные формулы к виду (2.51).

Задача 2.14. Проверить справедливость тождеств (2.45).

Задача 2.15. Вывести выражение (2.34) для геодезической кривизны, используя (2.38) и (2.50).

Задача 2.16. Показать, что

$$\mathbf{T}_\alpha = \frac{1}{\cos \delta} \mathbf{K} \times \mathbf{D}, \quad \mathbf{T}_\delta = \frac{1}{\cos \delta} (\mathbf{K} - \sin \delta \mathbf{D}). \quad (2.69)$$

Указание. Вектор \mathbf{T}_α направлен вдоль $\mathbf{K} \times \mathbf{D}$; вектор \mathbf{T}_δ направлен вдоль $\mathbf{D} \times \mathbf{T}_\alpha$.

Задача 2.17. Найти положение центра соприкасающегося малого круга, считая известными орты $\mathbf{T}, \mathbf{M}, \mathbf{D}$ и геодезическую кривизну \varkappa .

Ответ. Радиус-вектор \mathbf{u} центра малого круга равен

$$\mathbf{u} = \frac{\varkappa}{c^2} \mathbf{M} + \frac{\varkappa^2}{c^2} \mathbf{D}. \quad (2.70)$$

Его длина равна $u = |\varkappa|/c$.

Указание. Вектор $\mathbf{u} = OB_0$, см. рис. 2.3.

Задача 2.18. Показать, что радиус соприкасающегося малого круга равен $1/c$.

Задача 2.19. Показать, что при движении по меридиану $\alpha = \text{const}$, $\dot{\delta} \neq 0$ параметры видимого движения равны

$$\psi = \begin{cases} 0, & \text{если } \dot{\delta} > 0, \\ \pi, & \text{если } \dot{\delta} < 0, \end{cases}$$

$$\mu = |\dot{\delta}|, \quad \dot{\psi} = 0, \quad \varkappa = 0, \quad c = 1.$$

Задача 2.20. Показать, что при движении по параллели $\delta = \text{const}$, $\dot{\alpha} \neq 0$ параметры видимого движения равны

$$\psi = \frac{\pi}{2} \text{sign } \dot{\alpha}, \quad \mu = |\dot{\alpha}| \cos \delta, \quad \dot{\psi} = 0, \quad \varkappa = \text{tg } \delta \text{sign } \dot{\alpha}, \quad c = \frac{1}{\cos \delta}.$$

Задача 2.21. Вывести (2.32) из (2.70).

Указание. Орт биномали $\mathbf{B} = OB$, см. рис. 2.3.

Задача 2.22. Убедиться в справедливости (2.46), пользуясь соотношениями (2.5 – 2.7) и (2.11).

Задача 2.23. Вывести формулы (2.47) прямым дифференцированием с учетом (2.46).

Задача 2.24. Вывести формулы (2.48).

Задача 2.25. Дифференцированием (2.19) с учетом (2.47, 2.48, 2.20) получить соотношение

$$\dot{\mathbf{T}} = (\mu \sin \psi \operatorname{tg} \delta - \dot{\psi}) \mathbf{M} - \mu \mathbf{D}. \quad (2.71)$$

Задача 2.26. Доказать первое соотношение (2.54), сравнивая (2.71) и (2.36).

Задача 2.27. Дифференцируя функцию $\dot{\delta} = \mu \cos \psi$, получить после преобразований

$$\mu^3 \sin \psi \dot{\psi} = \cos^2 \delta \dot{\alpha} \ddot{\alpha} + (\dot{\delta}^2 - \mu^2) \ddot{\delta} - \cos \delta \sin \delta \dot{\alpha}^2 \dot{\delta}^2,$$

и вывести отсюда вторую формулу (2.54).

Задача 2.28. Показать идентичность первого и второго соотношения (2.54).

Глава 3

Основные уравнения прямых методов определения орбит и получение входящих в уравнения параметров из наблюдений

В этой главе мы выведем основные уравнения прямых методов определения орбит и покажем, как входящие в эти уравнения параметры определяются из наблюдений. Укажем сразу на одно приятное обстоятельство. Уравнения получаются одинаковыми для нескольких существенно различающихся по постановке задачи случаев. Выделим три основных:

- *гелиоцентрическое движение*, когда с Земли наблюдается астероид, комета, космический аппарат дальнего космоса;
- *геоцентрическое движение*, когда с поверхности Земли наблюдается искусственный спутник Земли или фрагмент космического мусора в околоземном пространстве;
- *относительное геоцентрическое движение*, когда ИСЗ или фрагмент космического мусора наблюдается с борта искусственного спутника Земли.

Для удобства читателя начнем с описания принятых в дальнейшем единых обозначений. Они mnemonicически связаны с гелиоцентрическим случаем. Для сохранения единой формы уравнений обозначения не меняются и в двух других случаях.

3.1 Система обозначений

Обозначения пространств, векторов, матриц описаны в начале главы 3.

Поскольку позиционная астрометрия широко пользуется небесной (единичной по терминологии математиков) сферой, наряду с траекторией Φ небесного тела будем рассматривать ее проекцию $\tilde{\Phi}$ на небесную сферу; $\tilde{\Phi}$ определяет *видимое движение* светила; характеристики $\tilde{\Phi}$ естественно назвать *параметрами видимого движения*.

Перейдем к конкретным обозначениям.

3.1.1 Гелиоцентрическое движение небесного тела

S — Солнце, E — Земля, A — небесное тело (например, астероид). Все тела считаются материальными точками, если не оговорено противное.

\mathbb{S} — *геоцентрическая* небесная сфера, т.е. сфера единичного радиуса с центром в E .

Φ — траектория A с точки зрения наблюдателя, находящегося в центре Земли, т.е. годограф вектора EA .

$\tilde{\Phi}$ — проекция Φ на \mathbb{S} , т.е. годограф вектора $E\tilde{A}$, где \tilde{A} — проекция A на \mathbb{S} .

$T(\tilde{A})$ — картинная плоскость, т.е. касательная к \mathbb{S} в точке \tilde{A} плоскость. Указание на точку касания обычно опускается.

$\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ — орты невращающейся гелиоцентрической системы прямоугольных координат (при расчетах используем систему J2000.0, оси которой определяются положением экватора и равноденствия 2000.0).

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = x_1\mathbf{I} + x_2\mathbf{J} + x_3\mathbf{K} = r\mathbf{R}$ — гелиоцентрический радиус-вектор SA небесного тела, задаваемый его гелиоцентрическими координатами x_1, x_2, x_3 или модулем r и единичным вектором \mathbf{R} , направленным из S в A .

$\mathbf{g} = g\mathbf{G}$ — гелиоцентрический радиус-вектор SE центра Земли.

$\mathbf{d} = d\mathbf{D}$ — геоцентрический радиус-вектор EA небесного тела; \mathbf{D} совпадает с вектором $E\tilde{A}$; его направляющие косинусы можно вы-

разить через сферические координаты α, δ (прямое восхождение и склонение):

$$\mathbf{D} = (\cos \delta \cos \alpha, \cos \delta \sin \alpha, \sin \delta).$$

\mathbf{T} — единичный вектор, направленный по касательной к траектории $\tilde{\Phi}$ в сторону движения; лежит в картинной плоскости \mathbb{T} .

$\mathbf{M} = \mathbf{D} \times \mathbf{T}$ — единичный вектор мгновенного полюса траектории $\tilde{\Phi}$; заметим, что при бесконечно малом t в первом приближении $\tilde{\Phi}$ — дуга касающегося траектории большого круга, во втором — дуга соприкасающегося малого круга.

\mathbf{N} — единичный вектор главной нормали к геоцентрической траектории $\tilde{\Phi}$.

$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ — единичный вектор бинормали к геоцентрической траектории $\tilde{\Phi}$.

\mathbf{v} — вектор тангенциальной гелиоцентрической скорости небесного тела, т.е. проекция вектора $\dot{\mathbf{r}}$ на касательную к гелиоцентрической небесной сфере радиуса SA плоскость.

$\mathbf{V} = \mathbf{v}/v$ — единичный вектор тангенциальной гелиоцентрической скорости небесного тела.

$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \times \mathbf{V}$ — единичный вектор, направленный в полюс гелиоцентрической орбиты небесного тела.

$\mathbf{l} = l\mathbf{L}$ — топоцентрический радиус-вектор небесного тела, задаваемый модулем l и единичным вектором \mathbf{L} .

\mathbf{e} — гелиоцентрический радиус-вектор топоцентра. Эти два вектора вводятся для учета конечных размеров Земли.

$\mu \geq 0$ — угловая геоцентрическая скорость небесного тела (скорость точки \tilde{A} вдоль траектории $\tilde{\Phi}$ на \mathbb{S}).

ψ — позиционный угол направления геоцентрической угловой скорости, $0 \leq \psi < 360^\circ$, измеряется в картинной плоскости как угол между направлением на северный полюс и вектором \mathbf{T} . Направление на север в картинной плоскости согласно (2.69) задается ортом

$$\mathbf{T}_\delta = \frac{\mathbf{K} - \sin \delta \mathbf{D}}{\cos \delta}. \quad (3.1)$$

Эта формула неприменима при прохождении светила через полюсы мира, когда $\delta = \pm 90^\circ$, $\mathbf{D} = \pm \mathbf{K}$: величины ψ, \mathbf{T}_δ в полюсах не определены, а в близкой окрестности полюсов определяются с большой погрешностью. В астрономии принято считать ψ углом, измеряемым земным наблюдателем как угол поворота вектора \mathbf{T}_δ

против часовой стрелки до совмещения с вектором \mathbf{T} . В математике принято смотреть с конца вектора \mathbf{D} , отложенного, как и \mathbf{T} , от точки \tilde{A} единичной сферы. При этом условии ψ возрастает *по часовой стрелке*.

$c \geq 1$ — кривизна кривой $\tilde{\Phi}$.

κ — геодезическая кривизна $\tilde{\Phi}$ как кривой на сфере \mathbb{S} ; считается положительной, если вектор \mathbf{T} вращается *против часовой стрелки*, если смотреть с конца вектора \mathbf{D} , или, что то же, *по часовой стрелке* для земного наблюдателя.

\bar{t} или t_0 — средний момент наблюдений.

n — среднее гелиоцентрическое движение небесного тела.

κ — квадратный корень из гравитационного параметра Солнца (последний равен произведению гравитационной постоянной на массу Солнца).

i — индекс, равный номеру координаты: $i = 1, 2, 3$.

j — индекс, равный номеру наблюдения: $j = 1, 2, \dots, t$, где t — общее число наблюдений, $t \gg 3$.

При вычислениях используется астрономическая система единиц: длина — в астрономических единицах, время — в средних солнечных сутках, масса — в массах Солнца. При этом соглашении $\kappa = 0,01720209895$ (гауссова постоянная). Углы теоретически измеряются в радианах, практически — во всевозможных принятых в астрономии единицах.

3.1.2 Геоцентрическое движение небесного тела

При описании геоцентрического движения используются те же обозначения, но с другим астрономическим наполнением. Это не приводит к путанице, поскольку случаи геоцентрического и гелиоцентрического движения не пересекаются.

S — центр Земли, E — наблюдатель, A — небесное тело (как правило, ИСЗ).

\mathbb{S} — *топоцентрическая* небесная сфера (с центром в E).

Φ — годограф вектора EA .

$\tilde{\Phi}$ — годограф вектора $E\tilde{A}$, где \tilde{A} — проекция A на \mathbb{S} .

\mathbb{T} — картинная плоскость.

$\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ — те же орты, что и в п. 3.1.1. Заметим здесь, что, поскольку начало координат отнесено к центру Земли, следует иметь дело с видимыми положениями звезд.

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x_1, x_2, x_3) = x_1\mathbf{I} + x_2\mathbf{J} + x_3\mathbf{K} = r\mathbf{R}$ — геоцентрический радиус-вектор SA .

$\mathbf{g} = g\mathbf{G}$ — геоцентрический радиус-вектор SE наблюдателя; вектор \mathbf{G} направлен в геоцентрический зенит наблюдателя:

$$\mathbf{G} = (\cos \varphi' \cos s, \cos \varphi' \sin s, \sin \varphi'),$$

где φ' — геоцентрическая широта E , s — геоцентрическое местное звездное время на меридиане наблюдателя.

α, δ — сферические топоцентрические координаты небесного тела.

$\mathbf{d} = d\mathbf{D}$ — топоцентрический радиус-вектор EA небесного тела.

\mathbf{T} — единичный вектор, направленный по касательной к траектории $\tilde{\Phi}$ в сторону движения; лежит в картинной плоскости \mathbf{T} .

$\mathbf{M} = \mathbf{D} \times \mathbf{T}$ — орт мгновенного полюса траектории $\tilde{\Phi}$.

\mathbf{N} — единичный вектор главной нормали к топоцентрической траектории $\tilde{\Phi}$ небесного тела.

$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$ — единичный вектор бинормали к топоцентрической траектории $\tilde{\Phi}$ небесного тела.

\mathbf{v} — вектор тангенциальной геоцентрической скорости небесного тела.

$\mathbf{V} = \mathbf{v}/v$ — единичный вектор тангенциальной геоцентрической скорости небесного тела.

$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \times \mathbf{V}$ — единичный вектор, направленный в полюс геоцентрической орбиты небесного тела.

$\mu \geq 0$ — угловая топоцентрическая скорость небесного тела.

ψ — позиционный угол направления топоцентрической угловой скорости, $0 \leq \psi < 360^\circ$.

$c \geq 1$ — кривизна кривой $\tilde{\Phi}$.

\varkappa — геодезическая кривизна $\tilde{\Phi}$ как кривой на сфере \mathbb{S} .

ω — угловая скорость вращения Земли.

\bar{t} или t_0 — средний момент наблюдений.

n — среднее геоцентрическое движение небесного тела.

κ — квадратный корень из гравитационного параметра Земли.

i — индекс, равный номеру координаты: $i = 1, 2, 3$.

j — индекс, равный номеру наблюдения: $j = 1, 2, \dots, m$, где m — общее число наблюдений, $m \gg 3$.

При вычислениях используется следующая система единиц: длина — в экваториальных радиусах Земли (что согласно [29] соответствует 6 378 140 м), время — в секундах, масса — в массах Земли. В этом случае $\omega = 7.29212 \cdot 10^{-5}$ рад/с, $\kappa = 1.23945 \cdot 10^{-3}$.

3.1.3 Относительное геоцентрическое движение небесного тела

Мы не будем описывать его столь же подробно. Отметим главное. Теперь S — центр Земли, E — спутник-наблюдатель, A — наблюдаемый спутник. Таким образом, $SE = \mathbf{g}$, $SA = \mathbf{r}$, $EA = \mathbf{d}$ представляют собой геоцентрический радиус-вектор спутника-наблюдателя, геоцентрический радиус-вектор наблюдаемого спутника, вектор положения наблюдаемого спутника относительно спутника-наблюдателя, соответственно.

3.2 Дифференцирование по времени векторов, характеризующих положение наблюдателя

В дальнейшем движение наблюдателя, описываемое вектором \mathbf{g} , считается известным.

В случаях гелиоцентрического и относительного геоцентрического движения оно определяется высокоточной теорией движения Земли и ИСЗ, соответственно. Если пренебречь возмущениями, что допустимо при определении первоначальной орбиты, то изменение \mathbf{g} происходит согласно закону обратных квадратов:

$$\ddot{\mathbf{g}} = -\frac{\kappa^2}{g^3} \mathbf{g}, \quad (3.2)$$

где κ — постоянная Гаусса для гелиоцентрического движения и корень из гравитационного параметра Земли для относительного геоцентрического.

Остановимся подробнее на случае геоцентрического движения.

Позиционные наблюдения небесных тел обычно выполняются на наземной обсерватории, топоцентрические координаты которой связаны с отвесной линией и определяются астрономической широтой, долготой, высотой. Эти координаты должны быть известны из астрономических наблюдений и производства высокоточной нивелировки на обсерватории. Кроме того, каждый телескоп обязан иметь геодезические координаты — геодезическую широту и геодезическую долготу, которые соответствуют принятому референц-эллипсоиду, описывающему форму и размеры Земли как планеты.

Геоцентрические и геодезические координаты обсерватории отличаются между собой, главным образом, по широте, которая в первом случае связана с линией, соединяющей наблюдателя с центром Земли, а во втором — с нормалью к принятому референц-эллипсоиду. Разность этих широт может достигать $11'$. Долготы различаются меньше — только на составляющую уклонения отвеса на меридиане наблюдателя. Зная параметры земного референц-эллипсоида, а именно его большую полуось и сжатие, легко перевычислить геодезические координаты в геоцентрические и обратно.

С нужной нам точностью можно считать Землю вращающейся равномерно с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси, задаваемой вектором \mathbf{K} . Поэтому $g = \text{const}$ и достаточно установить изменение единичного вектора \mathbf{G} . Как хорошо известно из курса теоретической механики,

$$\dot{\mathbf{G}} = \omega \mathbf{K} \times \mathbf{G}. \quad (3.3)$$

Дифференцируем (3.3) еще раз:

$$\ddot{\mathbf{G}} = \omega \mathbf{K} \times \dot{\mathbf{G}} = \omega^2 \mathbf{K} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{G}).$$

Раскроем двойное векторное произведение по приведенной в §2.1 формуле:

$$\mathbf{K} \times (\mathbf{K} \times \mathbf{G}) = \mathbf{K}(\mathbf{K} \mathbf{G}) - \mathbf{G} = G_3 \mathbf{K} - (G_1 \mathbf{I} + G_2 \mathbf{J} + G_3 \mathbf{K}) = -G_1 \mathbf{I} - G_2 \mathbf{J}.$$

Окончательно,

$$\ddot{\mathbf{G}} = -\omega^2 (G_1 \mathbf{I} + G_2 \mathbf{J}). \quad (3.4)$$

Домножая (3.4) на постоянную длину g , перепишем это соотношение в виде

$$\ddot{\mathbf{g}} = -\omega^2 (g_1 \mathbf{I} + g_2 \mathbf{J}). \quad (3.5)$$

Замечание. Вектор \mathbf{g} наблюдателя на обсерватории вместе с вращающейся Землей описывает окружность, центр которой совпадает с центром Земли только для обсерватории на экваторе. Период вращения Земли (24 звездных часа) существенно больше кеплеровского (полтора часа). Так что соотношения (3.2) и (3.5) *никогда* не совпадают.

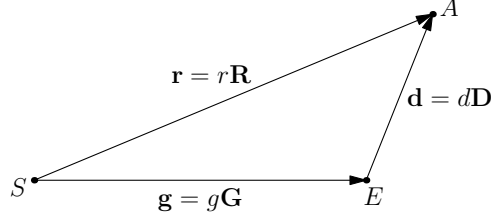


Рис. 3.1: Точки S , E , A и соединяющие их векторы.

3.3 Метод Лапласа

Метод Лапласа мы опишем в терминологии гелиоцентрического движения. Из сказанного выше ясно, что те же уравнения получаются и в двух других случаях, если не использовать соотношений (3.2) и (3.5).

Рассмотрим рис. 3.1, на котором представлено взаимное положение Солнца S , Земли E и небесного тела A в некоторый момент времени \bar{t} . Очевидно, гелиоцентрические радиус-векторы небесного тела \mathbf{r} и Земли \mathbf{g} связаны с геоцентрическим положением небесного тела \mathbf{d} уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{d}. \quad (3.6)$$

Поскольку направление вектора \mathbf{d} известно, перепишем (3.6) в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + d\mathbf{D}, \quad (3.7)$$

где $d = |\mathbf{d}|$, $\mathbf{D} = \mathbf{d}/d$. Дифференцируя (3.7) по времени два раза, придем к системе

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= d\mathbf{D} + \mathbf{g}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{d}\mathbf{D} + d\dot{\mathbf{D}} + \dot{\mathbf{g}}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{d}\mathbf{D} + 2\dot{d}\dot{\mathbf{D}} + d\ddot{\mathbf{D}} + \ddot{\mathbf{g}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Мы предполагаем, что движение небесного тела происходит только под действием притяжения Солнца, так что

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в третье из уравнений (3.8) и заменяя в нем \mathbf{r} согласно первому из уравнений (3.8), получим систему уравнений метода Лапласа:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} d &= \mathbf{r} - \mathbf{g}, \\ \dot{\mathbf{D}} d + \mathbf{D} \dot{d} &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{g}}, \\ \left(\ddot{\mathbf{D}} + \frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{D} \right) d + 2\dot{\mathbf{D}} \dot{d} + \mathbf{D} \ddot{d} &= -\frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{g}}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

В скалярной форме система (3.10) представляет собой девять уравнений с девятью неизвестными: по 3 компоненты векторов $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$, а также геоцентрическое расстояние и его производные d, \dot{d}, \ddot{d} . Векторы $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}, \mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}, \ddot{\mathbf{g}}$ считаются известными. Однако переходить к скалярной форме не следует: гораздо легче оперировать с тремя векторными уравнениями.

Первые два из уравнений (3.10) линейны, в третьем нелинейность входит лишь через скалярный множитель $r^{-3} = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-3/2}$. Поэтому решение уравнений — не слишком сложная задача.

Остановимся подробнее на величинах $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}$. Они могут быть выражены через α, δ и их производные по формулам (2.44, 2.50, 2.51). В силу единичности \mathbf{D} из трех компонент каждого из рассматриваемых векторов независимы только две. Иными словами, на эти векторы наложены три связи (2.45).

3.4 Метод параметров видимого движения

Обработка плотных рядов позиционных наблюдений ИСЗ, выполнявшихся в Пулковской обсерватории, показала наличие дополнительной информации, которая дает возможность, помимо традиционных сферических координат, получить новые данные о движении спутника, а именно о его видимой скорости и ускорении. В классическом методе Лапласа эти данные представляются в виде первых и вторых производных от сферических координат или от направляющих косинусов. Однако предпочтительнее эти данные представлять в проекции на оси естественного трехгранника, что приводит к параметрам видимого движения первого и второго порядка. Параметры видимого движения первого порядка — это угловая топоцентрическая скорость μ небесного тела A и ее позиционный угол ψ , характеризующий направление этой скорости от

носителем круга склонений на небесной сфере. Параметрами видимого движения второго порядка являются скорости изменения параметров первого порядка $\dot{\mu}$, $\dot{\psi}$ и выражающиеся через них кривизна κ и геодезическая кривизна \varkappa . Как показывает наш опыт, за два независимых параметра видимого движения второго порядка рационально выбрать $\dot{\mu}$ и \varkappa . Ранее было отмечено, что эти параметры возникли как результат анализа реальных фотографических снимков. В главе 6 они описываются формулами, связывающими их с кеплеровыми элементами орбиты A и геоцентрическими координатами наблюдателя. Спустя полтора десятилетия после начала первых наблюдений ИСЗ в Пулковской обсерватории, А.А.Киселев вывел систему уравнений для определения орбиты спутника, в которой параметры видимого движения появились органичным образом в процессе этого вывода. В дальнейшем метод параметров видимого движения (метод ПВД) был исследован О.П.Быковым, сравнен с классическим методом определения орбит Лапласа, а О.В.Кияевой применен для определения орбит двойных звезд.

В предлагаемом руководстве мы, спрямляя исторические зигзаги, избрали более простой путь. Сначала мы излагаем классический метод Лапласа, а потом без большого труда переходим к его модификации — методу ПВД. Кроме того, в оригинальных работах используется кривизна κ . Здесь мы работаем с более естественной геодезической кривизной \varkappa .

Отправной точкой выберем уравнения (3.10). С помощью формул (2.49) преобразуем (3.10) к виду

$$\begin{aligned} d\mathbf{D} &= \mathbf{r} - \mathbf{g}, \\ \dot{d}\mathbf{D} + \mu d\mathbf{T} &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{g}}, \\ \left(\ddot{d} - \mu^2 d + \frac{\kappa^2}{r^3} d \right) \mathbf{D} + (\dot{\mu}d + 2\mu\dot{d}) \mathbf{T} + \varkappa\mu^2 d \mathbf{M} &= -\frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{g}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.5 Определение параметров, входящих в основные уравнения, из наблюдений

Будем считать, что в результате позиционных наблюдений небесного тела — для определенности искусственного спутника Земли — получен ряд $\{\alpha_j, \delta_j\}$ топоцентрических экваториальных координат ИСЗ, отнесенных к моментам времени $\{t_j\}$, $j =$

$1, 2, \dots, m$, $m \gg 3$. Предположим далее, что полученный на данном телескопе с данной ПЗС-матрицей ряд однороден и равноточен, а наблюдения распределены приблизительно равномерно и плотно на топоцентрической дуге порядка $10 - 15^\circ$. Заметим, что строгая равномерность распределения наблюдений не имеет принципиального значения, а плотность наблюдений должна обеспечивать получение $10 - 20$ положений спутника на рассматриваемой дуге. Представим сферические координаты многочленом по времени. На практике обычно ограничиваются третьей или даже второй степенью многочлена:

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= A_0 + A_1\tau + A_2\tau^2 + A_3\tau^3, \\ \delta(t) &= B_0 + B_1\tau + B_2\tau^2 + B_3\tau^3.\end{aligned}\quad (3.12)$$

Здесь τ — безразмерное время $\tau = (t - t_0)/(\Delta t)$, где $\Delta t = (t_m - t_1)/2$, $t_0 = (t_m + t_1)/2$, причем t_1, t_m — моменты первого и последнего наблюдения, t_0 отмечает середину интервала наблюдений. Полагая $\tau_j = (t_j - t_0)/(\Delta t)$, получим для моментов наблюдения

$$\begin{aligned}\alpha_j &= A_0 + A_1\tau_j + A_2\tau_j^2 + A_3\tau_j^3, \\ \delta_j &= B_0 + B_1\tau_j + B_2\tau_j^2 + B_3\tau_j^3.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Соотношения (3.13) можно рассматривать как условные уравнения для определения коэффициентов A_s, B_s полиномиального представления сферических координат. Применяя стандартный метод наименьших квадратов к линейной системе (3.13), сведем задачу к системе нормальных (тоже линейных) уравнений. Ее решение находится без труда, так что коэффициенты A_s, B_s можно считать известными. Производные находятся простым дифференцированием как функции времени:

$$\begin{aligned}\Delta t \dot{\alpha} &= A_1 + 2A_2\tau + 3A_3\tau^2, & \Delta t^2 \ddot{\alpha} &= 2A_2 + 6A_3\tau, \\ \Delta t \dot{\delta} &= B_1 + 2B_2\tau + 3B_3\tau^2, & \Delta t^2 \ddot{\delta} &= 2B_2 + 6B_3\tau.\end{aligned}\quad (3.14)$$

Отсюда получаем нужные нам производные в средний момент наблюдений, полагая в (3.14) $\tau = 0$. Оценка точности полученных величин A_s, B_s , $s = 0, 1, 2$ выполняется по стандартным алгоритмам метода наименьших квадратов.

Полиномиальное представление результатов наблюдений не является единственно возможной процедурой. Нередко применяют

ортогональные многочлены — как правило, полиномы Чебышева [48], или сплайн-функции [25]. Но мы ограничимся алгоритмами, опирающимися на ряды Маклорена.

Достоинство сферических координат — их взаимная независимость, недостаток — зависимость от выбранной основной плоскости. В частности, в окрестности полюсов они малоприспособлены. Поэтому чаще работают с направляющими косинусами D_{ij} векторов \mathbf{D}_j . Соотношения (3.12 – 3.14) переходят в

$$D_i = A_{i0} + A_{i1}\tau + A_{i2}\tau^2 + A_{i3}\tau^3, \quad (3.15)$$

$$D_{ij} = A_{i0} + A_{i1}\tau_j + A_{i2}\tau_j^2 + A_{i3}\tau_j^3, \quad (3.16)$$

$$\Delta t \dot{D}_i = A_{i1} + 2A_{i2}\tau + 3A_{i3}\tau^2, \quad \Delta t^2 \ddot{D}_i = 2A_{i2} + 6A_{i3}\tau. \quad (3.17)$$

Отсюда нужные нам координаты векторов $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}$ легко находятся по стандартным процедурам метода наименьших квадратов.

Описанный алгоритм представления D_i многочленом по времени не учитывает соотношений (2.45), которые должны выполняться тождественно по t . Очевидно, достаточно потребовать тождественного по t выполнения первого из них. Между тем алгоритм применения метода наименьших квадратов отдельно для каждой компоненты приводит к тому, что вектор $\mathbf{D}(t)$ будет отличаться от единичного на величину порядка погрешностей измерений, что крайне нежелательно. Однако от этого недостатка легко избавиться, заменив определенные по методу наименьших квадратов величины A_{ij} близкими величинами B_{ij} по алгоритму, построенному в задаче 3.2.

Мы показали, как входящие в уравнения (3.10) метода Лапласа параметры $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}$, отнесенные к эпохе t_0 , можно определить из наблюдений. Обратимся к параметрам, входящим в уравнения (3.11) метода ПВД.

Первый способ. Проще всего определить их, используя только что найденные величины. Если за исходные принять $\alpha, \dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \delta, \dot{\delta}, \ddot{\delta}$, то по явным формулам (2.53) найдем $\mu, \psi, \dot{\mu}, \kappa$, после чего при необходимости формулы (2.55) дадут c, β .

Если за исходные принять $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}$, то по явным формулам (2.57) найдем $\mu, \psi, \dot{\mu}, \kappa$, после чего при необходимости формулы (2.55) дадут c, β .

Второй способ. При описанном двуступенчатом вычислении ПВД теряется значительная часть их преимуществ из-за потери

точности. Уже в начале наших исследований прямых методов определения орбит ИСЗ было установлено, что при статистической обработке результатов фотографических наблюдений происходит последовательное уменьшение точности вычисления величин D_{ij} и их производных [34]. Если положение спутника (нормальное место в средний момент наблюдений) можно было вычислить с точностью 10^{-6} и даже лучше, то скорости изменения направляющих косинусов — в самом благоприятном случае с точностью до 10^{-5} , а их вторые производные — до 10^{-2} . Поэтому целесообразнее находить ПВД непосредственно по массиву наблюдений. Достаточно аппроксимировать наблюденную траекторию наименее уклоняющимся (в смысле МНК — метода наименьших квадратов) от нее малым кругом. Проходящую через него плоскость зададим нормальным уравнением

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 = p, \quad P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1, \quad p \geq 0. \quad (3.18)$$

Предположим, что плоскость малого круга не параллельна оси z и не содержит ее. Тогда можно положить коэффициент при x_3 равным минус единице, временно нарушив нормальность уравнения плоскости:

$$q_1x_1 + q_2x_2 - x_3 = q. \quad (3.19)$$

Подставляя вместо переменных координаты векторов \mathbf{D}_j , получим систему условных уравнений

$$D_{1j}q_1 + D_{2j}q_2 - q = D_{3j}. \quad (3.20)$$

Эта система с тремя неизвестными линейна и легко решается методом наименьших квадратов, что дает нам q_1, q_2, q вместе с их вероятными ошибками. Нормируя коэффициенты уравнения (3.19), получим коэффициенты уравнения (3.18):

$$P_1 = \frac{q_1 \operatorname{sign} q}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}}, \quad P_2 = \frac{q_2 \operatorname{sign} q}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}}, \quad P_3 = \frac{-\operatorname{sign} q}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}},$$

$$p = \frac{|q|}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}}. \quad (3.21)$$

Следует различать два случая.

1. Свободный член уравнения (3.19) отличен от нуля $q \neq 0$. Соотношения (3.21) однозначно определяют P_i, p . Движение происходит

по малому кругу с меньшим единицы радиусом. Полнос малого круга, ближайший к нему, дается ортом $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$. При взгляде с конца вектора \mathbf{P} движение происходит против часовой стрелки, если тройка $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_m, \mathbf{P}$ — правая, или, что то же, $(\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_m \mathbf{P}) > 0$.

Замечание. По смыслу задачи покрытая наблюдениями дуга меньше 180° . Но если она близка к 180° , лучше брать не последний наблюденный вектор \mathbf{D}_m , а расположенный ближе к середине интервала вектор $\mathbf{D}_{\bar{m}}$, где $\bar{m} = \lfloor m/2 \rfloor$.

Центр малого круга определяется вектором длины p , направленным вдоль \mathbf{P} , т.е. согласно (3.21)

$$\mathbf{P} = \left(\frac{q_1 q}{1 + q_1^2 + q_2^2}, \frac{q_2 q}{1 + q_1^2 + q_2^2}, \frac{-q}{1 + q_1^2 + q_2^2} \right). \quad (3.22)$$

2. Свободный член уравнения (3.19) равен нулю $q = 0$ с точностью до ошибок измерений. Движение происходит по большому кругу. За $\text{sign } q$ можно принять любое из значений ± 1 . Выберем знак из условия правого винта (при взгляде с конца вектора \mathbf{P} движение происходит против часовой стрелки):

$$P_1 = \frac{\pm q_1}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}}, \quad P_2 = \frac{\pm q_2}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}}, \quad P_3 = \frac{\mp 1}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_2^2}},$$

$$p = 0. \quad (3.23)$$

Верхний знак берется, если

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{1m} & D_{2m} & D_{3m} \\ q_1 & q_2 & -1 \end{vmatrix} > 0. \quad (3.24)$$

При большой дуге наблюдений лучше, как и выше, \mathbf{D}_m заменить на $\mathbf{D}_{\bar{m}}$.

Введем теперь новую систему координат, в которой вектор \mathbf{P} будет третьим ортом \mathbf{K}' . За \mathbf{I}' возьмем орт, направленный вдоль $\mathbf{K} \times \mathbf{P}$. За \mathbf{J}' возьмем орт, дополняющий систему до правой $\mathbf{J}' = \mathbf{K}' \times \mathbf{I}'$. Пусть \mathbf{r} — произвольный вектор, отнесенный к старой системе координат, \mathbf{r}' — тот же вектор в новой системе. Связь между ними линейна:

$$\mathbf{r} = \mathcal{B} \mathbf{r}', \quad \mathbf{r}' = \mathcal{B}^* \mathbf{r}. \quad (3.25)$$

Столбцами матрицы \mathcal{B} служат векторы новых ортов в старой системе; \mathcal{B}^* — транспонированная матрица \mathcal{B} . Нетрудно показать, что

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -P_2/\varrho & -P_1P_3/\varrho & P_1 \\ P_1/\varrho & -P_2P_3/\varrho & P_2 \\ 0 & \varrho & P_3 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

где $\varrho = \sqrt{1 - P_3^2}$.

Замечание. Если малый круг близок к параллели $\delta = \text{const}$, то $P_3 \approx \pm 1$, а P_1 и P_2 малы, так что мы подходим к неопределенности $0 : 0$. В этом случае следует положить $P_1 = \varrho \sin \Omega'$, $P_2 = -\varrho \cos \Omega'$. Хотя угол Ω' (аналог угла прецессии в терминологии Эйлера или долготы узла в терминологии Кеплера) определяется с большой погрешностью, это не страшно, поскольку она умножается на малую величину ϱ . Матрицу (3.26) лучше в этом случае представить в виде

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos \Omega' & -P_3 \sin \Omega' & \varrho \sin \Omega' \\ \sin \Omega' & P_3 \cos \Omega' & -\varrho \cos \Omega' \\ 0 & \varrho & P_3 \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

По второй из формул (3.25) вычислим координаты D'_{ij} векторов \mathbf{D}'_j , представляющих \mathbf{D}_j в новой системе отсчета. Если бы точка A описывала в точности малый круг на небесной сфере, а погрешности измерений отсутствовали, то при всех j было бы $D'_{3j} = p$. В действительности это не так. Обозначим проекцию вектора \mathbf{D}'_j на плоскость малого круга через \mathbf{D}''_j :

$$\mathbf{D}''_j = (D'_{1j}, D'_{2j}, 0).$$

Каждому наблюдению сопоставим теперь угол φ_j , на который надо повернуть ось \mathbf{I}' до совмещения с проекцией \mathbf{D}''_j на плоскость векторов \mathbf{I}', \mathbf{J}' :

$$\cos \varphi_j = \frac{D'_{1j}}{\sqrt{D'^2_{1j} + D'^2_{2j}}}, \quad \sin \varphi_j = \frac{D'_{2j}}{\sqrt{D'^2_{1j} + D'^2_{2j}}}. \quad (3.28)$$

Эти формулы не совсем удовлетворительны. Нам требуется непрерывное изменение φ , переход же через 360° , например, может нарушить непрерывность. От этого неудобства легко избавиться. Полагая, что дуги от среднего наблюдения до первого и последнего

меньше 90° , перейдем к углу $\tilde{\varphi}$, считающему от среднего наблюдения $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_{\bar{m}}$. Очевидно, при $\pi/2 < \tilde{\varphi}_j < \pi/2$

$$\cos \tilde{\varphi}_j = \frac{D'_{1j}D'_{1\bar{m}} + D'_{2j}D'_{2\bar{m}}}{\xi}, \quad \sin \tilde{\varphi}_j = \frac{D'_{2j}D'_{1\bar{m}} - D'_{1j}D'_{2\bar{m}}}{\xi}, \quad (3.29)$$

где

$$\xi = \sqrt{(D_{1j}'^2 + D_{2j}'^2)(D_{1\bar{m}}'^2 + D_{2\bar{m}}'^2)}.$$

Аппроксимируем зависимость $\tilde{\varphi}$ от времени многочленом

$$\tilde{\varphi} = C_0 + C_1\tau + C_2\tau^2 + C_3\tau^3. \quad (3.30)$$

Для определения коэффициентов C_k , как выше для A_k и B_k , имеем линейную систему условных уравнений

$$C_0 + C_1\tau_j + C_2\tau_j^2 + C_3\tau_j^3 = \tilde{\varphi}_j, \quad (3.31)$$

откуда C_k находятся решением линейной системы нормальных уравнений.

В эпоху t_0 получаем

$$\tilde{\varphi} = C_0, \quad \Delta t \dot{\tilde{\varphi}} = C_1, \quad \Delta t^2 \ddot{\tilde{\varphi}} = 2C_2.$$

Отсюда с учетом ориентации

$$\mu = |C_1|, \quad \dot{\mu} = 2C_2 \operatorname{sign} C_1. \quad (3.32)$$

Особый случай $C_1 = \mu = 0$ рассматривается в главе 5.

Для нахождения позиционного угла вычислим сначала орт \mathbf{D}_0 , отвечающий углу $\tilde{\varphi}(t_0)$. Его координаты в исходной системе равны

$$\begin{pmatrix} D_{10} \\ D_{20} \\ D_{30} \end{pmatrix} = \mathcal{B} \begin{pmatrix} \cos(C_0 + \varphi_{\bar{m}}) \\ \sin(C_0 + \varphi_{\bar{m}}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Ясно, что касательная к малому кругу коллинеарна вектору $\mathbf{P} \times \mathbf{D}_0$. С учетом ориентации

$$\mathbf{T} = \gamma \frac{\mathbf{P} \times \mathbf{D}_0}{|\mathbf{P} \times \mathbf{D}_0|}, \quad (3.34)$$

где $\gamma = \text{sign}(\mathbf{D}_1 \mathbf{D}_m \mathbf{P})$, причем $\gamma = 1$ при движении по большому кругу. Вектор \mathbf{T}_δ в согласии с (2.69) равен

$$\mathbf{T}_\delta = \frac{\mathbf{K} - D_{30} \mathbf{D}_0}{\sqrt{1 - D_{30}^2}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\delta \mathbf{T} &= \frac{\gamma}{|\mathbf{P} \times \mathbf{D}_0| \sqrt{1 - D_{30}^2}} (\mathbf{P} \times \mathbf{D}_0) (\mathbf{K} - D_{30} \mathbf{D}_0) = \\ &= \frac{\gamma}{|\mathbf{P} \times \mathbf{D}_0| \sqrt{1 - D_{30}^2}} (\mathbf{P} \mathbf{D}_0 \mathbf{K}). \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\cos \psi = \frac{\gamma}{|\mathbf{P} \times \mathbf{D}_0| \sqrt{1 - D_{30}^2}} (\mathbf{P} \mathbf{D}_0 \mathbf{K}), \quad \sin \psi = \gamma_1 \sqrt{1 - \cos^2 \psi}, \quad (3.35)$$

где γ_1 равно единице, если $(\mathbf{D}_0 \mathbf{T} \mathbf{T}_\delta) > 0$, и минус единице в противном случае. Умножая векторно \mathbf{D}_0 на \mathbf{T} , а затем скалярно на \mathbf{T}_δ , убедимся, что условие положительности смешанного произведения можно заменить на

$$\gamma [\mathbf{P} \mathbf{K} - (\mathbf{D}_0 \mathbf{P})(\mathbf{D}_0 \mathbf{K})] > 0.$$

Радиус малого круга равен радиусу кривизны, так что в согласии с (2.55) $1/c = \sqrt{1 - p^2}$. Получаем выражения для связанных с кривизной величин:

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 - p^2}}, \quad \cos \beta = \sqrt{1 - p^2}, \quad \sin \beta = p, \quad \varkappa = \gamma \frac{p}{\sqrt{1 - p^2}}. \quad (3.36)$$

3.6 Методические ошибки прямых методов определения орбит небесных тел

Метод ПВД и метод Лапласа определяют орбиту небесного тела на основании дифференциальных уравнений его движения и некоторой совокупности наблюдательных данных. Часть этих данных

доставляют позиционные наблюдения — это массивы $\{\alpha(\tau_j), \delta(\tau_j)\}$ топоцентрических сферических координат небесного тела. Однако требуемые дифференциальные параметры пока еще не могут непосредственно наблюдаться с необходимой точностью: величины $\dot{\alpha}, \dot{\delta}, \ddot{\alpha}, \ddot{\delta}, \dot{\mu}, \dot{\psi}, \dot{\mu}, \kappa$ или \dot{D}_i, \ddot{D}_i вычисляются по результатам математической обработки вышеуказанных массивов координат. Та или иная процедура аппроксимации результатов позиционных наблюдений небесного тела с целью получения ненаблюдаемых величин — первых и вторых производных сферических координат или направляющих косинусов — приводит к той или иной методической ошибке в вычисляемых параметрах, что, в свою очередь, вызовет ошибки в определяемых прямыми методами элементами кеплеровых орбит. Этот аспект математической аппроксимации координат или направляющих косинусов с целью получения дифференциальных параметров движения мы и будем понимать под термином „методическая ошибка первого типа“.

Вопрос о применении тех или иных математических процедур для аппроксимации плотных рядов сферических координат небесного тела по аргументу времени вместе с первой и второй их производными — это актуальный и непростой вопрос в проблеме определения орбит. В начале наших исследований [34, 5] для этой цели использовались полиномы по степеням времени для представления направляющих косинусов $\{D_{ij}\}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, m$, где m — число наблюдений. Коэффициенты такого представления вычислялись по методу наименьших квадратов без учета уравнений связи (2.45). Дифференцирование полученных полиномов по времени давало необходимые для решения задачи производные направляющих косинусов \dot{D}_j, \ddot{D}_j в заданный момент времени. Позднее В.Б.Титовым была сделана попытка использовать для аппроксимации наблюдательных данных в этой задаче полиномы Чебышева [48], а М.Г.Бер и С.М.Полешиков применили здесь сплайн-интерполяцию [25]. Вышеописанный метод учета связей (2.45) пока не опробован на практике.

Под методической ошибкой второго типа будем иметь ввиду ту, которая возникает при использовании в уравнениях (3.2) и (3.9) закона невозмущенного движения. Справедливость применения этих формул на коротких дугах проверена на практике и не вызывает сомнений, хотя можно использовать и выражения для возмущенного

движения небесного тела, действуя последовательными приближениями.

Правильное применение прямых методов предполагает, что влияние методических ошибок на определяемые элементы орбит тщательно исследовано и выработаны практические рекомендации относительно степени аппроксимирующего сферические координаты полинома, длины дуги наблюдений и распределения наблюдений на этой дуге. Одним из возможных методов таких исследований является математическое моделирование и численный эксперимент, о которых речь пойдет ниже.

3.7 Применение математического моделирования для исследования влияния методических ошибок

Обработка реальных позиционных наблюдений небесных тел поставила вопрос о влиянии на определяемые элементы орбит случайных ошибок наблюдений и систематических (методических) ошибок, которые возникают вследствие применения тех или иных процедур для вычисления на заданный момент положения объекта и величин, характеризующих изменение этого положения со временем.

Влияние случайных ошибок можно было увидеть в первом приближении, например, из анализа результатов, полученных на один и тот же момент времени из обработки различных по точности рядов фотографических наблюдений, примерно одинаково распределенных на одной и той же геоцентрической дуге, и при использовании в этих условиях одной и той же полиномиальной аппроксимации для вычисления первых и вторых производных. Плотные и равномерные ряды наблюдений, выполненные и обработанные на одной обсерватории, дают орбитальные элементы, более близкие к эталонным, чем в случае использования смешанных наблюдений разных обсерваторий. Дело в том, что ряд наблюдений одной обсерватории, как правило, более равноточен, чем ряд, который образован соединением результатов наблюдений, полученных на разных телескопах и обработанных (в смысле измерений и астрометрической редукции) по-разному.

Для оценки влияния методической ошибки первого типа было

выполнено математическое моделирование, схема которого представлена на рис. 3.2. Не будем подробно останавливаться на ней, она достаточно наглядна.

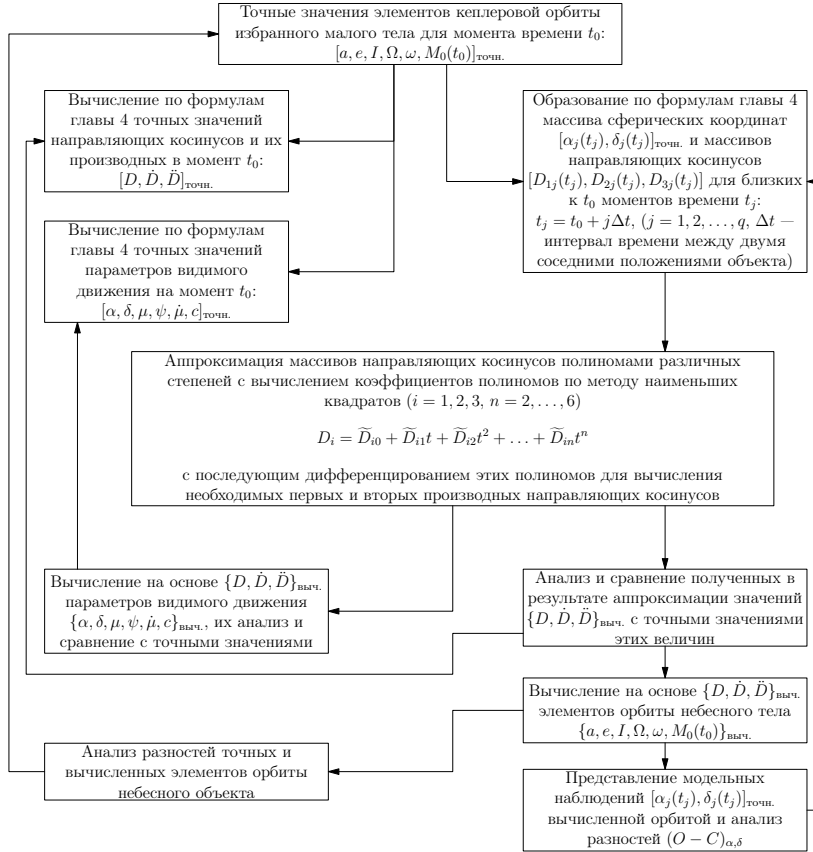


Рис. 3.2: Схема математического моделирования.

Данная схема предоставляла широкие возможности для исследований, так как позволяла варьировать для каждого объекта длину геоцентрической дуги, число положений на этой дуге, равномерность распределения этих положений на избранной дуге и степень полинома в задаче аппроксимации наблюдений. Моделирование выполнялось на базе пакета программ, о котором говорилось ранее.

На данном этапе исследований шумовая составляющая в массивы координат $\{\alpha_j(\tau_j), \delta_j(\tau_j)\}$ не вносилась.

Результаты, полученные в процессе моделирования движения различных небесных тел, обширны и здесь не приводятся. Анализ полученного материала позволяет сделать следующие выводы.

1. Методическая ошибка первого типа является самым важным фактором при определении орбит прямыми методами.
2. Методические ошибки первого типа растут с увеличением степени полинома, длины дуги наблюдений и в связи с отступлением от равномерности распределения наблюдений на рассматриваемой дуге.
3. Методические ошибки первого типа, как правило, минимальны при 2-й степени аппроксимирующего полинома на короткой и плотной дуге наблюдений.
4. Увеличение степени аппроксимирующего полинома при одновременном возрастании длины дуги наблюдений не приводит к уменьшению методической ошибки первого типа. К уменьшению таковой ведет увеличение плотности наблюдений при уменьшении длины дуги до некоторого предела.
5. При постоянной длине дуги выполнение условий связи с увеличением степени полинома улучшается, но при этом сами значения производных \dot{D}_i, \ddot{D}_i все более и более отклоняются от истинных („точных“).
6. С ростом геодезической кривизны влияние методической ошибки первого типа на определяемые элементы орбит уменьшается.
7. При определении орбит прямыми методами точность получаемых из позиционных наблюдений геоцентрических расстояний до небесного тела вполне достаточна, чтобы рекомендовать использовать вычисляемые расстояния для редукции позиционных наблюдений, т.е. для приведения наблюденных топоцентрических положений к центру Земли.

Желательно продолжить исследование методических ошибок прямых методов определения орбит по схеме, приведенной выше, с

учетом влияния случайных ошибок наблюдений, вносимых по тому или другому способу в массивы моделированных положений небесного тела.

3.8 Возможность определения ПВД посредством компьютерной обработки последовательных ПЗС-кадров с изображениями небесных тел

В настоящее время оптико-электронные методы позиционных наблюдений малых тел Солнечной системы с помощью ПЗС-камер и все более совершенные средства их компьютерной обработки вселяют надежду, что недалеко то время, когда параметры видимого движения можно будет определять непосредственно из анализа самих ПЗС-кадров, а не только по результатам статистической обработки рядов сферических координат.

Уже сейчас существующие программные системы обработки ПЗС-изображений дают возможность „объединять“ несколько последовательных ПЗС-кадров одной и той же области неба в один кадр, в котором воспроизводится конфигурация опорных звезд, а движущийся среди них объект дает цепочку положений, соответствующих моментам времени экспозиции каждого кадра. Такой процесс давно применяется для обнаружения движущихся среди звезд небесных тел, например, при поиске тел пояса Койпера. Впервые это было использовано в работах группы Тома Герелса [63], которая с середины 1980-х годов активно наблюдает астероиды, сближающиеся с Землей, в Аризонском университете США. Однако результатами их высокоточных ПЗС-наблюдений являются только вычисленные положения обнаруженных объектов и их блеск. Эти данные немедленно передаются в Международный центр малых планет для отождествления и контроля.

Нам представляется, что этого недостаточно и можно получить дополнительную информацию о движении небесного тела. Анализ „объединенных“ ПЗС-кадров, содержащих движущийся среди звезд объект, может быть более полным. В частности, измерения положений в системе пиксельных координат, соотнесенные с моментами времени, позволяют напрямую вычислить угловую скорость движения объекта, а иногда и его угловое ускорение, если не точно,

то хотя бы оценочно, что важно для заключения о характере орбитального движения зафиксированного небесного тела — круговое оно или эллиптическое.

Можно поставить вопрос и о вычислении кривизны наблюдаемого участка видимой траектории непосредственно по результатам измерений в системе прямоугольных пиксельных координат. Наибольший успех такой подход может принести в случае, когда видимое движение небесного тела происходит в окрестности особых точек — точек смены направления видимого движения с прямого на обратное и наоборот. В этих случаях видимая угловая скорость небесного тела минимальна, и тогда по формуле (2.38) кривизна максимальна. Поэтому один „сводный“ ПЗС-кадр, составленный из серии наблюдаемых, которые были получены на интервале нескольких часов, может сделать „зримой“ кривизну видимой траектории. Когда-то, во времена фотографических наблюдений ИСЗ с помощью широкоугольных аэрофотоаппаратов НАФА с полем зрения $30 \times 50^\circ$, продолжительный ряд положений восходящего над горизонтом или заходящего за горизонт спутника непосредственно на фотографии показывал кривизну своей траектории.

Заметим, что при ПЗС-наблюдениях малых планет такой подход был опробован сотрудником ГАО РАН И.С.Измайловым по результатам наблюдений, выполненных С.И.Барабановым (ИНАСАН). Дальнейшее продолжение этой работы было затруднено лишь малостью поля зрения $26''$ рефрактора Пулковской обсерватории, использовавшего камеру ST-6, для которой оно составляет всего лишь $2.6' \times 2.8'$.

Таким образом, перспективы получения ПВД непосредственно из ПЗС-наблюдений при компьютерной обработке серии близких по времени одноименных кадров ждут своей реализации в ближайшем будущем.

3.9 Учет возмущений на этапе определения первоначальной орбиты

Метод Гаусса и его аналоги существенно используют свойства невозмущенного движения. Учет возмущений на этапе определения первоначальной орбиты крайне затруднителен, если вообще возможен. Напротив, прямые методы используют лишь дифференциаль-

ные уравнения движения, в которых легко учесть возмущающие ускорения. Достаточно (3.9) заменить на

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\kappa^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}. \quad (3.37)$$

В методе Лапласа первые два уравнения (3.10) не меняются, а в третьем справа появляется слагаемое \mathbf{F} :

$$\left(\ddot{\mathbf{D}} + \frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{D} \right) d + 2\dot{\mathbf{D}} \dot{d} + \mathbf{D} \ddot{d} = -\frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{g} - (\ddot{\mathbf{g}} - \mathbf{F}).$$

Аналогично в методе ПВД модифицируется только третье уравнение (3.11):

$$\left(\ddot{d} - \mu^2 d + \frac{\kappa^2}{r^3} d \right) \mathbf{D} + (\dot{\mu} d + 2\mu \dot{d}) \mathbf{T} + \kappa \mu^2 d \mathbf{M} = -\frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{g} - (\ddot{\mathbf{g}} - \mathbf{F}).$$

Решение уравнений в обоих случаях осуществляется итерациями. Сначала надо решить систему (3.10) или (3.11), чему посвящены следующие две главы книги. Затем в выражение для \mathbf{F} следует подставить полученное решение для $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$. Таким образом, \mathbf{F} становится известным вектором. На втором шаге опять решаются уравнения (3.10) или (3.11) при замене в них $\ddot{\mathbf{g}}$ на $\ddot{\mathbf{g}} - \mathbf{F}$. Процесс можно продолжать. При малом возмущающем ускорении он быстро сходится.

Задачи к главе 3

Задача 3.1. Пусть $x_i(t)$ — компоненты зависящего от времени t единичного вектора в пространстве \mathbb{R}^s . Представим их в виде полинома степени N :

$$x_i = \sum_{n=0}^N A_{in} t^n, \quad i = 1, \dots, s. \quad (3.38)$$

Показать, что выполняются тождества

$$\sum_{i=1}^s A_{i0}^2 = 1, \quad \sum_{i=1}^s \sum_{m=0}^n A_{im} A_{i,n-m} = 0 \quad \text{при} \quad n \geq 1. \quad (3.39)$$

В частности, для $1 \leq n \leq 3$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s A_{i0} A_{i1} &= 0, & \sum_{i=1}^s (2A_{i0} A_{i2} + A_{i1}^2) &= 0, \\ \sum_{i=1}^s (A_{i0} A_{i3} + A_{i1} A_{i2}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Задача 3.2. Пусть $x_i(t)$ — представление (3.38) близкого к единичному вектора. Положим

$$B_{in} = A_{in} + \varepsilon_{in}. \quad (3.41)$$

Подобрать ε_{in} так, чтобы, во-первых, замена A_{in} на B_{in} приводила к единичному вектору и, во-вторых, ε_{in} были бы минимальны:

$$\sum_{i=1}^s \varepsilon_{in}^2 = \min \quad \text{для каждого} \quad n \geq 0. \quad (3.42)$$

Точнее, задача на минимум решается для $n = 0$, затем для $n = 1$ при уже найденных ε_{i0} , затем для $n = 2$ при уже найденных $\varepsilon_{i0}, \varepsilon_{i1}$ и т.д.

Ответ:

$$\varepsilon_{i0} = \left[\left(\sum_{i=1}^s A_{i0}^2 \right)^{-1/2} - 1 \right] A_{i0}, \quad B_{i0} = \left(\sum_{i=1}^s A_{i0}^2 \right)^{-1/2} A_{i0},$$

а при $n \geq 1$

$$\varepsilon_{in} = -B_{i0} \left(\sum_{i=1}^s B_{i0} A_{in} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{m=1}^{n-1} B_{im} B_{i,n-m} \right).$$

Схема решения при $n = 0$. Нахождение ε_{i0} сводится к задаче на условный экстремум. Требуется найти наименьшее значение функции (3.42) при условии

$$\sum_{i=1}^s (A_{i0} + \varepsilon_{i0})^2 - 1 = 0. \quad (3.43)$$

По методу множителей Лагранжа образуем функцию

$$F(\varepsilon_{i0}, \lambda) = \sum_{i=1}^s \varepsilon_{i0}^2 - \lambda \left[\sum_{i=1}^s (A_{i0} + \varepsilon_{i0})^2 - 1 \right].$$

Приравнявая нулю производную по ε_{i0} , получим

$$\varepsilon_{i0} = \varepsilon A_{i0} \quad \text{при} \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{1 - \lambda}.$$

Подставляя в (3.43), получим

$$\varepsilon = \left(\sum_{i=1}^s A_{i0}^2 \right)^{-1/2} - 1.$$

Схема решения при $n \geq 1$ аналогична. Считаем величины $B_{i0}, B_{i1}, \dots, B_{i,n-1}$ уже определенными. образуем функцию

$$F(\varepsilon_{in}, \lambda) = \sum_{i=1}^s \varepsilon_{in}^2 - \lambda \left[\sum_{i=1}^s 2B_{i0}(A_{in} + \varepsilon_{in}) + \sum_{i=1}^s \sum_{m=1}^{n-1} B_{im} B_{i,n-m} \right].$$

Далее,

$$\varepsilon_{in} = \lambda B_{i0}, \quad \lambda = - \sum_{i=1}^s B_{i0} A_{in} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{m=1}^{n-1} B_{im} B_{i,n-m}.$$

Задача 3.3. Найти координаты вектор-столбцов, составляющих матрицу (3.26).

Задача 3.4. Пусть плоскость соприкасающегося малого круга почти параллельна оси z . Коэффициенты q_1, q_2, q в уравнении (3.19) будут весьма велики, что ведет к потере точности. Представим уравнение плоскости в виде

$$q_1 x_1 - x_2 + q_3 x_3 = q, \quad (3.44)$$

где мы не стали вводить новых обозначений для величин q с индексами и без. Показать, что система условных уравнений примет вид

$$D_{1j} q_1 + D_{3j} q_3 - q = D_{2j}. \quad (3.45)$$

Задача 3.5. Показать, что в условиях задачи 3.4 соотношения (3.21 – 3.24) следует заменить на

$$P_1 = \frac{q_1 \operatorname{sign} q}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_3^2}}, \quad P_2 = \frac{-\operatorname{sign} q}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_3^2}}, \quad P_3 = \frac{q_3 \operatorname{sign} q}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_3^2}},$$

$$p = \frac{|q|}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_3^2}}, \quad (3.46)$$

$$\mathbf{p} = \left(\frac{q_1 q}{1 + q_1^2 + q_3^2}, \frac{-q}{1 + q_1^2 + q_3^2}, \frac{q_3 q}{1 + q_1^2 + q_3^2} \right), \quad (3.47)$$

$$P_1 = \frac{\pm q_1}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_3^2}}, \quad P_2 = \frac{\mp 1}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_3^2}}, \quad P_3 = \frac{\pm q_3}{\sqrt{1 + q_1^2 + q_3^2}},$$

$$p = 0. \quad (3.48)$$

Верхний знак берется, если

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{1m} & D_{2m} & D_{3m} \\ q_1 & -1 & q_3 \end{vmatrix} > 0. \quad (3.49)$$

Задача 3.6. Если плоскость соприкасающегося малого круга почти перпендикулярна оси x_1 , то уравнение этой плоскости следует искать в виде

$$-x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3 = q. \quad (3.50)$$

Показать, что соотношения (3.20 – 3.24) следует заменить на

$$D_{2j} q_2 + D_{3j} q_3 - q = D_{1j}, \quad (3.51)$$

$$P_1 = \frac{-\operatorname{sign} q}{\sqrt{1 + q_2^2 + q_3^2}}, \quad P_2 = \frac{q_2 \operatorname{sign} q}{\sqrt{1 + q_2^2 + q_3^2}}, \quad P_3 = \frac{q_3 \operatorname{sign} q}{\sqrt{1 + q_2^2 + q_3^2}},$$

$$p = \frac{|q|}{\sqrt{1 + q_2^2 + q_3^2}}, \quad (3.52)$$

$$\mathbf{p} = \left(\frac{-q}{1 + q_2^2 + q_3^2}, \frac{q_2 q}{1 + q_2^2 + q_3^2}, \frac{q_3 q}{1 + q_2^2 + q_3^2} \right), \quad (3.53)$$

$$P_1 = \frac{\mp 1}{\sqrt{1 + q_2^2 + q_3^2}}, \quad P_2 = \frac{\pm q_2}{\sqrt{1 + q_2^2 + q_3^2}}, \quad P_3 = \frac{\pm q_3}{\sqrt{1 + q_2^2 + q_3^2}},$$

$$p = 0, \tag{3.54}$$

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} \\ D_{1m} & D_{2m} & D_{3m} \\ -1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} > 0. \tag{3.55}$$

Глава 4

Решение уравнений

В этой главе мы опишем способы решения уравнений (3.10) и (3.11). Приведем их снова. Уравнения метода Лапласа

$$\begin{aligned}\mathbf{D} d &= \mathbf{r} - \mathbf{g}, \\ \dot{\mathbf{D}} d + \mathbf{D} \dot{d} &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{g}}, \\ \left(\ddot{\mathbf{D}} + \frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{D} \right) d + 2\dot{\mathbf{D}} \dot{d} + \mathbf{D} \ddot{d} &= -\frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{g}}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Уравнения метода ПВД

$$\begin{aligned}d \mathbf{D} &= \mathbf{r} - \mathbf{g}, \\ \dot{d} \mathbf{D} + \mu d \mathbf{T} &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{g}}, \\ \left(\ddot{d} - \mu^2 d + \frac{\kappa^2}{r^3} d \right) \mathbf{D} + (\mu \dot{d} + 2\mu \dot{d}) \mathbf{T} + \kappa \mu^2 d \mathbf{M} &= -\frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{g}}.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Основная задача — получение значений векторов \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$ в фиксированный момент времени (обычно это середина интервала наблюдений). По этим данным шесть кеплеровых элементов орбиты находятся по простым формулам — см., например, [47, 50]. Входящие в уравнения величины \mathbf{g} , $\dot{\mathbf{g}}$ и $\ddot{\mathbf{g}}$ всегда считаем известными.

4.1 Определение орбиты при наличии совместных угловых и дальномерных наблюдений

Разберем сначала простейший случай, когда в некоторый момент времени \bar{t} нам известны сферические координаты α, δ , их пер-

вые производные $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$, а также расстояние d и скорость его изменения \dot{d} . В реальности направления, расстояния и, возможно, скорости определяются разными инструментами. Основная трудность состоит в получении величин α, δ, d и их первых производных для одного и того же момента позиционных и дальномерных наблюдений. Она легко снимается применением метода математической синхронизации, разработанным в Пулковской обсерватории еще в эпоху массовых фотографических наблюдений ИСЗ. Главное, чтобы эти наблюдения имели плотные ряды положений и расстояний на одном и том же временном интервале, допускающем выбор общего момента для позиционных и дальномерных наблюдений.

Решение же уравнений в рассматриваемом случае тривиально. Из первых двух уравнений (4.1) следует

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{D}d, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{g}} + \dot{d}\mathbf{D} + d\dot{\mathbf{D}}. \quad (4.3)$$

Аналогично, из первых двух уравнений (4.2) следует

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{D}d, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{g}} + \dot{d}\mathbf{D} + d\mu\mathbf{T}. \quad (4.4)$$

Алгоритмы определения $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}$ и μ, \mathbf{T} приведены в §3.5.

4.2 Алгоритм решения системы уравнений метода Лапласа

Пусть нам известны векторы $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}$. Из первого уравнения (4.1), перенося \mathbf{g} влево и возводя в квадрат, получим

$$r^2 = C_0 + 2C_1d + d^2 \quad \text{при} \quad C_0 = g^2, \quad C_1 = \mathbf{g}\mathbf{D}. \quad (4.5)$$

Умножим обе части третьего уравнения (4.1) скалярно на $\mathbf{D} \times \dot{\mathbf{D}}$. Поскольку смешанное произведение с двумя одинаковыми векторами равно нулю, получим после преобразований

$$Cd = C_2 + C_3r^{-3} \quad (4.6)$$

при

$$C = (\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{D}}), \quad C_2 = -(\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{g}}), \quad C_3 = -\kappa^2(\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\mathbf{g}). \quad (4.7)$$

Соотношения (4.5, 4.6) представляют собой два алгебраических уравнения

$$r^2 = C_0 + 2C_1d + d^2, \quad Cd = C_2 + C_3r^{-3} \quad (4.8)$$

с двумя неизвестными r, d . Впервые эти уравнения выведены Лапласом.

Рассмотрим случай общего положения, когда

$$C = (\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{D}}) \neq 0. \quad (4.9)$$

Вырожденным случаям мы посвятим следующую главу.

При выполнении (4.9) система (4.8) сводится к уравнению восьмой степени, за которое можно принять любое из соотношений

$$C^2r^8 + a_6r^6 + a_3r^3 + a_0 = 0, \quad (4.10)$$

$$C^2d^8 + b_7d^7 + b_6d^6 + \dots + b_0 = 0. \quad (4.11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} -a_6 &= C^2C_0 + 2CC_1C_2 + C_2^2, \quad -a_3 = 2(C_2 + CC_1)C_3, \quad -a_0 = C_3^2, \\ b_7 &= 2C(3CC_1 - C_2), \\ b_6 &= 3C^2C_0 + 12C^2C_1^2 - 12CC_1C_2 + C_2^2, \\ b_5 &= 2(6C^2C_0C_1 + 4C^2C_1^3 - 3CC_0C_2 - 12CC_1^2C_2 + 3C_1C_2^2), \\ b_4 &= 3C^2C_0^2 + 12C^2C_0C_1^2 - 24CC_0C_1C_2 - 16CC_1^3C_2 + 3C_0C_2^2 + \\ &\quad + 12C_1^2C_2^2, \\ b_3 &= 2(3C^2C_0^2C_1 - 3CC_0^2C_2 - 12CC_0C_1^2C_2 + 6C_0C_1C_2^2 + 4C_1^3C_2^2), \\ b_2 &= C^2C_0^3 - 12CC_0^2C_1C_2 + 3C_0^2C_2 + 12C_0C_1^2C_2^2, \\ b_1 &= 2(-CC_0^3C_2 + 3C_0^2C_1C_2^2), \\ b_0 &= C_0^3C_2^2 - C_3^2. \end{aligned}$$

Для гелиоцентрического движения коэффициент b_0 практически не отличается от нуля. В самом деле, представим его в виде $b_0 = (C_0^{3/2}C_2 - C_3)(C_0^{3/2}C_2 + C_3)$, причем

$$C_0^{3/2}C_2 + C_3 = -g^3(\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{g}}) - \kappa^2(\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\mathbf{g}).$$

Считая, что центр Земли описывает кеплеров эллипс вокруг Солнца, получим для вектора \mathbf{g} уравнение $\ddot{\mathbf{g}} = -\kappa^2g^{-3}\mathbf{g}$, откуда следует

$b_0 = 0$. Из-за возмущений в движении Земли b_0 может слегка отличаться от нуля.

Таким образом, уравнение (4.11) имеет корень (посторонний) $d \approx 0$. Его происхождение понятно: центр Земли описывает кеплерову траекторию, удовлетворяющую наблюдениям. В частности, уравнение (4.10) имеет корень $r \approx g$.

Указанные посторонние корни служат только для контроля. Не следует использовать их, скажем, для понижения порядка уравнения. Это связано с тем, что вместо кеплеровских на практике гораздо лучше использовать высокоточные положения, скорости и ускорения Земли в известные моменты времени. Эти величины рассчитываются в астрономических учреждениях, в которых реализуется численная теория движения планет Солнечной системы. В Лаборатории реактивного движения (США) разработана серия астрономических эфемерид больших планет и Луны на период с 1600 г. по 2169 г. Последние эфемериды серии имеют название DE424. В Институте прикладной астрономии РАН разрабатывается независимо серия эфемерид, последняя версия которых называется ЕРМ2010. Ускорения гелиоцентрического движения Земли можно получить для заданного момента из анализа изменения скоростей в указанных теориях движения. Как показывает имеющийся у нас опыт, для надежного решения задачи необходимо обеспечить точность ускорений не хуже 0.1%. Пример влияния ошибок в компонентах ускорения Земли на вычисляемые элементы орбиты приведен в работе [11].

Те же посторонние корни появляются в случае относительного геоцентрического движения.

Для случая наземных наблюдений ИСЗ указанных посторонних корней нет. Обсерватория вместе с вращающейся Землей описывает некеплеровскую окружность, как отмечалось в §3.2.

Опишем алгоритм определения r, d .

Первый способ. Находим r , решая уравнение (4.10). Затем получаем d , используя второе уравнение (4.8):

$$d = \frac{C_2 r^3 + C_3}{C r^3}. \quad (4.12)$$

Второй способ. Находим d , решая уравнение (4.11). Затем получаем r , используя первое уравнение (4.8):

$$r = \sqrt{C_0 + 2C_1 d + d^2}. \quad (4.13)$$

При программировании задачи лучше использовать оба описанных способа.

Замечание. Уравнение восьмой степени может иметь до восьми вещественных корней. Из них оставляем только те, для которых $r > 0, d > 0$. Таких корней не может быть больше трех — см. задачи 4.7 – 4.9. Более того, мы можем отбросить заведомо лишние решения. Для астероидов, например, r должно быть порядка нескольких астрономических единиц. Для ИСЗ d должно лежать между сотней километров и сотней мегаметров. Обычно получается одно приемлемое решение, но иногда их все же несколько, и нужны дополнительные наблюдения для выбора реальной орбиты.

Дальнейший алгоритм определения орбиты прост. Умножая третье уравнение (4.1) скалярно на $\mathbf{D} \times \dot{\mathbf{D}}$, найдем \dot{d} :

$$\dot{d} = \frac{1}{2C} \left[\frac{\kappa^2}{r^3} (\mathbf{D}\ddot{\mathbf{D}}\mathbf{g}) + (\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{g}}) \right]. \quad (4.14)$$

Теперь из первого и второго уравнений (4.1)

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{D}d, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{g}} + \dot{\mathbf{D}}d + \mathbf{D}\dot{d}. \quad (4.15)$$

Формулы (4.15) полностью решают задачу.

4.3 Алгоритм решения системы уравнений метода ПВД

Обратимся к уравнениям метода ПВД (4.2). Теперь известны векторы $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{M}, \mathbf{g}, \ddot{\mathbf{g}}$ и скаляры $\mu, \dot{\mu}, \varkappa$. Первые уравнения (4.1) и (4.2) совпадают, поэтому соотношение (4.5) остается справедливым при тех же значениях C_0, C_1 . Умножим обе части третьего уравнения (4.2) скалярно на $\mathbf{T} \times \mathbf{D}$. Поскольку смешанное произведение с двумя одинаковыми векторами равно нулю, получим после преобразований уравнение (4.6) при

$$C = \varkappa\mu^2, \quad C_2 = (\mathbf{T}\mathbf{D}\ddot{\mathbf{g}}), \quad C_3 = \kappa^2(\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{g}). \quad (4.16)$$

Мы пришли к тем же уравнениям Лапласа (4.8), выражения для коэффициентов C, C_2, C_3 которых несколько изменились. Обратим внимание, что коэффициенты (4.7) в методе Лапласа равны коэффициентам (4.16) в методе ПВД, умноженным на μ . Сокращение на малый множитель — преимущество метода ПВД.

Теперь условие невырожденности (4.9) принимает форму

$$\kappa\mu^2 \neq 0. \quad (4.17)$$

Если (4.17) выполнено, дальнейший алгоритм решения системы (4.8) практически совпадает с описанным в предыдущем параграфе. Нужно лишь соотношения (4.14, 4.15) заменить на

$$\dot{d} = -\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\kappa^2}{r^3} (\mathbf{MDg}) + (\mathbf{MD}\ddot{\mathbf{g}}) + \dot{\mu}d \right], \quad (4.18)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + d\mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{g}} + \mu d\mathbf{T} + \dot{d}\mathbf{D}. \quad (4.19)$$

Обратим внимание, что в методе Лапласа формула (4.14) содержит в знаменателе $\kappa\mu^2$, а в методе ПВД формула (4.18) содержит в знаменателе только μ .

4.4 Круговая орбита

Как уже отмечалось, необходимые для вычисления орбиты параметры второго порядка ($\ddot{\mathbf{D}}, \dot{\mu}, \kappa$) на короткой дуге определяются с недостаточной точностью. Поэтому имеет смысл задача определения круговой орбиты, не требующей их знания. Между тем околокруговые движения весьма распространены как среди естественных, так и среди искусственных небесных тел.

Предположим, что небесное тело описывает круговую орбиту $r = \text{const}$. Связь (4.5) между r и d остается в силе. Для получения еще одной связи перепишем (4.5) в виде

$$r^2 = (\mathbf{g} + \mathbf{D}d)^2. \quad (4.20)$$

Введем обозначения

$$c_1 = \mathbf{D}\dot{\mathbf{g}}, \quad c_2 = \dot{\mathbf{D}}\mathbf{g}, \quad c_3 = \mathbf{g}\dot{\mathbf{g}}, \quad c_4 = \dot{\mathbf{D}}^2, \quad c_5 = \dot{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{g}}, \quad c_6 = \dot{\mathbf{g}}^2.$$

Продифференцируем (4.20) с учетом $\dot{r} = 0$:

$$(C_1 + d)\dot{d} + (c_1 + c_2)d + c_3 = 0. \quad (4.21)$$

Во втором уравнении (4.1) перенесем $\dot{\mathbf{g}}$ налево и возведем обе части в квадрат. На круговой орбите

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{\kappa^2}{r}, \quad (4.22)$$

поэтому

$$\kappa^2/r = c_6 + 2c_5d + c_4d^2 + 2c_1\dot{d} + \dot{d}^2. \quad (4.23)$$

Умножим обе части (4.23) на $(C_1 + d)^2$ и выразим \dot{d} через d согласно (4.21):

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2(C_1 + d)^2}{r} &= (c_6 + 2c_5d + c_4d^2)(C_1 + d)^2 + [(c_1 + c_2)d + c_3]^2 - \\ &\quad - 2c_1(C_1 + d)[(c_1 + c_2)d + c_3] = c_4d^4 + \bar{c}_3d^3 + \dots + \bar{c}_0, \end{aligned}$$

где

$$\bar{c}_3 = 2(C_1c_4 + c_5), \quad \bar{c}_1 = 2[C_1^2c_5 + C_1(-c_1^2 - c_1c_2 + c_6) + c_2c_3],$$

$$\bar{c}_2 = C_1^2c_4 + 4C_1c_5 - c_1^2 + c_2^2 + c_6, \quad \bar{c}_0 = C_1^2c_6 - 2C_1c_1c_3 + c_3^2.$$

Квадрат левой части в силу (4.5) равен $\kappa^4(C_1 + d)^4/(C_0 + 2C_1d + d^2)$.

Окончательно, получаем уравнение десятой степени с одной неизвестной d :

$$c_4^2d^{10} + h_9d^9 + \dots + h_0 = 0, \quad (4.24)$$

где

$$\begin{aligned} h_9 &= 2C_1c_4^2 + 2\bar{c}_3c_4, \\ h_8 &= C_0c_4^2 + 4C_1\bar{c}_3c_4 + c_4^2, \\ h_7 &= 2C_0\bar{c}_3c_4 + 2C_1(\bar{c}_3^2 + 2\bar{c}_2c_4) + 2(\bar{c}_1c_4 + \bar{c}_2\bar{c}_3), \\ h_6 &= C_0(\bar{c}_3^2 + 2\bar{c}_2c_4) + 4C_1(\bar{c}_1c_4 + \bar{c}_2\bar{c}_3) + \bar{c}_2^2 + 2\bar{c}_0c_4 + 2\bar{c}_1\bar{c}_3, \\ h_5 &= 2C_0(\bar{c}_1c_4 + \bar{c}_2\bar{c}_3) + 2C_1(\bar{c}_2^2 + 2\bar{c}_0c_4 + 2\bar{c}_1\bar{c}_3) + 2(\bar{c}_0\bar{c}_3 + \bar{c}_1\bar{c}_2), \\ h_4 &= C_0(\bar{c}_2^2 + 2\bar{c}_0c_4 + 2\bar{c}_1\bar{c}_3) + 4C_1(\bar{c}_0\bar{c}_3 + \bar{c}_1\bar{c}_2) + \bar{c}_1^2 + 2\bar{c}_0\bar{c}_2 - \kappa^4, \\ h_3 &= 2C_0(\bar{c}_0\bar{c}_3 + \bar{c}_1\bar{c}_2) + 2C_1(\bar{c}_1^2 + 2\bar{c}_0\bar{c}_2) + 2\bar{c}_0\bar{c}_1 - 4C_1\kappa^4, \\ h_2 &= C_0(\bar{c}_1^2 + 2\bar{c}_0\bar{c}_2) + 4C_1\bar{c}_0\bar{c}_1 + \bar{c}_0^2 - 6C_1^2\kappa^4, \\ h_1 &= 2C_0\bar{c}_0\bar{c}_1 + 2C_1\bar{c}_0^2 - 4C_1^3\kappa^4, \\ h_0 &= C_0\bar{c}_0^2 - C_1^4\kappa^4. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Итак, задача сведена к решению уравнения десятой степени. По поводу возможного существования посторонних корней см. замечание на с. 93. Может встретиться и противоположная ситуация отсутствия корней, лежащих в допустимых границах (расстояние в

метр или парсек, например, не годится для астероида, а расстояние в метр или астрономическую единицу — для ИСЗ). Это означает, что движение не может быть представлено круговой орбитой.

После нахождения d алгоритм определения орбиты тривиален. В силу (4.21)

$$\dot{d} = -\frac{(c_1 + c_2)d + c_3}{C_1 + d}, \quad (4.26)$$

если

$$C_1 + d \neq 0. \quad (4.27)$$

Теперь первые два соотношения (4.1) дают искомые $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{D} d, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{g}} + \dot{\mathbf{D}} d + \mathbf{D} \dot{d}. \quad (4.28)$$

Задача определения круговой орбиты решена при выполнении условия невырожденности (4.27).

Определение круговой орбиты по методу ПВД осуществляется по вышеописанному алгоритму, в котором коэффициенты C_0, C_1 имеют те же значения, а три из коэффициентов c_k выражаются по модифицированным формулам:

$$c_2 = \mu \mathbf{T} \mathbf{g}, \quad c_4 = \mu^2, \quad c_5 = \mu \mathbf{T} \dot{\mathbf{g}}.$$

Расстояние d находится решением того же уравнения (4.24), а скорость его изменения \dot{d} находится по той же формуле (4.26). Формулы (4.28) для положения и скорости следует заменить на

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + d \mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{g}} + \mu d \mathbf{T} + \dot{d} \mathbf{D}. \quad (4.29)$$

4.5 Параболическая орбита

4.5.1 Параболическая орбита в окрестности перигелия

Если небесное тело движется по параболической орбите, то ее эксцентриситет равен единице, а квадрат гелиоцентрической скорости равен

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2\kappa^2}{r}. \quad (4.30)$$

Алгоритм вычисления параболической орбиты можно свести к алгоритму вычисления круговой, если принять допущение, что при

движении кометы в области, близкой к Солнцу и Земле, изменение ее гелиоцентрического радиуса r пренебрежимо мало и практически равно нулю на малых интервалах времени. Это предположение строго выполняется, когда комета проходит перигелий (и афелий, но кометы не открываются в окрестности афелия). Вблизи перигелия радиальная скорость \dot{r} мала. Предположение $\dot{r} = 0$ для только что открытого небесного тела довольно сильное, его обоснованность подлежит экспериментальной проверке, но в случаях, когда наблюдения ограничены одной ночью и не дают возможности определить ничего, кроме нормального места и параметров видимого движения первого порядка μ, ψ , можно попробовать применить такой подход.

Итак, предположим справедливость соотношений

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{2\kappa^2}{r}. \quad (4.31)$$

Остается в силе описанный в §4.4 алгоритм со следующими модификациями. Равенство (4.21) не изменится, тогда как в равенстве (4.23) левую часть следует умножить на 2, что равносильно замене κ^2 на $2\kappa^2$. Уравнение (4.24) сохраняет силу, надо только в определяющих h_k соотношениях (4.25) заменить κ^4 на $4\kappa^4$. После определения d находим \dot{d} по формуле (4.26). Наконец, положение и скорость определяются соотношениями (4.28), или (4.29).

4.5.2 Произвольная параболическая орбита

Первые два соотношения (4.1) или (4.2) представляют собой в скалярной форме шесть уравнений с восемью неизвестными: d, \dot{d} и по три компоненты векторов $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$. Условие параболичности дает еще одно уравнение, что недостаточно для определенности системы. Теоретически можно привлечь еще одно уравнение, связывающее один из параметров второго порядка $\dot{\mu}, \varkappa$ с неизвестными величинами. Но нам не удалось таким путем получить замкнутую и не слишком сложную систему уравнений. Применим метод последовательных приближений.

Предположим, что нам известны расстояния d, r . Опытный наблюдатель по виду кометы, ее собственному движению и положению на небе оценивает эти величины хотя бы с погрешностью в 50%. Напомним, что независимо лишь одно из расстояний, поскольку

$$r^2 = C_0 + 2C_1d + d^2, \quad d = -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - C_0 + r^2}. \quad (4.32)$$

Правая часть первой формулы положительна при всех d , поскольку $C_0 = g^2$, а C_1 представляет собой проекцию \mathbf{g} на направление вектора \mathbf{D} . Подкоренное выражение в (4.32) положительно при $r \geq g$. В противном случае оно положительно по крайней мере при небольших ошибках измерений. Вторая формула (4.32) дает два значения d . Чаще всего одно из них нереально (например, отрицательно), но могут встретиться случаи, когда надо принимать во внимание оба значения d .

Действуя далее, как при выводе формулы (4.23), придем к соотношению

$$d^2 + 2c_1 d + A = 0 \quad \text{при} \quad A = c_6 + 2c_5 d + c_4 d^2 - \frac{2\kappa^2}{r}, \quad (4.33)$$

откуда

$$d = -c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - A}. \quad (4.34)$$

Теперь третье соотношение (4.2) позволяет найти новое значение d . Достаточно умножить его скалярно на \mathbf{T} или \mathbf{M} в зависимости от того, какой из двух параметров второго порядка определяется из наблюдений точнее и хорошо отделен от нуля:

$$-\mu d = \frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{gT} + \ddot{\mathbf{g}}\mathbf{T} + 2\mu \dot{d}, \quad -\kappa \mu^2 d = \frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{gM} + \ddot{\mathbf{g}}\mathbf{M}. \quad (4.35)$$

Замечание. При работе со второй из формул (4.35) можно не использовать формулу (4.34).

Алгоритм решения может выглядеть следующим образом. Используя взятое первое приближение расстояний r, d , получаем по описанной процедуре новое значение d по одной из формул (4.35), а затем r согласно (4.5). Процесс продолжается с новыми значениями r, d . Как показывает наш опыт, обычно процесс сходится за несколько приближений, но случаи расходимости встречаются, к сожалению, не так уж редко. Отметим, что этот алгоритм был разработан и программно реализован в 2005 году в дипломной работе выпускника Кафедры небесной механики СПбГУ Андрея Бережного. В настоящее время выполняются исследования по практическому применению этого метода на основе определения реальных наблюдений комет.

4.6 Эллиптическая орбита небесного тела по ПВД первого порядка и априорной информации

Методы определения предварительных орбит небесных тел с использованием априорной информации появились к середине прошлого века и развивались во времена ограниченных наблюдательных возможностей, когда число наблюдающих обсерваторий было невелико, а получение даже трех положений объекта, требуемых для вычисления эллиптической орбиты по методу Гаусса, было трудным делом, особенно с учетом того обстоятельства, что эти три положения должны быть разнесены по времени и по топоцентрической дуге. Зачастую третье положение отнаблюдать вообще не удавалось из-за погодных условий. Прежде всего необходимо было не потерять объект после первого наблюдения, быстро найти его в последующие ночи, тем более что новый объект, как правило, имел слабый блеск. Ограниченными были также вычислительные и коммуникационные возможности того времени. Поэтому, если в распоряжении наблюдателя имелось, например, четыре положения за две ночи, и круговая орбита почему-либо его не удовлетворяла, например, в случае наблюдений комет, характер движения которых заведомо некруговой, нужно было вводить в решение орбитальной задачи какие-то дополнительные предположения о характере движения объекта.

4.6.1 Гипотеза перигелийного прохождения

Самым простым и очевидным из них было предположение о параболическом движении наблюденного небесного тела, но число полных наблюдений для определения параболической орбиты все равно должно быть, как минимум, три [47]. Другое условие, предложенное финским астрономом И.Вяйсяля [70, 71], состояло в том, что гелиоцентрический радиус объекта принадлежит некоторой заданной области значений и, главное, в момент наблюдений объект находится в перигелии или вблизи от него. В этом случае его гелиоцентрический вектор перпендикулярен вектору его гелиоцентрической скорости. Эти обстоятельства помогают вычислить эллиптическую орбиту по двум полным наблюдениям объекта при варьировании значений эксцентриситета. Напомним, что полным

наблюдением в астрометрии принято называть наблюдение, обеспечивающее получение двух сферических координат α, δ в фиксированный момент времени t . Тем самым определяется положение объекта на небесной сфере в момент t .

Метод Вайсяля широко применялся до второй мировой войны в обсерватории Турку и поныне входит в набор методов первоначального определения орбит, которые используются в Международном центре малых планет. Алгоритм этого метода требует не менее двух положений объекта за две ночи наблюдений и описан в [47]. Метод ПВД решает эту задачу по наблюдениям одной ночи, если известны $\alpha, \delta, \mu, \psi$, для вычисления которых необходимы не менее трех положений объекта за ночь [36]. Если имеется дополнительно еще одно полное наблюдение во вторую ночь, то в методе ПВД оно используется для проверки правильности выбранного значения эксцентриситета. Дело в том, что в методе Вайсяля, постулирующем условие $\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = 0$, орбитальная задача решается при различных варьируемых значениях эксцентриситета и возникает необходимость его уточнения.

Метод Вайсяля ведет итерации по двум параметрам: эксцентриситету и начальному расстоянию. Его легко модифицировать, оставив лишь итерации по эксцентриситету. В самом деле, скорость в перигелии любой кеплеровской орбиты хорошо известна [50]:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{\kappa^2(1+e)}{r}. \quad (4.36)$$

Поэтому остаются в силе формулы (4.20 – 4.29) при замене κ^2 на $\kappa^2(1+e)$. Схема вычислений выглядит следующим образом.

Задаем некоторое значение эксцентриситета e . По указанному правилу вычисляем коэффициенты уравнения (4.24). Решая последнее, находим d . Затем по формуле (4.26) находим \dot{d} . Наконец, формулы (4.28) или (4.29) дают нам вектор положения и скорости. Определенная по этим данным орбита дает нам новое значение эксцентриситета, после чего процесс повторяется.

Заметим, что данный алгоритм можно применить многократно при некотором разумном наборе эксцентриситетов и получить семейство перигелийных орбит объекта. Поэтому желательно для однозначности решения задачи иметь хотя бы одно наблюдение в соседние ночи, чтобы с полученными орбитами семейства вычислить величины (О-С). Они будут, как правило, разными, но по наи-

меньшему из полученных (О-С) можно сделать вывод о близости данной системы элементов к реальной орбите.

4.6.2 Гипотеза принадлежности астероида известному метеорному потоку

В последнее десятилетие в связи с новыми возможностями, которые дали астрономам-наблюдателям ПЗС-матрицы, резко возросло число открываемых астероидов и комет, проходящих в околоземном космическом пространстве, непосредственно вблизи Земли, и представляющих угрозу нашей цивилизации. Помимо необходимости проводить отслеживание этих небесных тел, определять их орбиты и вычислять возможные сближения с Землей, у этой практической проблемы оказалось много научных аспектов, один из которых — вопрос о связи опасно сближающихся астероидов с известными метеорными потоками. Эту задачу поставили и начали наблюдения для ее решения московские астрономы [3, 2]. Их опыт вычисления орбит наблюдаемых крупных фрагментов в известных метеорных потоках позволяет с той или иной степенью достоверности делать вывод о принадлежности наблюдаемого объекта данному метеорному потоку. Наши коллеги используют для решения орбитальной задачи модифицированный метод Лапласа, но точность вторых производных направляющих косинусов, как обычно, оставляет желать лучшего.

Мы полагаем, что при правильном использовании априорной информации об известном метеорном потоке и значений $\alpha, \delta, \mu, \psi$ как наиболее точных величин, вычисляемых из плотного ряда ПЗС-наблюдений, можно найти более надежное решение названной задачи. Как показано в [2], для метеорного потока из соответствующих каталогов можно предвычислить некоторые элементы орбит, например, узел и наклон, а также лучевую скорость фрагментов потока. С этими данными на основе системы уравнений метода ПВД можно построить алгоритм определения принадлежности наблюдаемого объекта метеорному потоку. Оставим эту задачу заинтересованному читателю.

4.7 Методы Тэффа-Холла, Данжона и улучшение орбит небесных тел

Из зарубежных исследований по вопросу оперативного определения орбит космических объектов ближе всего к нашему подходу примыкает работа американских специалистов из Массачусетского технологического института [69], которые обратили внимание на возможность „использования углов и угловых скоростей“ при решении задачи об определении орбиты спутника Земли. К сожалению, они, видимо, не знали о наших работах [5, 6, 7, 18, 34, 35], опубликованных ранее, и предложили довольно громоздкий алгоритм, который основан на использовании постоянства интеграла площадей и интеграла энергии, записанных для двух дат наблюдений. Наблюдения должны обеспечить в каждую из дат векторы \mathbf{D} и их первые производные.

Запишем для двух моментов времени интегралы площадей и энергии в наших обозначениях в виде

$$\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 \quad (4.37)$$

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}_1^2}{\kappa^2} - \frac{2}{r_1} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_2^2}{\kappa^2} - \frac{2}{r_2}. \quad (4.38)$$

Наблюдательные данные в методе Тэффа и Холла выглядят следующим образом:

$$\mathbf{r}_i = d_i \mathbf{D}_i + \mathbf{g}_i, \quad \dot{\mathbf{r}}_i = \dot{d}_i \mathbf{D}_i + d_i \dot{\mathbf{D}}_i + \dot{\mathbf{g}}_i, \quad i = 1, 2. \quad (4.39)$$

Уравнения (4.37 – 4.38) с учетом (4.39) представляют собой систему 4 (в скалярной форме) уравнений с 4 неизвестными: d_i, \dot{d}_i , $i = 1, 2$. Известными из наблюдений величинами будут два направления на спутник и их первые производные вместе с геоцентрическими координатами наблюдателя и их первыми производными. Решение системы уравнений (4.37 – 4.38) находится с помощью итерационного процесса, причем до начала итераций используется процедура оценки топоцентрического расстояния до спутника. В итоге для искомым неизвестных — расстояния и его лучевой скорости — получают согласованные значения, и далее по двум геоцентрическим векторам вычисляются элементы первоначальной орбиты спутника, которые затем улучшаются по всей совокупности имеющихся наблюдений.

Не входя в более подробный анализ изложенного метода, который авторы называли „точным“, отметим, что теоретически он вполне обоснован, а его появление связано с получением из наблюдений не только сферических координат спутника, но и их первых производных. Интересно, что авторы „точного метода“ исследовали в [69] и классический метод Лапласа, но он не удовлетворил их в решении поставленной задачи. Дело в том, что они вычисляли требуемые для применения метода Лапласа вторые производные направляющих косинусов численным методом по трем соседним положениям, а не из полиномиального представления координат, как следовало бы. Это не могло не привести их к существенной методической ошибке и, как следствие, к нереальным элементам орбиты спутника. Поэтому метод Лапласа был ими отвергнут. Впоследствии авторы вынуждены были констатировать, что предложенный ими „точный метод“ не оправдал надежд в задаче определения первоначальных орбит ИСЗ „с использованием углов и угловых скоростей“. Этот вывод был подтвержден нами в работе [23].

Коснемся вопроса о возможности использования интеграла площадей (4.37) в нашем алгоритме применительно к двум первым уравнениям (4.2). По-видимому, если выполнить их векторное умножение, можно найти соответствующие алгоритмы решения орбитальной задачи, но выяснение этого вопроса еще ждет своего исследователя.

В той области небесной механики, которая имеет дело с определением и улучшением орбит небесных тел, некоторым особым случаем является метод, опубликованный известным французским астрономом Данжоном [61]. Он предложил после определения первых и вторых производных исправлять не элементы орбиты путем вычисления поправок к этим элементам, а улучшать полученные производные до тех пор, пока не будут найдены такие их значения, с использованием которых вычисленная методом Лапласа орбита представит все имеющиеся наблюдения с точностью до их ошибок. Алгоритм метода Данжона, который он называл „методом фиктивных положений“, подробно разобран в [47]. М.Ю.Клокачева [39] успешно использовала этот метод для определения орбит астероидов, причем наиболее целесообразным оказалось применение метода Данжона в случае более протяженных рядов положений с большими интервалами между близкими датами наблюдений. Теперь есть все основания для правильного использования прямых мето-

дов определения орбит в зависимости от имеющегося наблюдательного материала.

Относительно процедуры улучшения орбит при наличии хороших первоначальных элементов можно повторить только то, что она остается и еще долго будет оставаться основной методикой получения надежных элементов наблюдающихся небесных объектов. Огромное число разнообразных наблюдений требует, конечно, их упорядочения хотя бы в смысле введения весовых коэффициентов для того, чтобы не слишком точные положения не ухудшали результат — вычисленные элементы орбит. Теории движения малых тел Солнечной системы, которые при этом используются, должны отвечать постоянно повышающейся точности современных ПЗС-наблюдений. Следует помнить также, что поправки к принятым значениям элементов орбит, которые по методу наименьших квадратов вычисляются в процессе улучшения, могут быть коррелированными и иногда негативно влиять на получаемый результат, но эти вопросы мы здесь рассматривать не будем: имеется много литературы на эту тему за столетия использования процедуры улучшения орбит.

4.8 О точности элементов орбит, вычисляемых прямыми методами

Решение систем условных уравнений типа (3.13) или (3.16) относительно коэффициентов полиномиального представления (3.12) или (3.15) позволяет получить оценку их точности. Этим обеспечивается оценка точности первых и вторых производных направляющих косинусов, необходимых для применения метода Лапласа. Можно пересчитать полученные величины ошибок направляющих косинусов и их производных для вычисления ошибок параметров видимого движения. Они определяются также по алгоритму аппроксимации малым кругом, см. *Второй способ*, с. 92.

Оценка точности элементов орбит, вычисляемых прямыми методами, корректно была проведена нами только для метода ПВД. Как уже отмечалось, вследствие независимости шести параметров видимого движения, понимаемой в смысле возможности изменения каждого из них вне связи с остальными, и аналитической замкнутости формул вычисления элементов орбиты в методе ПВД мы уже

в начале исследования имели возможность посредством численного эксперимента получить представление о том, каким образом и на какие именно определяемые элементы орбиты спутника влияет каждый из параметров видимого движения. Это достигалось путем вычисления одной и той же орбиты при вариации ПВД как в пределах, так и за пределами их среднеквадратических ошибок. В такой процедуре последовательно варьировался каждый из параметров, а элементы орбиты каждый раз вычислялись при одном варьированном и пяти фиксированных значениях ПВД. Анализ таких вычислений для разнообразных небесных тел полностью подтвердил вывод о том, что в методе ПВД главную роль играют параметры видимого движения второго порядка — кривизна и угловое ускорение. Изменение кривизны наиболее существенно влияет на размеры и форму кеплерова эллипса, а изменение углового ускорения — при неизменной кривизне — влияет на форму эллипса, его ориентацию в орбитальной плоскости и на положение самой орбитальной плоскости в пространстве.

Проблема оценки точности элементов орбит, вычисляемых методом Лапласа, в зависимости от точности первых и вторых производных направляющих косинусов, существенно труднее вследствие зависимости этих величин согласно уравнениям связи (2.45). В этих условиях вариации направляющих косинусов и их производных также связаны между собой. Однако при полиномиальной аппроксимации непосредственно сферических координат объекта и вычислении их первых и вторых производных условия связи (2.45) выполняются автоматически, так что оценка точности методом варьирования производных в пределах их ошибок вполне приемлема.

Можно утверждать, что с повышением точности ПЗС-наблюдений движущихся небесных тел главную роль в определении их орбит прямыми методами будут играть методические ошибки, связанные с алгоритмами вычислений ненаблюдаемых величин — ПВД или производных направляющих косинусов, с ошибками аппроксимации реального движения объекта круговым или параболическим, а также с ошибочностью априорных предположений.

4.9 Рекомендации по практическому применению прямых методов

За три десятилетия, минувших после получения нами первых результатов успешного применения прямых методов, несмотря на многочисленные публикации — сперва по вопросу определения орбит ИСЗ [5, 6, 7, 18, 34, 35, 37, 9, 22], а затем комет и астероидов [15, 16, 20, 24, 59], широкой практической реализации этих методов так и не произошло. В современных центрах сбора и обработки давно и успешно работают с традиционными методами улучшения орбит астероидов и комет, не испытывая дефицита в наблюдениях, а в области определения первоначальных орбит применяют различные модификации метода Гаусса. Во-вторых, известная закрытость работ по спутниковой тематике ограничивала любые намерения привнести нечто новое в решение задачи определения орбит ИСЗ. К тому же большая трудоемкость фотографических наблюдений и невысокая точность наблюдений телевизионных в то время затрудняла использование прямых методов при решении практических задач как у нас, так и за рубежом. Правда, и тогда был (и остался сейчас) интерес к прямым методам определения орбит небесных объектов со стороны непосредственных наблюдателей на многочисленных обсерваториях, особенно любительских. Конечно, для получения информации о наблюдаемом объекте можно воспользоваться ресурсами Интернета на сайтах Международного центра малых планет (МЦМП) или других профессиональных учреждений, но самому наблюдателю всегда интересно узнать, что именно он отнаблюдал и где искать зафиксированный им объект в следующую ночь. Именно в этих случаях прямым методам, и прежде всего методу ПВД, нет альтернативы, особенно когда наблюдения ограничены несколькими положениями в единственную ночь наблюдений. Между тем и поныне МЦМП жестко настаивает на получении не менее четырех положений объекта в две последовательные ночи наблюдений для решения вопроса о приоритете его открытия. Наблюдения одной ночи, сколько бы их ни было получено при обнаружении наблюдателем нового астероида или кометы, принципиально не рассматриваются для решения орбитальной задачи. Они хранятся в базе данных МЦМП для использования в дальнейшем при улучшении орбит. Можно предполагать, что это связано с недооценкой прямых методов вычисления орбит и, как

следствие, с отсутствием в математическом обеспечении МЦМП программ, реализующих эти методы. Во всяком случае, наш опыт [58] использования плотного ряда положений, полученных за одну ночь, для идентификации наблюдаемого объекта остался невостреченным.

Но, как уже отмечалось, современные ПЗС-наблюдения обеспечивают возможность использования прямых методов для определения орбит самых разных небесных тел. Эти наблюдения высокоточны, оперативны, экономичны, просты и доступны даже с небольшими телескопами. Дело в преодолении скептицизма и предвзятости по поводу их реализации, а также в соответствующем математическом обеспечении [55]. В первом приближении оно практически создано и используется в Пулковской обсерватории вместе с программной системой ЭПОС [42], при этом для определения оскулирующих орбит ИСЗ Л.И.Ягудиным воссоздан пакет программ по алгоритмам, опубликованным в [37]. Таким образом, метод ПВД и метод Лапласа, развитые в свое время в Пулковской обсерватории и в Ленинградском университете и получившие сейчас адекватное наблюдательное наполнение, имеют прекрасную перспективу применения при решении актуальных небесномеханических задач. Следует только, используя наш опыт, правильно применять их в зависимости от полученных результатов наблюдений — их точности, плотности и продолжительности.

Приведем типичный пример вычисления орбит астероидов по ограниченному ПЗС-наблюдениям, выполненным на короткой дуге (табл. 4.1-4.6). В табл. 4.1 представлены все имеющиеся в базе данных МЦМП наблюдения астероида, получившего предварительное наименование 2004RO25. Первый раз он наблюдался 8 августа 2004 года службой слежения LONEOS (код МЦМП – 599), но было получено только три наблюдения в одну ночь. Затем через две недели этот астероид независимо увидели на Китт-Пике (служба слежения SPACEWATCH-1, код 691), но тоже в одну дату. Спустя еще две недели астероид в течение трех ночей наблюдался телескопом обсерватории Table Mountain (код 673), и именно после этих трех ночей он получил свое предварительное наименование, а наблюдатели названной обсерватории стали его первооткрывателями. И наконец, последний раз астероид 2004RO25 наблюдали в ночь на 22 сентября 2004 года на двух телескопах Китт-Пика (код 291 принадлежит службе SPACEWATCH-2). По этим 19 наблюдениям в

Международном центре малых планет была вычислена орбита этого объекта (орбита МЦМП).

Без какой-либо отбраковки из представленных наблюдений мы взяли короткий ряд положений за три ночи подряд и определили первоначальные орбиты методами Лапласа и ПВД, а также круговые орбиты с целью продемонстрировать возможности таких орбит для эфемеридных вычислений. Эти результаты приводятся в последующих таблицах. Они с помощью программной системы ЭПОС сравниваются с предварительной орбитой МЦМП. В табл. 4.2 можно видеть точность вычисляемых производных (использовалась квадратичная аппроксимация сферических координат) и сравнить полученные из наблюдений параметры с параметрами, вычисленными ПС ЭПОС по орбите, которая имеется в МЦМП. Разброс результатов вполне приемлем. В различии получаемых элементов орбит (табл. 4.3) решающую роль играют малые отличия параметров. Заметим, что элементы МЦМП представляют все использованные наблюдения со средней квадратической ошибкой $\pm 0.4''$. Представление взятых наблюдений нашими орбитами дано в табл. 4.4. Из этой таблицы видно, что обе наши системы элементов представляют исходные наблюдения одинаково, несколько лучше они аппроксимируются полиномом второй степени, а невязки, даваемые орбитой МЦМП, больше за счет использования большего числа наблюдений.

Таблица 4.1: ПЗС-наблюдения астероида 2004 RO25

No	Код	Дата DT	RA	DEC	Mgn	Z
1	599	2004 08 08.04232	22 30 23.625	-5 24 22.42	19.6	48
2	599	2004 08 08.05464	22 30 23.222	-5 24 25.03	19.3	48
3	599	2004 08 08.06709	22 30 22.899	-5 24 25.84	19.7	50
4	691	2004 08 22.34326	22 20 25.207	-6 11 19.97	19.9	38
5	691	2004 08 22.37161	22 20 23.839	-6 11 27.31	19.9	41
6	691	2004 08 22.39967	22 20 22.495	-6 11 34.57	20.0	46
7	673	2004 09 08.20876	22 07 06.328	-7 32 02.04	20.0	48
8	673	2004 09 08.21223	22 07 06.190	-7 32 02.83		48
9	673	2004 09 08.23248	22 07 05.318	-7 32 08.87		45
10	673	2004 09 09.25217	22 06 23.058	-7 37 01.94	20.0	42
11	673	2004 09 09.27034	22 06 22.304	-7 37 07.22		41
12	673	2004 09 10.24255	22 05 43.206	-7 41 43.15	20.0	43
13	673	2004 09 10.25274	22 05 42.822	-7 41 45.74		42
14	291	2004 09 22.13380	21 59 48.807	-8 30 31.71	20.6	50
15	291	2004 09 22.15773	21 59 48.362	-8 30 37.12	20.7	46
16	291	2004 09 22.17091	21 59 48.106	-8 30 39.68	20.7	44
17	691	2004 09 22.22167	21 59 47.203	-8 30 49.82	20.9	40
18	691	2004 09 22.24895	21 59 46.700	-8 30 55.24	20.6	41
19	691	2004 09 22.30948	21 59 45.612	-8 31 07.50	20.4	50

Таблица 4.2: Параметры видимого движения (положения 7-13)

Параметры	Направл. косинусы	ПВД	ЭПОС (МЦМП)
Эпоха	2004 09 09.23075		
RA	22 06 23.926 ±0.007	22 06 23.926	22 06 23.8933
dRA	- 40.859 ±0.005		- 40.8341
d(dRA)/dt	1.236 ±0.008		1.2489
DEC	-7 36 55.84 ±0.12	-7 36 55.84	-7 36 55.892
dDEC	- 4 45.69 ±0.07		- 4 45.680
d(dDEC)/dt	3.69 ±0.14		3.467
μ (сек./сут.)	671.3053	671.3116	670.96444
$\dot{\mu}$ (сек./сут. ²)	-18.2978	-18.2970	-18.37938
ψ (град.)	244.8131	244.8131	244.80030
c	2.410668	2.399048	2.533704

Таблица 4.3: Элементы орбит, вычисленные по данным табл. 4.2

Элементы	Метод Лапласа	Метод ПВД	ЭПОС (МЦМП)
Эпоха	2004 09 09.23075		
d	0.919978	0.927104	0.8511025
d-dot	0.002455	0.002532	0.0017731
a	2.36101	2.36384	2.331250
e	0.19543	0.19264	0.2238332
i	1.84293	1.84958	1.775929
N	240.64032	240.77351	239.408684
w	111.56678	109.85821	124.494697
M	351.40760	352.38657	344.772099

Таблица 4.4: Представление использованных наблюдений

No	Дата 2004 09	$(O - C)_\alpha$				$(O - C)_\delta$			
		Аппр. полин.	Метод		ЭПОС (МЦМП)	Аппр. полин.	Метод		ЭПОС (МЦМП)
			Лапл.	ПВД			Лапл.	ПВД	
7	8.20876	0.02''	0.12''	0.24''	0.49''	-0.06''	-0.04''	0.02''	-0.04''
8	8.21223	0.12	0.21	0.33	0.60	0.15	0.17	0.22	0.18
9	8.23248	-0.14	-0.06	0.06	0.30	-0.09	-0.07	-0.02	-0.02
10	9.25217	0.14	0.14	0.14	0.12	0.06	0.06	0.06	-0.14
11	9.27034	-0.13	-0.13	-0.13	-0.08	-0.05	-0.05	-0.05	-0.24
12	10.24255	-0.10	-0.41	-0.30	-0.82	-0.19	-0.34	-0.28	-0.29
13	10.25274	0.10	-0.21	-0.10	-0.54	0.18	0.03	0.09	0.00

Таблица 4.5: Сравнение элементов круговых орбит

Параметры	Первая дата	ЭПОС (МЦМП)	2 и 3 даты	ЭПОС (МЦМП)
Эпоха 2004 09	08.21782		09.75445	
Число ночей	1		2	
Положения	7-9		10-13	
RA	22 07 05.947	22 07 05.914	22 06 02.848	22 06 02.712
	0.003		0.009	
dRA/dt	-42.712	-42.055	-40.212	- 40.169
	0.323		0.018	
DEC	-7 32 04.57	-7 32 04.62	-7 39 24.50	-7 39 24.80
	0.09		0.10	
dDEC/dt	- 4 54.46	- 4 48.91	- 4 43.76	- 4 43.79
	8.74		0.21	
μ	700.0884	688.8850	661.7376	661.1667
ψ	245.1271	245.2038	244.6078	244.5813
r	2.84448 \pm 0.04142		2.97390 \pm 0.00199	(2.33125)
i	2.80226 \pm 0.22354		2.97735 \pm 0.00993	(1.77593)
N	218.5406 \pm 9.7806		214.5357 \pm 0.2939	(239.40868)
u	117.6989 \pm 9.7533		121.7660 \pm 0.2914	

Обращает на себя внимание небольшое (в третьем знаке) различие значений кривизны траектории, полученных при вычислении по формуле (2.39) при аппроксимации сферических координат и полученных по алгоритму аппроксимации малым кругом, см. *Второй способ*, с. 92. Однако от „эталонного“ значения кривизны, задаваемого орбитой МЦМП, которую мы выбрали за орбиту сравнения, это различие видно уже во втором десятичном знаке.

Элементы орбит, вычисленные по методу Лапласа и ПВД, довольно близки между собой за счет использования одних и тех же наблюдений на короткой дуге (7 положений за 3 ночи). Но они отличаются от элементов орбиты МЦМП, которая представляет все полученные наблюдения (19 наблюдений за 6 ночей наблюдений).

В табл. 4.5 представлены две круговые орбиты, полученные нами на том же материале: первая из наблюдений в одну дату, вторая — по совместной обработке наблюдений двух дат. Параметры видимого движения первого порядка здесь вычислены по линейной аппроксимации сферических координат, а в колонках ЭПОС приведены их эфемеридные значения, вычисленные по орбите МЦМП, т.е. на основе всех 19 наблюдений. Как видно из данных табл. 4.5, точность параметров, полученных за две даты, более высокая, чем в случае одной даты. Однако элементы круговых орбит в обоих случаях значительно отличаются от одноименных эллиптических. Причиной этих отличий — большое значение эксцентриситета астероида. Этой же причиной можно объяснить и большие ошибки двухнедельного прогноза, который приводится в табл. 4.6. Действительно, если полученные нами две системы эллиптических орбит вполне надежно обеспечивают обнаружение объекта через две недели после их определения (см. малость разностей (О-С) по положению и скоростям), то для обнаружения этого же объекта по круговым орбитам такая возможность затруднена: невязки по положению достигают для α одной минуты времени и для δ — нескольких минут дуги. Невязки скоростей изменения координат существенны во вторую дату, но они всё же могут помочь в задаче обнаружения объекта на основе круговых орбит спустя две недели после его наблюдений. Мы считаем, что данные табл. 4.6 свидетельствуют о возможности нахождения объекта спустя две недели после вычисления его орбиты.

Таблица 4.6: Двухнедельный прогноз положений и скоростей астероида, вычисленный по различным орбитам из табл. 4.3 и 4.5

	Дата	RA	dRA/dt	DEC	dDEC/dt
Наблюдения «О» (норм.место)	Август 22.37151	22 20 23.85	-48.08 ^s	-6 11 27.3	-258.8''
Орбита Лапласа «C1»		22 20 28.26	-48.91	-6 10 21.9	-267.8
ПВД C2		22 20 28.68	-48.99	-6 10 15.3	-268.7
Круг.1 C3		22 20 02.91	-47.14	-6 08 06.2	-289.2
Круг.2 C4		22 19 34.37	-45.43	-6 10 11.1	-282.5
Наблюдения «О» (норм.место)	Сентябрь 22.26003	21 59 46.50	-18.11	-8 30 57.5	-201.6
Орбита Лапласа «C1»		21 59 42.62	-19.09	-8 30 53.2	-199.7
ПВД C2		21 59 42.24	-19.16	-8 30 52.8	-199.7
Круг.1 C3		21 58 34.09	-28.93	-8 35 08.2	-236.3
Круг.2 C4		21 58 48.32	-28.36	-8 33 53.0	-232.9

Заметим, что рассмотренный пример — далеко не лучший по полученным результатам, которые могли бы быть эффектнее, если бы исходные наблюдения на трехдневном интервале были бы более плотными, насыщенными и точными. Но мы специально не создавали рафинированных условий для демонстрации возможностей прямых методов определения первоначальных орбит и выбрали обычный и часто встречающийся случай. Однако наш опыт, полученный за истекшие десятилетия при вычислении орбит самых разных небесных тел, позволяет утверждать, что в этом примере круговая орбита за 8 августа 2004 года, будь она сосчитана в эту дату по трем положениям, позволила бы легко отождествить наблюдения астероида 2004 RO25 за 22 августа. В итоге "подвязка" наблюдений этого астероида, выполненных в одну ночь, произошла в МЦМП, видимо, только после определения первоначальной орбиты по положениям в три последовательные ночи, которые были получены в обсерватории с кодом 673 гораздо позднее — на месяц — первого его обнаружения 8 августа. Предоставляем читателю самостоятельно убедиться в справедливости нашего предположения о возможности отождествления астероида 2004 RO25 по круговым орбитам метода ПВД за 8 и 22 августа.

Задачи к главе 4

Задача 4.1. Вывести уравнения (4.10, 4.11) из (4.8).

Задача 4.2. Показать, что если астероид A находится в оппозиции или проходит по диску Солнца (или покрывается диском Солнца, но тогда он ненаблюдаем), то $C_3 = 0$. Аналогично, если спутник находится в зените (или надире, но тогда он не наблюдаем), то $C_3 = 0$.

Задача 4.3. Показать, что если вектор собственного движения астероида A направлен по касательной к большому кругу, соединяющему проекции \tilde{A}, \tilde{S} астероида и Солнца на небесную сферу, то $C_3 = 0$. Аналогично, если вектор собственного движения спутника направлен по касательной к большому кругу, проходящему через зенит, то $C_3 = 0$.

Задача 4.4. Показать, что условия задачи 4.2 — частный (точнее, предельный) случай условий задачи 4.3.

Задача 4.5. Показать, что других случаев обращения C_3 в нуль, кроме описанных в задачах 4.2, 4.3, не существует.

Задача 4.6. Показать, что коэффициенты уравнения (4.10) удовлетворяют неравенствам $a_0 \leq 0$, $a_6 \leq 0$; если $a_0 = 0$, то $a_3 = 0$.

Задача 4.7. Пусть $C \neq 0$, $C_3 = 0$. Показать, что уравнение (4.10) имеет единственное неотрицательное решение $r = \sqrt{-a_6}/|C|$.

Задача 4.8. Пусть $C \neq 0$, $C_3 \neq 0$, $a_6 = 0$. Показать, что уравнение (4.10) имеет один и только один положительный корень.

Указание. Определить число перемен знаков коэффициентов уравнения (4.10).

Задача 4.9. Пусть $C \neq 0$, $C_3 \neq 0$, $a_6 < 0$. Показать, что уравнение (4.10) имеет ровно один положительный корень при $a_3 \leq 0$ и один или три положительных корня при $a_3 > 0$.

Глава 5

Особые случаи определения орбит небесных тел

В предыдущей главе мы подробно рассмотрели алгоритмы решения уравнений в случае общего положения, когда небольшие изменения параметров не влияют на качественную картину. Но при массовом определении орбит, что типично для современной астрономии, не так уж редко встречаются вырожденные случаи. В этой главе мы отвечаем на два сакраментальных вопроса: кто виноват (при каких условиях мы сталкиваемся с вырождением) и что делать (изменить алгоритм или ждать новых наблюдений). Мы убедимся, что в большинстве вырожденных случаев задача определения орбит прекрасно решается или отработанными в главе 4, или слегка измененными алгоритмами. Но изредка встречаются случаи, когда определить орбиту невозможно и нужно ждать новых наблюдений.

Выше мы отмечали несколько видов вырождения. Начнем с простейшего: прохождение наблюдаемого объекта через полюс сферической системы координат. Приятное обстоятельство: как уравнения метода Лапласа (4.1), так и уравнения метода ПВД (4.2) не содержат особенностей при $\cos \delta = 0$. Последнее вызвано тем, что единственный не определенный в полюсах параметр ψ не входит в уравнения.

5.1 Точка остановки

Максимальное вырождение встречается при обращении в нуль собственного движения μ , или, что равносильно, вектора $\dot{\mathbf{D}}$:

$$\dot{\mathbf{D}} = \mu = 0. \quad (5.1)$$

В астрометрии точкой стояния видимой траектории светила на небе называют точку, в которой скорость изменения долготы обращается в нуль и происходит смена прямого движения на обратное (или наоборот). Условие (5.1) существенно более жесткое: в точке остановки обе составляющие собственного движения обращаются в нуль. Метод ПВД теряет силу, поскольку в уравнения (4.2) входит вектор \mathbf{T} , неопределенный при $\mu = 0$ (см. задачи 5.7, 5.8). Уравнения (4.1) метода Лапласа сохраняются.

Выясним, существуют ли решения уравнений (5.1) в случае гелиоцентрического (или, что равносильно, относительного геоцентрического) движения.

5.1.1 Существование точек остановки, гелиоцентрический случай

Дифференцируя два раза (вторые производные понадобятся дальше) соотношение $\mathbf{d} = d\mathbf{D}$ с учетом (5.1), получим

$$\mathbf{d} = d\mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{d}} = \dot{d}\mathbf{D}, \quad \ddot{\mathbf{d}} = \ddot{d}\mathbf{D} + d\ddot{\mathbf{D}}. \quad (5.2)$$

Таким образом, соотношения (5.1) равносильны коллинеарности векторов $\dot{\mathbf{d}}$ и \mathbf{d} , или, что то же, обращению в нуль их векторного произведения $\dot{\mathbf{d}} = \mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}}$. Для вычисления последнего введем систему координат, в которой за ориентированную плоскость x_1x_2 взята ориентированная плоскость орбиты E , а ось x_1 направлена в восходящий узел орбиты A . Обозначая через v, u долготы в орбите точек E, A , считаемые от восходящего узла, а через i — наклон орбиты A , представим координаты векторов $\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}$ в виде

$$d_1 = r \cos v - g \cos u, \quad d_2 = r \cos i \sin v - g \sin u, \quad d_3 = r \sin i \sin v,$$

$$\dot{d}_1 = \dot{r} \cos v - \dot{g} \cos u - r\dot{v} \sin v + g\dot{u} \sin u,$$

$$\dot{d}_2 = \dot{r} \cos i \sin v - \dot{g} \sin u + r\dot{v} \cos i \cos v - g\dot{u} \cos u,$$

$$\dot{d}_3 = \dot{r} \sin i \sin v + r \dot{v} \sin i \cos v.$$

Вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned}\tilde{d}_1 &= \sin i [rg\dot{u} \cos u \sin v - rg\dot{v} \sin u \cos v - \xi \sin u \sin v], \\ \tilde{d}_2 &= \sin i [-r^2\dot{v} + rg\dot{u} \sin u \sin v + rg\dot{v} \cos u \cos v + \xi \cos u \sin v], \\ \tilde{d}_3 &= -rg(\dot{v} \cos i + \dot{u}) \cos u \cos v - rg(\dot{u} \cos i + \dot{v}) \sin u \sin v + \\ &\quad + r^2\dot{v} \cos i + g^2\dot{u} + \xi(\sin u \cos v - \cos i \cos u \sin v),\end{aligned}$$

где $\xi = \dot{r}g - r\dot{g}$.

Как и следовало ожидать, плоский и пространственный случай существенно различаются. Рассмотрим их последовательно.

Случай $\sin i = 0$

Пусть $\sin i = 0$. Первые две компоненты вектора $\tilde{\mathbf{d}}$ тождественно равны нулю. Остается одно уравнение

$$\tilde{d}_3(u, v) = 0 \quad (5.3)$$

с двумя неизвестными u, v . По общей теории следует ожидать однопараметрического семейства решений, поскольку частные производные $\partial \tilde{d}_3(u, v)/\partial u$, $\partial \tilde{d}_3(u, v)/\partial v$ не обращаются в нуль тождественно. Для наглядности все же убедимся в существовании решений уравнения (5.3).

Пусть $i = 0$. Уравнение (5.3) принимает вид

$$r^2\dot{v} + g^2\dot{u} - rg(\dot{u} + \dot{v}) \cos(u - v) + \xi \sin(u - v) = 0. \quad (5.4)$$

Согласно интегралу площадей $r^2\dot{v} = \kappa\sqrt{p}$, $g^2\dot{u} = \kappa\sqrt{p_0}$, где здесь и ниже p, e, φ — фокальный параметр, эксцентриситет и аргумент перицентра орбиты A ; те же элементы орбиты E отмечаются индексом 0. Поэтому

$$1 + \sqrt{\frac{p_0}{p}} - \left(\frac{r}{g} \sqrt{\frac{p_0}{p}} + \frac{g}{r} \right) \cos(u - v) + \frac{\xi}{\kappa\sqrt{p}} \sin(u - v) = 0. \quad (5.5)$$

При $u = v + \pi$ левая часть (5.5) положительна. Пусть $v = u$. Определим u из условия $e \cos(u - \varphi) = e_0 \cos(u - \varphi_0)$ (последнее уравнение

имеет не менее двух решений на окружности). Для этого значения u , очевидно, $g/r = p_0/p$ и левая часть (5.5) равна

$$1 + x - \frac{1}{x} - x^2 = -\frac{1}{x}(1+x)(1-x)^2 \leq 0,$$

где временно положено $x = \sqrt{p_0/p}$. Таким образом, уравнение (5.4) имеет вещественные корни.

Посмотрим, может ли обратиться в нуль еще и вторая производная вектора \mathbf{D} . Согласно (5.2) это влечет коллинеарность векторов $\dot{\mathbf{d}}$ и \mathbf{d} . Используя дифференциальные уравнения движения, получим

$$(r^{-3} - g^{-3}) \mathbf{r} \times \mathbf{g} = 0. \quad (5.6)$$

Уравнение (5.6) удовлетворяется, если $r = g$ или $\mathbf{r} \times \mathbf{g} = 0$. Поскольку

$$\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{g}}{rg} = (-\sin i \sin u \sin v, \sin i \cos u \sin v, \sin u \cos v - \cos i \cos u \sin v), \quad (5.7)$$

то при $\sin i = 0$ обращение произведения $\mathbf{r} \times \mathbf{g}$ в нуль равносильно $v = u$, поскольку при $v = u + \pi$ наблюдатель и объект расположены по разную сторону от S и наблюдения невозможны. Уравнение (5.5) принимает форму

$$1 + \sqrt{\frac{p_0}{p}} = \frac{r}{g} \sqrt{\frac{p_0}{p}} + \frac{g}{r}. \quad (5.8)$$

По доказанному на круговых орбитах уравнение (5.8) решений не имеет. На эллиптических орбитах решения возможны при некоторых u .

Пусть $i = \pi$. Уравнение (5.3) принимает вид

$$g^2 \dot{u} - r^2 \dot{v} + rg(\dot{v} - \dot{u}) \cos(u+v) + \xi \sin(u+v) = 0. \quad (5.9)$$

В этот раз нет очевидного положительного значения левой части. Поэтому сначала положим $v = -u$ и определим u из условия $e \cos(u+\varphi) = e_0 \cos(u-\varphi_0)$. Левая часть (5.9) примет после нормировки вид

$$x - 1 + x^2 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}(1-x)(1+x)^2.$$

Теперь придадим v значение $-u + \pi$ и определим u из условия $-e \cos(u + \varphi) = e_0 \cos(u - \varphi_0)$. Левая часть (5.9) примет после нормировки вид

$$x - 1 - x^2 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}(1 - x)(1 + x^2).$$

Таким образом, левая часть (5.9) принимает значения разных знаков, так что уравнение (5.3) имеет вещественные корни.

Как и выше, вторая производная вектора \mathbf{D} может обратиться в нуль лишь при нескольких значениях пары u, v .

Резюмируем. Когда наблюдатель и объект движутся в одной плоскости (в гелиоцентрическом случае это плоскость эклиптики), имеется однопараметрическое семейство их взаимных положений, влекущих справедливость (5.1). Оно может содержать несколько точек (возможно, ни одной точки), в которых вдобавок $\ddot{\mathbf{D}} = 0$.

Случай $\sin i > 0$

Пусть $\sin i > 0$. Сокращая на $\sin i$, приходим к трем уравнениям:

$$d_1^*(u, v) = 0, \quad d_2^*(u, v) = 0, \quad d_3^*(u, v) = 0 \quad (5.10)$$

с двумя неизвестными u, v . Здесь $d_1^* = \tilde{d}_1 / \sin i$, $d_2^* = \tilde{d}_2 / \sin i$, $d_3^* = \tilde{d}_3$. По общей теории следует ожидать отсутствия решений. Однако в нашем случае это не так. Покажем это.

Домножим первое уравнение (5.10) на $\cos u$, а второе на $\sin u$ и сложим. Отсюда получаем простое выражение для $\sin u$. Из первого же уравнения сразу определяется $\tan u$, после чего получаем $\cos u$:

$$\cos u = \frac{rg\dot{v} \cos v + \xi \sin v}{r^2\dot{v}}, \quad \sin u = \frac{g\dot{u}}{r\dot{v}} \sin v. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.11) в выражение для d_3^* , получим

$$\frac{r^2\dot{v}}{\cos i} d_3^* = r^4\dot{v}^2 - r^2g^2(\dot{v}^2 \cos^2 v + \dot{u}^2 \sin^2 v) - 2gr\xi\dot{v} \cos v \sin v - \xi^2 \sin^2 v. \quad (5.12)$$

С другой стороны, подставляя в тождество $1 - \cos^2 u - \sin^2 u = 0$ соотношения (5.11), убедимся, что правая часть (5.12) равна нулю (но не тождественно).

Окончательно, соотношения (5.2) равносильны в пространственном случае двум уравнениям (5.11) с двумя неизвестными u, v . В общем случае получаем конечное множество решений.

Может ли обратиться в нуль еще и вторая производная вектора \mathbf{D} ? Согласно (5.6, 5.7) это возможно в двух случаях. Во-первых, при $r = g$, что бывает лишь на орбитах, заходящих то внутрь орбиты Земли, то во внешнюю область. При этом v должно удовлетворять двум уравнениям, что возможно лишь в исключительных случаях. Во вторых, при $u = v = 0$ или $u = v = \pi$, т.е. в узлах орбиты. Однако если орбиты не пересекаются, то в узлах $r \neq g$, и уравнения (5.11) не удовлетворяются.

5.1.2 Существование точек остановки, геоцентрический случай

Отличие этого случая от предыдущего — в поведении вектора \mathbf{g} . Теперь

$$\begin{aligned} d_1 &= r \cos v - l \cos u, & \dot{d}_1 &= \dot{r} \cos v - r \dot{v} \sin v + l \omega \sin u, \\ d_2 &= r \cos i \sin v - l \sin u, & \dot{d}_2 &= \dot{r} \cos i \sin v + r \dot{v} \cos i \cos v - l \omega \cos u, \\ d_3 &= r \sin i \sin v - g_3, & \dot{d}_3 &= \dot{r} \sin i \sin v + r \dot{v} \sin i \cos v. \end{aligned}$$

Здесь $l = g \cos \varphi'$, $g_3 = g \sin \varphi'$ постоянны, φ' — геоцентрическая широта обсерватории. Вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_1 &= l \sin i (-r \dot{v} \sin u \cos v - \dot{r} \sin u \sin v + r \omega \cos u \sin v) + \\ &\quad + g_3 (r \dot{v} \cos i \cos v + \dot{r} \cos i \sin v - l \omega \cos u), \\ \tilde{d}_2 &= -r^2 \dot{v} \sin i + l \sin i (r \dot{v} \cos u \cos v + \dot{r} \cos u \sin v + r \omega \sin u \sin v) + \\ &\quad + g_3 (r \dot{v} \sin v - \dot{r} \cos v - l \omega \sin u), \\ \tilde{d}_3 &= r^2 \dot{v} \cos i + l^2 \omega - l r (\dot{v} \cos i + \omega) \cos u \cos v - l \dot{r} \cos i \cos u \sin v + \\ &\quad + l \dot{r} \sin u \cos v - l r (\omega \cos i + \dot{v}) \sin u \sin v. \end{aligned}$$

Число подслучаев возросло, а число решений уравнений

$$\tilde{d}_1(u, v) = 0, \quad \tilde{d}_2(u, v) = 0, \quad \tilde{d}_3(u, v) = 0 \quad (5.13)$$

уменьшилось. Мы разберем подробно лишь один вариант $g_3 = 0$, $\sin i = 0$.

Пусть экваториальная обсерватория наблюдает экваториальный спутник. Первые две компоненты вектора $\tilde{\mathbf{d}}$ тождественно равны нулю. Остается одно уравнение (5.3) с двумя неизвестными u, v . По общей теории следует ожидать однопараметрического семейства решений. Но мы увидим, что в большинстве интересных для практики случаев решений нет.

Пусть $i = 0$. Уравнение (5.3) принимает вид

$$r^2\dot{v} + g^2\omega - gr(\dot{v} + \omega)\cos(u - v) + g\dot{r}\sin(u - v) = 0. \quad (5.14)$$

Если $u = v \pm (\text{sign } \dot{r})\pi/2$, то правая часть (5.14) положительна. Пусть $u = v$. Уравнение (5.14) принимает вид

$$(r - g)(r\dot{v} - g\omega) = 0.$$

Если $r\dot{v} - g\omega < 0$, что бывает только для спутников, двигающихся дальше Луны, то (5.14) имеет однопараметрическое семейство решений. Для менее далеких спутников (5.14) решений не имеет. Покажем это. Сумма третьего и четвертого слагаемого в левой части (5.14) не превосходит по модулю $g\sqrt{F}$, где временно положено

$$F = \dot{\mathbf{r}}^2 + 2r^2\dot{v}\omega + r^2\omega^2.$$

По формулам эллиптического движения

$$F = \frac{\kappa^2}{p}(1 + 2e\cos\nu + e^2) + 2\kappa\omega\sqrt{p} + \frac{p^2\omega^2}{(1 + e\cos\nu)^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \nu} = 2e\sin\nu \left[\frac{p^2\omega^2}{(1 + e\cos\nu)^3} - \frac{\kappa^2}{p} \right] = \frac{2e\omega^2\sin\nu}{p} \left(r^3 - \frac{\kappa^2}{\omega^2} \right),$$

где ν здесь обозначает истинную аномалию. Напомним, что $\sqrt[3]{\kappa^2/\omega^2}$ равно большой полуоси геостационарного спутника.

Поэтому для всех спутников, не пересекающих зону геостационарных спутников, F экстремально в точках $\nu = 0$ и $\nu = \pi$. Для низких спутников следует взять

$$\nu = 0, \quad \sqrt{F} = \frac{\kappa(1 + e)}{\sqrt{p}} + \frac{p\omega}{1 + e},$$

так что левая часть (5.14) не меньше

$$\kappa\sqrt{p} + g^2\omega - \frac{g\kappa(1 + e)}{\sqrt{p}} - \frac{gp\omega}{1 + e} = \omega \left(\frac{p}{1 + e} - g \right) \left[\frac{\kappa(1 + e)}{\omega\sqrt{p}} - g \right] > 0.$$

Окончательно, для ИСЗ, летающих ниже геостационарных спутников, равенство (5.1) невозможно.

Пусть $\sin i > 0$ или $g_3 \neq 0$ (или выполнены оба неравенства). Получаем систему трех уравнений с двумя неизвестными, скорее всего, не имеющую решений.

5.1.3 Решение уравнений при $\dot{\mathbf{D}} = 0$

Как уже было сказано, при выполнении (5.1) уравнения метода ПВД теряют смысл из-за неопределенности вектора \mathbf{T} . Уравнения (4.1) метода Лапласа принимают вид

$$\begin{aligned}\mathbf{D} d &= \mathbf{r} - \mathbf{g}, \\ \mathbf{D} \dot{d} &= \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{g}}, \\ \left(\ddot{\mathbf{D}} + \frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{D} \right) d + \mathbf{D} \ddot{d} &= -\frac{\kappa^2}{r^3} \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{g}},\end{aligned}\tag{5.15}$$

а тождества (2.45) влекут

$$\mathbf{D} \ddot{\mathbf{D}} = 0.\tag{5.16}$$

Пусть $\ddot{\mathbf{D}} \neq 0$. Умножим последнее уравнение (5.15) скалярно на $\ddot{\mathbf{D}}$, учитывая (5.16):

$$\ddot{\mathbf{D}}^2 d = -\frac{\kappa^2}{r^3} \ddot{\mathbf{D}} \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{D}} \ddot{\mathbf{g}}.\tag{5.17}$$

Эта формула совпадает с (4.6) при

$$C = \ddot{\mathbf{D}}^2 > 0, \quad C_2 = -\ddot{\mathbf{D}} \ddot{\mathbf{g}}, \quad C_3 = -\kappa^2 \ddot{\mathbf{D}} \mathbf{g}.\tag{5.18}$$

Описанный в §4.2 алгоритм решения уравнений Лапласа (4.8) остается в силе, только постоянные C, C_2, C_3 определяются по формулам (5.18). Таким образом находятся r, d , а затем и \mathbf{r} . Можно найти и \ddot{d} из третьего уравнения (5.15), умножая его скалярно на \mathbf{D} :

$$\ddot{d} = -\frac{\kappa^2}{r^3} (d + \mathbf{D} \mathbf{g}) - \mathbf{D} \ddot{\mathbf{g}}.$$

Однако $\dot{d}, \dot{\mathbf{r}}$ найти нельзя, поскольку эти четыре (в скалярной форме) величины связаны лишь тремя уравнениями $\dot{d} \mathbf{D} = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{g}}$.

Тем более решение невозможно, если вдобавок к условию $\dot{\mathbf{D}} = 0$ выполнено $\ddot{\mathbf{D}} = 0$.

Как и в невырожденном случае, решение возможно при дополнительных допущениях.

1. *Круговая орбита.* Предположим, что эксцентриситет орбиты A равен нулю. Третье из уравнений (5.15) можно отбросить. Очевидно, условие $\dot{\mathbf{D}} = 0$ не влечет никаких осложнений в уравнениях параграфа 4.4. Напротив, они лишь упрощаются, поскольку теперь

$$c_2 = c_4 = c_5 = \bar{c}_3 = h_7 = h_8 = h_9 = 0. \quad (5.19)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (4.24), степень которого понижена до шести, тогда как в невырожденном случае она равнялась десяти. После определения d задача решается по формулам (4.26, 4.28), которые теперь несколько упрощаются:

$$\dot{d} = -\frac{c_1 d + c_3}{C_1 + d}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{D} d, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{g}} + \mathbf{D} \dot{d}. \quad (5.21)$$

2. *Параболическая орбита в окрестности перигелия.* То же можно сказать об определении орбиты при условиях (4.31). Остается в силе описанный в разделе 4.5.1 алгоритм, причем как и в круговом случае справедливы равенства (5.19). Напомним, что в определяющих h_k соотношениях (4.25) надо κ^4 заменить на $4\kappa^4$. После нахождения d задача решается применением формул (5.20, 5.21).

3. *Произвольная параболическая орбита.* В начале этого раздела (с. 124) приведен алгоритм определения r, d при использовании всех уравнений (5.15). Остается лишь применить соотношение (4.34), принимающее вид

$$\dot{d} = -c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - c_6 + \frac{2\kappa^2}{r}}. \quad (5.22)$$

Положение и скорость определяются согласно (5.21).

4. *Итерации по двум элементам.* Алгоритм предыдущего пункта легко модифицировать, если нам известны эксцентриситет e и фокальный параметр p . Сначала определяем r и d . Затем находим квадрат скорости

$$v^2 = \kappa^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1 - e^2}{p} \right)$$

и лучевую скорость

$$\dot{d} = -c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - c_6 + v^2}. \quad (5.23)$$

Формулы (5.21) завершают определение орбиты.

На практике e и p неизвестны. Но если мы знаем их приближенные значения, то в результате только-что описанной процедуры получаем их новые значения. Процесс можно продолжать. В благоприятных случаях он сходится.

5.2 Движение по большому кругу

Пусть теперь

$$|\dot{\mathbf{D}}| = \mu > 0, \quad \text{но} \quad C = (\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{D}}) = 0. \quad (5.24)$$

Поскольку $(\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{D}}) = \varkappa\mu^3$, то второе условие (5.24) равносильно обращению геодезической кривизны в нуль, а кривизны в единицу:

$$\varkappa = 0, \quad c = 1. \quad (5.25)$$

Большой круг в этом случае является соприкасающимся.

5.2.1 Условия, влекущие обращение геодезической кривизны в нуль, гелиоцентрический случай

Прежде всего заметим, что

$$(\mathbf{d}\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}) = d^3(\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{D}}), \quad (5.26)$$

поэтому (5.25) равносильно

$$(\mathbf{d}\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}) = 0. \quad (5.27)$$

Вспоминая, что $\mathbf{d} = \mathbf{r} - \mathbf{g}$, с учетом уравнений движения (3.9) получим

$$(\mathbf{d}\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}) = \left(\frac{\kappa^2}{g^3} - \frac{\kappa^2}{r^3} \right) [(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{g}) + (\mathbf{g}\dot{\mathbf{g}}\mathbf{r})]. \quad (5.28)$$

Пользуясь введенной в разделе 5.1.1 системой координат, запишем векторы площадей в виде

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \kappa\sqrt{p}(0, -\sin i, \cos i), \quad \mathbf{g} \times \dot{\mathbf{g}} = \kappa\sqrt{p_0}(0, 0, 1),$$

после чего смешанные произведения запишутся без труда:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{g}) &= -\kappa g\sqrt{p}\sin i \sin u = -\frac{\kappa p_0\sqrt{p}\sin i \sin u}{1 + e_0 \cos(u - \varphi_0)}, \\ (\mathbf{g}\dot{\mathbf{g}}\mathbf{r}) &= \kappa r\sqrt{p_0}\sin i \sin v = \frac{\kappa p\sqrt{p_0}\sin i \sin v}{1 + e \cos(v - \varphi)}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Таким образом, равенство (5.25) возможно в трех случаях.

- При $\sin i = 0$, т.е. при совпадении плоскостей орбит наблюдателя и наблюдаемого объекта. Для гелиоцентрического случая это означает движение небесного тела по эклиптике. Очевидно, в этом случае геодезическая кривизна видимой траектории равна нулю тождественно. Тождественно равны нулю также коэффициенты C_2, C_3 .
- При $r = g$, что в гелиоцентрическом случае возможно лишь для некоторых комет и астероидов группы Аполлона. Равенство $r = g$ возможно лишь в дискретные моменты времени.
- При выполнении соотношения

$$f_1(v) = Af_2(u), \quad (5.30)$$

где $A = \sqrt{p_0/p}$,

$$f_1(v) = \frac{\sin v}{1 + e \cos(v - \varphi)}, \quad f_2(u) = \frac{\sin u}{1 + e_0 \cos(u - \varphi_0)}.$$

Исследуем уравнение (5.30). Производная

$$f_1'(v) = \frac{\cos v + e \cos \varphi}{[1 + e \cos(v - \varphi)]^2}$$

обращается в нуль при

$$\cos v = -e \cos \varphi, \quad \sin v = s\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi}, \quad s = \pm 1.$$

При $s = -1$, $s = 1$ функция f_1 достигает минимума и максимума, соответственно. Поэтому значения f_1 заполняют отрезок

$$I_1 = \left[-\frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} - e \sin \varphi}, \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \varphi} + e \sin \varphi} \right].$$

Функция $f_2(u)$ получается из $f_1(v)$ подстановкой

$$e \mapsto e_0, \quad v \mapsto u, \quad \varphi \mapsto \varphi_0.$$

Поэтому значения Af_2 заполняют отрезок

$$I_2 = \left[-\frac{A}{\sqrt{1 - e_0^2 \cos^2 \varphi_0} - e_0 \sin \varphi_0}, \frac{A}{\sqrt{1 - e_0^2 \cos^2 \varphi_0} + e_0 \sin \varphi_0} \right].$$

Отрезки I_1 и I_2 содержат нуль внутри себя и потому имеют общую часть. Иными словами, уравнение (5.30) относительно двух неизвестных u, v имеет однопараметрическое семейство решений, которые легко находятся решением тригонометрического уравнения первой степени. При фиксированном u приходим к

$$A_1 \cos v + A_2 \sin v = A_3, \quad (5.31)$$

где здесь и ниже

$$\begin{aligned} A_1 &= Ae \cos u \cos \varphi, & A_2 &= Ae \sin u \sin \varphi - [1 + e_0 \cos(u - \varphi_0)], \\ A_3 &= -A \sin u, & A_5 &= e_0 \sin v \sin \varphi_0 - A[1 + e \cos(v - \varphi)], \\ A_4 &= e_0 \sin v \cos \varphi_0 & A_6 &= -\sin v. \end{aligned}$$

При фиксированном же v приходим к

$$A_4 \cos u + A_5 \sin u = A_6. \quad (5.32)$$

Итак, условия обращения величины $C = (\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{D}}) = \mu^2 \varkappa$ в нуль определены. Обратимся к важным величинам C_2, C_3 . В силу (4.6)

$$C_2 = \frac{\kappa^2}{g^3} (\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\mathbf{g}) = -\frac{C_3}{g^3},$$

откуда

$$C_3 = -g^3 C_2. \quad (5.33)$$

Поэтому C_2, C_3 либо оба обращаются в нуль, либо одно из них положительно, а другое отрицательно. Выясним, при каких условиях выполняется

$$C_2 = C_3 = 0. \quad (5.34)$$

Очевидно,

$$(\mathbf{d}\dot{\mathbf{d}}\mathbf{g}) = d^2(\mathbf{D}\dot{\mathbf{D}}\mathbf{g}),$$

поэтому (5.34) равносильно $(\mathbf{d}\dot{\mathbf{d}}\mathbf{g}) = 0$, или, что то же,

$$(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{g}) + (\mathbf{g}\dot{\mathbf{g}}\mathbf{r}) = 0. \quad (5.35)$$

Таким образом, если $r \neq g$, то согласно (5.28) справедливо условие (5.35), а значит и (5.34). Следовательно, при ненулевых C_2, C_3 обязательно $r = g$.

5.2.2 Условия, влекущие обращение геодезической кривизны в нуль, геоцентрический случай

Геоцентрический случай существенно сложнее. Соотношение (5.28) принимает форму

$$(\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{d}) = \left(\omega^2 - \frac{\kappa^2}{r^3} \right) [(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{g}) + (\mathbf{g}\dot{\mathbf{g}}\mathbf{r})] - \omega^2 g_3 [(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{K}) - (\mathbf{r}\dot{\mathbf{g}}\mathbf{K}) - (\mathbf{g}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{K}) + (\mathbf{g}\dot{\mathbf{g}}\mathbf{K})]. \quad (5.36)$$

В общем случае следует ожидать однопараметрического семейства решений (5.25). Однако аналитическое исследование удалось выполнить только в случае обсерватории на экваторе, когда $g_3 = 0$. Тогда (5.36) упрощается:

$$(\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{d}) = \left(\omega^2 - \frac{\kappa^2}{r^3} \right) [(\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{g}) + (\mathbf{g}\dot{\mathbf{g}}\mathbf{r})], \quad (5.37)$$

причем

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} &= \kappa\sqrt{p}(0, -\sin i, \cos i), & \mathbf{g} \times \dot{\mathbf{g}} &= g^2\omega(0, 0, 1), \\ (\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\mathbf{g}) &= -\kappa g\sqrt{p}\sin i \sin u, & (\mathbf{g}\dot{\mathbf{g}}\mathbf{r}) &= g^2 r\omega \sin i \sin v. \end{aligned} \quad (5.38)$$

По-прежнему равенство (5.25) возможно в трех случаях.

- При $\sin i = 0$, т.е. для экваториальных спутников. Геодезическая кривизна видимой траектории равна нулю тождественно.
- При $r^3 = (\kappa/\omega)^2$, т.е. при пересечении радиуса орбиты геостационарных спутников, что возможно лишь в дискретные моменты времени.
- При выполнении соотношения

$$\sin u = \frac{g\omega\sqrt{p}}{\kappa[1 + e \cos(v - \varphi)]} \sin v, \quad (5.39)$$

что определяет однопараметрическое семейство решений.

При фиксированном u его можно задать также уравнением

$$A_7 \cos v + A_8 \sin v = A_9, \quad (5.40)$$

где

$$A_7 = e \cos \varphi \sin u, \quad A_8 = e \sin \varphi \sin u - g\omega\sqrt{p}/\kappa, \quad A_9 = -\sin u.$$

5.3 Решение уравнений при $\varkappa = 0$, $\mu > 0$

Пусть $C = 0, C_2 \neq 0, C_3 \neq 0$. Тогда из второго уравнения (4.8) находим r , а из первого — d :

$$r = -\sqrt[3]{C_3/C_2}, \quad d = -C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - C_0 + r^2}. \quad (5.41)$$

Замечание. В гелиоцентрическом случае можно (5.41) заменить на

$$r = g, \quad d = -2C_1. \quad (5.42)$$

Действительно, неравенство нулю величин C_2, C_3 влечет $r = g$, так что $C_0 = r^2$. Теперь из первого соотношения (4.8) вытекает второе соотношение (5.42).

Если использовать метод Лапласа, то дальше надо умножить третье уравнение (4.1) скалярно на $\dot{\mathbf{D}}$ и получить \dot{d} после преобразований:

$$2\dot{\mathbf{D}}^2 \dot{d} = -\dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{D}}d - \dot{\mathbf{D}}\ddot{\mathbf{g}} - \frac{\kappa^2}{r^3}\dot{\mathbf{D}}\mathbf{g}. \quad (5.43)$$

Первое и второе из уравнений (4.1) решают задачу определения положения и скорости небесного тела:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + \mathbf{D}d, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{g}} + \dot{\mathbf{D}}d + \mathbf{D}\dot{d}. \quad (5.44)$$

Если использовать метод ПВД, то следует умножить третье уравнение (4.2) скалярно на \mathbf{T} и получить \dot{d} :

$$2\mu\dot{d} = -\dot{\mu}d - \mathbf{T}\ddot{\mathbf{g}} - \frac{\kappa^2}{r^3}\mathbf{T}\mathbf{g}. \quad (5.45)$$

Первое и второе из уравнений (4.2) решают задачу определения положения и скорости небесного тела:

$$\mathbf{r} = \mathbf{g} + d\mathbf{D}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{g}} + \dot{d}\mathbf{D} + \mu d\mathbf{T}. \quad (5.46)$$

Пусть $C = C_2 = C_3 = 0$. Соотношения (4.6) показывают, что векторы $\mathbf{D}, \dot{\mathbf{D}}, \ddot{\mathbf{D}}, \mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}, \ddot{\mathbf{g}}$ лежат в одной плоскости (в частности, этот случай имеет место для орбиты, лежащей в плоскости эклиптики). Следовательно, система (4.1) содержит 6 (в скалярной форме) уравнений с 7 неизвестными: d, \dot{d}, \ddot{d} плюс по 2 компоненты векторов $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$. Орбиту определить нельзя.

То же верно и для системы (4.2), поскольку $\mathbf{r} \times \mathbf{M} = 0$, а векторы $\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}$ лежат в одной плоскости.

Задачи к главе 5

Задача 5.1. Показать, что для двух круговых орбит одинакового радиуса система уравнений (5.11) имеет однопараметрическое множество решений $u = v$.

Задача 5.2. Показать, что для двух круговых орбит разного радиуса система уравнений (5.11) имеет четыре решения:

$$\begin{aligned} \cos v &= \frac{k_1 r}{\sqrt{g^2 + gr + r^2}}, & \sin v &= k_2 \sqrt{\frac{g^2 + gr}{g^2 + gr + r^2}}, \\ \cos u &= \frac{k_1 g}{\sqrt{g^2 + gr + r^2}}, & \sin u &= k_2 \sqrt{\frac{gr + r^2}{g^2 + gr + r^2}}, \end{aligned}$$

где $k_1 = \pm 1, k_2 = \pm 1$.

Задача 5.3. Показать, что в случае круговой орбиты E уравнения (5.11) принимают вид

$$\cos u = \frac{g}{r} \cos v + \frac{eg \sin(v - \varphi)}{p} \sin v, \quad \sin u = \frac{r}{\sqrt{gp}} \sin v.$$

Задача 5.4. Показать, что в условиях предыдущей задачи соотношение $1 - \cos^2 u - \sin^2 u = 0$ приводит к одному уравнению относительно одной неизвестной v :

$$\begin{aligned} \frac{p^4}{r^2} = \frac{g^2 p^4}{r^4} \cos^2 v + \frac{2eg^2 p^3}{r^3} \sin(v - \varphi) \cos v \sin v + \\ + \left[\frac{p^3}{g} + \frac{e^2 g^2 p^2}{r^2} \sin^2(v - \varphi) \right] \sin^2 v. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Задача 5.5. Показать, что соотношение (5.47) равносильно тригонометрическому уравнению четвертой (а не шестой, как кажется с первого взгляда) степени $P(v) = 0$, где

$$P(v) = \frac{1}{4} g^2 (B_4 + B_3 + B_2 + B_1 + B_0). \quad (5.48)$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_4 &= 2e^2 \cos(4v - 2\varphi), \\ B_3 &= (2e + e^3) \cos(3v - \varphi) + e^3 \cos(3v - 3\varphi), \\ B_2 &= \left(2 + 5e^2 - 2\frac{p^3}{g^3} \right) \cos 2v + \\ &\quad + e^2 \left[5 + e^2(1 + \cos 2\varphi) - 2\frac{p^2}{g^2} \right] \cos(2v - 2\varphi), \\ B_1 &= 12e \cos \varphi \cos v + e \left[2 + e^2(7 + 6 \cos 2\varphi) - 8\frac{p^2}{g^2} \right] \cos(v - \varphi) + \\ &\quad + e^3 \cos(v + \varphi), \\ B_0 &= 2 - 4\frac{p^2}{g^2} + 2\frac{p^3}{g^3} + e^2 \left(7 + 5 \cos 2\varphi - 2\frac{p^2}{g^2} \right) + e^4(1 + \cos 2\varphi). \end{aligned}$$

Указание. Воспользоваться формулой $p/r = 1 + e \cos(v - \varphi)$.

Задача 5.6. Показать, что при $C = 0, C_2 \neq 0, C_3 \neq 0$ в гелиоцентрическом случае уравнения (4.8) имеют решением

$$r = g = -\sqrt[3]{C_3/C_2}, \quad d = -2C_1.$$

Задача 5.7. Пусть $\mu = 0$. Обозначим через \mathbf{T} предельное положение орта касательной в картинной плоскости. Показать, что отношение коэффициентов C_2, C_3 , определяемых формулами (4.16), зависит от предельного положения \mathbf{T} , если $\mathbf{g}, \ddot{\mathbf{g}}$ неколлинеарны.

Уравнения метода ПВД теряют смысл.

Задача 5.8. Пусть в условиях предыдущей задачи векторы $\mathbf{g}, \ddot{\mathbf{g}}$ коллинеарны, $\ddot{\mathbf{g}} = A\mathbf{g}$. Показать, что отношение коэффициентов C_2, C_3 , определяемых формулами (4.16), *не зависит* от предельного положения \mathbf{T} .

Уравнения метода ПВД сохраняются. Можно положить в (4.16), например, $\mathbf{D} \times \mathbf{T} = \mathbf{g}/g^2$ и получить

$$C_2 = A, \quad C_3 = \kappa^2.$$

Замечание. Векторы $\mathbf{g}, \ddot{\mathbf{g}}$ коллинеарны, если справедливы уравнения (3.2).

Глава 6

Эфемеридное значение параметров видимого движения

6.1 Вычисление параметров видимого движения при известной орбите

Системы уравнений прямых методов (4.1, 4.2) легко обращаются [19] и могут служить для решения обратной задачи — определения параметров движения небесного тела для любого момента времени, если в этот момент известны векторы $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}$, характеризующие гелиоцентрическое движение объекта, и $\mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}, \ddot{\mathbf{g}}$, описывающие гелиоцентрическое движение наблюдателя. Дадим сводку формул решения обратной задачи по [11]. Перепишем системы уравнений (4.1, 4.2) в виде

$$\begin{aligned}\mathbf{r} - \mathbf{g} &= \mathbf{d} = d\mathbf{D} \\ \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{g}} &= \dot{\mathbf{d}} = \dot{d}\mathbf{D} + d\dot{\mathbf{D}} \\ \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{g}} &= \ddot{\mathbf{d}} = \ddot{d}\mathbf{D} + 2\dot{d}\dot{\mathbf{D}} + d\ddot{\mathbf{D}}.\end{aligned}\tag{6.1}$$

Мы сознательно не пользуемся уравнениями движения, позволяющими избавиться от вторых производных, поэтому соотношения (6.1) годятся и для возмущенного движения.

Из первого соотношения (6.1) получаем расстояние и направление от наблюдателя до объекта:

$$d^2 = (\mathbf{r} - \mathbf{g})^2, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{d}(\mathbf{r} - \mathbf{g}),\tag{6.2}$$

что определяет сферические координаты:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{D_1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}, & \sin \alpha &= \frac{D_2}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}, \\ \cos \delta &= \sqrt{D_1^2 + D_2^2}, & \sin \delta &= D_3.\end{aligned}\quad (6.3)$$

Здесь и ниже мы пользуемся формулами дифференциальной геометрии на сфере, собранными в §2.6.

Перемножая скалярно первое и второе соотношение (6.1), определяем \dot{d} :

$$\dot{d} = \frac{1}{d}(\mathbf{r} - \mathbf{g})(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{g}}). \quad (6.4)$$

Первые производные направляющих косинусов вычисляются по формуле

$$\dot{\mathbf{D}} = \frac{1}{d}(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{g}} - d\dot{\mathbf{D}}), \quad (6.5)$$

что позволяет определить параметры первого порядка:

$$\begin{aligned}\mu &= |\dot{\mathbf{D}}|, & \mathbf{T} &= \frac{1}{\mu}\dot{\mathbf{D}}, & \mathbf{M} &= \mathbf{D} \times \mathbf{T}, \\ \mu \cos \psi &= \frac{\dot{D}_3}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}, & \mu \sin \psi &= \frac{D_1\dot{D}_2 - D_2\dot{D}_1}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}, \\ \dot{\alpha} &= \frac{D_1\dot{D}_2 - D_2\dot{D}_1}{D_1^2 + D_2^2}, & \dot{\delta} &= \frac{\dot{D}_3}{\sqrt{D_1^2 + D_2^2}}.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Домножим третье уравнение (6.1) скалярно на \mathbf{D} :

$$\ddot{d} + d\mathbf{D}\ddot{\mathbf{D}} = \mathbf{D}(\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{g}}).$$

Соотношения (2.45) позволяют избавиться от вторых производных вектора: \mathbf{D}

$$\ddot{d} = \mathbf{D}(\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{g}}) + d\dot{\mathbf{D}}^2. \quad (6.7)$$

Вторые производные направляющих косинусов выводим из третьего соотношения (6.1):

$$\ddot{\mathbf{D}} = \frac{1}{d}(\ddot{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{g}} - \ddot{d}\mathbf{D} - 2\dot{d}\dot{\mathbf{D}}), \quad (6.8)$$

откуда получаем параметры второго порядка:

$$\mu\dot{\mu} = \dot{D}_1\ddot{D}_1 + \dot{D}_2\ddot{D}_2 + \dot{D}_3\ddot{D}_3, \quad \mu^3\kappa = \begin{vmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \\ \dot{D}_1 & \dot{D}_2 & \dot{D}_3 \\ \ddot{D}_1 & \ddot{D}_2 & \ddot{D}_3 \end{vmatrix}, \quad c = \sqrt{1 + \kappa^2},$$

$$\begin{aligned} (D_1^2 + D_2^2)^2 \ddot{\alpha} &= (D_1^2 + D_2^2)(D_1\ddot{D}_2 - D_2\ddot{D}_1) - \\ &\quad - 2(D_1\dot{D}_1 + D_2\dot{D}_2)(D_1\dot{D}_2 - D_2\dot{D}_1), \\ (D_1^2 + D_2^2)^{3/2} \ddot{\delta} &= (D_1^2 + D_2^2)\ddot{D}_3 + D_3\dot{D}_3^2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Таким образом, имеем все величины, характеризующие геоцентрическое движение небесного тела в системе координат **I, J, K**. При необходимости все эти параметры можно вычислить и для топоцентра.

6.2 Вычисление топоцентрических ПВД

Рассмотренный в предыдущем параграфе алгоритм вычисления параметров, характеризующих геоцентрическое движение небесного тела, полезен при сравнении результатов наблюдений (О), приведенных к геоцентру, с геоцентрической эфемеридой (С) для наблюдаемых объектов с известными элементами орбиты. Обычно такое сравнение величин (О-С) по каждому параметру видимого движения служит контролем качества выполненных наблюдений и может использоваться также при решении различных исследовательских задач, например, при моделировании наблюдений для изучения методических ошибок, связанных с той или иной аппроксимацией сферических координат. Если же речь идет об организации новых наблюдений, то необходимо иметь топоцентрическую эфемериду, т.е. вычислить топоцентрические параметры видимого движения. Для сферических координат α, δ переход от топоцентра к геоцентру и обратно обычно сводится к процедуре вычисления параллактических поправок при известном расстоянии до небесного тела. Что касается величин $\dot{\alpha}, \dot{\delta}, \ddot{\alpha}, \ddot{\delta}$ и ПВД, то для них столь простое решение далеко не очевидно.

Проведем вычисления топоцентрических параметров видимого движения небесного тела с известными элементами орбиты или,

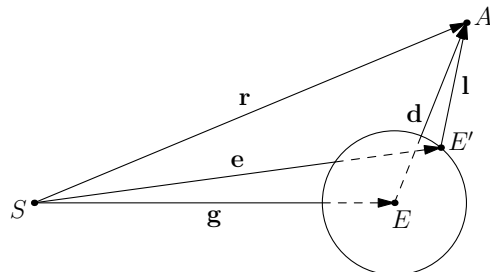


Рис. 6.1: К учету конечности размеров Земли.

что то же, \mathbf{r} и $\dot{\mathbf{r}}$, повторив вычисления по алгоритмам §6.1 с заменой гелиоцентрических векторов центра Земли $\mathbf{g}, \dot{\mathbf{g}}, \ddot{\mathbf{g}}$ на гелиоцентрические векторы наблюдателя $\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, \ddot{\mathbf{e}}$, см. рис. 6.1. В результате вместо векторов $\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}, \ddot{\mathbf{d}}$ будут получены компоненты топоцентрических векторов $\mathbf{l}, \dot{\mathbf{l}}, \ddot{\mathbf{l}}$ небесного тела и топоцентрические значения производных сферических координат, направляющих косинусов и ПВД. Необходимые векторы $\mathbf{e}, \dot{\mathbf{e}}, \ddot{\mathbf{e}}$ можно вычислить, если известны топоцентрические координаты Солнца и их первые и вторые производные. Обычно эфемеридные программные системы, например, EROS, позволяют с высокой точностью вычислять положение и скорость Солнца как объекта наблюдений для любой обсерватории с известными геоцентрическими координатами g, λ, φ' . Вычислив таким образом топоцентрические векторы Солнца $-\mathbf{e}, -\dot{\mathbf{e}}, -\ddot{\mathbf{e}}$ и поменяв у них знаки на противоположные, следует воспользоваться формулами, приведенными в §6.1.

6.3 Эфемериды нового типа: не только положения небесного тела, но и его ПВД

На основе результатов, приведенных в §§6.1 и 6.2, можно предложить новый подход к эфемеридному обеспечению современных позиционных наблюдений малых тел Солнечной системы.

Традиционно эфемеридная задача сводится к вычислению для заданных моментов времени положений небесного тела, орбита которого известна, для наблюдателя, находящегося на Земле в точке

с данными геоцентрическими координатами. Необходимость расчета сферических координат известного объекта для организации его наблюдений остается всегда, но к этим эфемеридным координатам уже сейчас требуется дополнительно вычислять скорости их изменения $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$ или параметры видимого движения первого порядка μ , ψ для выполнения слежения за объектом. Кроме того, при наблюдениях возникает проблема отождествления небесных тел, случайно оказавшихся в одном поле зрения с программным объектом. Поскольку современные ПЗС-наблюдения позволяют легко получать серию близких по времени координат небесного тела, вычисление величин, характеризующих скорость изменения координат, не представляет труда: линейная аппроксимация сферических координат наряду с нормальным местом даст нам наблюдаемые значения $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$ или μ , ψ в реальном масштабе времени непосредственно у телескопа. Эти величины и следует сравнить с их расчетными значениями, приведенными в эфемеридах. Как правило, решение вопроса, какой из объектов является заданным программой наблюдений, осуществляется по разностям $(O-C)_{\alpha}$, $(O-C)_{\delta}$ наблюдаемых и вычисленных координат. Эти разности — при хорошей системе орбитальных элементов, правильном учете возмущений и высокой точности наблюдений — должны быть практически нулевыми. Но в тех случаях, когда программный объект сближается с каким-нибудь другим небесным телом, случайно оказавшимся в поле зрения, правильное отождествление наблюдений возможно только на основе анализа разностей $(O-C)$ для величин $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$, μ , ψ , которые для каждого объекта будут индивидуальны.

Все вышеизложенное становится обязательным, когда элементы орбиты небесного тела известны с большими ошибками. Эфемеридные значения координат объекта определяются ненадежно, и наблюдателю придется искать объект среди других в обширной области неба, площадью до нескольких квадратных градусов. Лучшим способом отождествления программного объекта становится анализ вычисленных для него эфемеридных величин $\dot{\alpha}$, $\dot{\delta}$ или μ , ψ и их сравнение с аналогичными величинами, полученными из обработки наблюдений всех зафиксированных ПЗС-матрицей небесных объектов. Наш опыт такой идентификации показывает, что использование в этой задаче параметров видимого движения или первых производных сферических координат позволяет решить ее более надежно и уверенно. Оказалось, что влияние ошибок элемен-

тов первоначальной орбиты на вычисляемые по этим элементам параметры μ, ψ и $\dot{\alpha}, \dot{\delta}$ существенно меньше, чем на вычисляемые координаты α, δ .

Таким образом, формат традиционных эфемерид небесных тел — координаты, расстояние, блеск, фазовый угол, элонгация в заданный момент времени — следует дополнить величинами $\dot{\alpha}, \dot{\delta}, \ddot{\alpha}, \ddot{\delta}, \mu, \psi, \dot{\mu}, \kappa, c, \dot{d}, \ddot{d}$, как это сделано в программной системе ЭПОС (Эфемеридная Программа для работ по изучению Объектов Солнечной системы), разработанной в Пулковской обсерватории В.Н.Львовым и его коллегами [42].

6.4 Краткий обзор современных эфемеридных систем

Программные системы для вычисления эфемерид небесных тел можно разделить на те, что обеспечивают решение задач на профессиональном уровне, и на такие, которые предназначены для любителей астрономии. В настоящее время любителям посредством Интернета легко доступна полная информация о наблюдаемых небесных телах, о вновь открываемых малых планетах и кометах, об эфемеридах для продолжения их наблюдений, об интересных сближениях астероидов между собой и покрытиях астероидами звезд, а также о многом другом. Достаточно побывать на интернетовских сайтах Международного центра малых планет или ведущих обсерваторий мира, чтобы убедиться в этом. Следует заметить, что современный зарубежный любитель астрономии в США, Японии или Европе, который интересуется наблюдениями астероидов или комет, имея небольшой телескоп-рефлектор с зеркалом 20-30 см, но вооруженный хорошей ПЗС-матрицей, компьютером и соответствующим астрономическим программным обеспечением для анализа ПЗС-кадров с изображениями звезд и подвижных небесных объектов, астрометрической редукции их положений и звездным каталогом, содержащим координаты миллионов опорных звезд, работает на профессиональном уровне, снабжая международную базу данных результатами своих наблюдений. Чтобы удовлетворить запросы многочисленных астрономов-любителей, наблюдающих малые тела под эгидой Международного астрономического союза, была разработана программная система GUIDE, решающая тра-

диционные эфемеридные задачи обычным образом. Открытый доступ к эфемеридам имеется в Международном центре малых планет, в NASA и во многих национальных обсерваториях. Так что астроному-любителю не приходится вести долгие поиски того, что сегодня интересно наблюдать на небе из известных небесных тел.

Профессиональные астрономы стремятся обеспечить решение своих задач, в том числе и эфемеридных, созданием специальных программных средств для обработки наблюдений небесных объектов, а это автоматически предполагает необходимость вычисления их эфемеридных положений со всей возможной точностью. Но пока ни любительские, ни профессиональные системы не вычисляют параметры движения или первые и вторые производные, как это описано в §6.3, кроме программной системы ЭПОС, созданной и поддерживаемой в последние годы в ГАО РАН (Пулковская обсерватория). ЭПОС является развитием программной системы „Церера“, которая была создана в свое время в Институте теоретической астрономии и широко распространялась среди профессионалов и любителей в 1985-1995 гг.

Программная система ЭПОС обеспечивает:

- хранение, обработку и использование данных об объектах Солнечной системы и обсерваториях, в которых ведутся их наблюдения;
- вычисление разнообразных по типу и точности эфемерид объектов Солнечной системы — больших и малых планет, комет;
- анализ точности выполненных позиционных наблюдений указанных объектов;
- моделирование движения небесных тел в пространстве и видимого движения на фоне звезд.

ЭПОС работает в одном из девяти разделов: „Каталог объектов“, „Эфемериды“, „Сравнение наблюдений и вычислений“, „Каталог обсерваторий“, „Небо“, „Кадр“, „Орбитальное движение“, „Покрытия“ и „Определение орбит“.

Подробное описание возможностей ПС ЭПОС можно найти в „Руководстве пользователя“ [42].

Заключение

Мы рассказали о современном состоянии прямых методов определения орбит. Опишем перспективы дальнейших исследований в этой области.

Не вызывает сомнений то, что исследования прямых методов определения орбит следует продолжать как в области их практического применения в задачах прикладной небесной механики, так и в теоретическом аспекте.

Во-первых, еще предстоит найти корректную процедуру статистической обработки позиционных наблюдений, которая позволила бы с минимальной методической ошибкой вычислять первые и вторые производные экваториальных координат естественных и искусственных небесных тел по аргументу времени на основе плотного равноточного, но ограниченного ряда наблюдений. Это важно, поскольку быстро прогрессирующая техника ПЗС-наблюдений различных небесных тел уже сейчас доставляет чрезвычайно плотные ряды положений $\{\alpha_j, \delta_j\}$ с точностью, необходимой для определения орбит прямыми методами. Оснащение обсерваторий инструментами, позволяющими определять d и \dot{d} , позволит обходиться без измерений ПВД второго порядка.

Как отмечалось ранее, в некоторых случаях уже сейчас имеется возможность прямого получения высокоточных значений параметров видимого движения из обработки ПЗС-наблюдений. Работы в области анализа одноименных, близких по времени последовательных ПЗС-кадров с изображениями движущихся на фоне звезд небесных тел следует продолжать, и первые шаги в этом направлении уже сделаны в Пулковской обсерватории.

Во-вторых, необходимо оценить влияние случайных ошибок наблюдений на вычисляемые производные и конечный результат — элементы кеплеровой орбиты небесного тела. Здесь полезно исполь-

зовать современные достижения теории обработки временных рядов и вычислительной математики в области представления функций, заданных таблично, вместе с двумя их производными — с широким привлечением компьютерного моделирования и численных экспериментов.

В-третьих, необходимо подробно изучить видимое движение различных небесных тел на разных участках их движения по разнообразным орбитам и найти оценки корректности применения круговых, параболических и априорных орбит к реальному видимому движению небесного тела, наблюдения которого отягощены определенными ошибками. Речь идет о выяснении роли методической ошибки третьего типа. В этом случае дело существенно упрощается тем, что системы уравнений прямых методов легко обращаются и, как было показано в главе 6, позволяют по известным элементам кеплеровой орбиты описать видимое движение любого небесного тела для заданного положения наблюдателя.

Наконец, надлежит оценить сходимость процессов последовательных приближений, используемых при решении некоторых систем уравнений прямых методов определения орбит небесных тел.

Решение указанных задач значительно упрочит положение прямых методов определения орбит в арсенале орбитальных методов и обеспечит их широкое и правильное применение. Еще раз обратим внимание, что задача определения орбиты ИСЗ по наблюдениям, выполненным на борту другого спутника Земли, эквивалентна задаче определения орбиты астероида по наземным наблюдениям.

В заключение авторы считают своим приятным долгом искренне поблагодарить главного научного сотрудника ГАО РАН А.А.Киселева и ведущего научного сотрудника ГАО РАН В.Н.Львова за полезное обсуждение работы на разных этапах ее выполнения; коллектив Кафедры небесной механики Математикомеханического факультета Петербургского университета, где были представлены первые и все последующие результаты работы по исследованию прямых методов определения орбит; коллектив отдела небесной механики и астрометрии НИИ прикладной математики и механики Томского университета во главе с профессором Т.В.Бордовицкой за многолетнее плодотворное сотрудничество; заслуженного деятеля науки Ю.В.Батракова, доктора физ.-мат. наук В.А.Шора и сотрудников Лаборатории малых тел Солнечной системы ИПА РАН за постоянный интерес к нашей ра-

боте, поддержку и доброжелательные замечания, способствовавшие ее улучшению. Авторы признательны рецензентам профессору Ю.Д.Медведеву и доценту В.Б.Титову, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд ценных замечаний, а также научному сотруднику АИ СПбГУ В.Ш.Шайдулину за помощь в оформлении рукописи.

Литература

- [1] Бажинов И.К., Ястребов В.Д. Навигация в совместном полете космических кораблей *Союз* и *Аполлон*. М.: Машиностроение, 1978, 174 с.
- [2] Барабанов С.И. Наблюдения малых тел в околоземном космическом пространстве // Дисс. канд. физ.-мат. наук, 2001, Институт астрономии РАН, 148 с.
- [3] Барабанов С.И. и др. Обнаружение крупных тел в метеорных потоках за пределами земной атмосферы // Письма в Астрон. журн., 1996, Т. 22, № 12, с. 945-949
- [4] Берри А. Краткая история астрономии. М.-Л.: ОГИЗ-ГИТТЛ, 1946, 363 с.
- [5] Быков О.П. Применение метода Лапласа к определению мгновенных орбит спутников по одной фотографии со многими экспозициями // Труды Астрономической обсерватории Ленингр. ун-та, 1975, Т. 31, с. 217-227
- [6] Быков О.П. Использование нескольких последовательных фотографий спутника для определения его орбиты по методу Лапласа // Труды Астрономической обсерватории Ленингр. ун-та, 1978, Т. 34, с. 155-164
- [7] Быков О.П. Прямые методы определения мгновенных орбит спутников по фотографическим наблюдениям на короткой дуге, выполненным с одной станции // Труды Астрономической обсерватории Ленингр. ун-та, 1979, Т. 35, с. 179-197
- [8] Быков О.П. Использование оскулирующих спутниковых орбит, определяемых методом параметров видимого движения // Вестник Ленингр. ун-та, 1979, № 13, с. 99-109

- [9] Быков О.П. Определение орбит стационарных ИСЗ методом параметров видимого движения // Вестник Ленингр. ун-та, 1981, № 1, с. 95-99
- [10] Быков О.П. Прямые методы определения орбит ИСЗ из оптических и дальномерных наблюдений // Дисс. канд. физ.-мат. наук, 1983, ГАО РАН, 177 с.
- [11] Быков О.П. Определение орбит небесных тел прямыми методами // В сб. *Проблемы построения координатных систем в астрономии*, (серия *Проблемы исследования Вселенной*, вып. 12), Л.: изд. ГАО АН СССР, 1989, с. 328-356
- [12] Быков О.П. Фотографические наблюдения искусственных спутников Земли // В сб. *Астрофотография в исследовании Вселенной*, (серия *Проблемы исследования Вселенной*, вып. 13), Л.: изд. ГАО АН СССР, 1992, с. 69-89
- [13] Быков О.П. Наблюдения астрометрической космической системой *Струве* объектов, движущихся на фоне звезд // Публикация в отчете ГАО РАН *Научное обоснование КАС Струве*, разд. 6.3 главы VI, с. 115-124 и разд. 9.3 главы IX, с. 203-209; Пулково, 1995
- [14] Быков О.П. Идентификация подвижных небесных объектов, наблюдающихся космическим телескопом // В сб. *Околоземная астрономия (космический мусор)*, М.: 1998, с. 184-192
- [15] Быков О.П. Современные позиционные наблюдения малых тел Солнечной системы: состояние и перспективы // Труды IV съезда Астрон. общества, М.: 1998, с. 73-81
- [16] Быков О.П., Квапшин В.В. Анализ фотографических наблюдений кометы Стефана-Отермы с помощью оскулирующих орбит, вычисляемых по методу Лапласа // В сб. *Современная астрометрия*, ГАО АН СССР, 1987, с. 432-438
- [17] Быков О.П., Киселев А.А. Об определении параметров видимого движения спутника // Материалы IV научной конференции по математике и механике Томского ун-та, 1974, том II, с. 121-122

- [18] Быков О.П., Киселев А.А. Определение орбиты спутника по совместным фотографическим и лазерным наблюдениям с одной станции // Письма в Астрон. журн., 1977, Т. 3, № 5, с. 235-238
- [19] Быков О.П., Киселев А.А. Формулы перехода от кеплеровых элементов орбиты спутника к параметрам его видимого движения // Письма в Астрон. журн., 1978, Т. 4, № 1, с. 43-46
- [20] Быков О.П., Киселев А.А. Проблемы современной фотографической и ПЗС-астрометрии // В кн. *Современные проблемы и методы астрометрии и геодинамики*, СПб: 1996, с. 78-83
- [21] Быков О.П., Рыльков В.П. Использование аппроксимирующих полиномов для контроля фото- и ПЗС-наблюдений, выполненных на короткой дуге // В сб. *Изучение Земли как планеты методами астрономии, геофизики и геодезии* (Труды III Орловской конференции), Киев, 1994, с. 267-272
- [22] Быков О.П., Сафронов Ю.И., Кизюн Л.Н. Результаты анализа фотографических наблюдений геостационарных ИСЗ с помощью орбит метода параметров видимого движения // *Наблюдения искусственных небесных тел*, 1994, М.: № 88, с. 38-40
- [23] Быков О.П., Соловьев С.А. Результаты применения метода ПВД для определения орбит спутников Земли в условиях моделирования позиционных наблюдений с различной дисперсией их ошибок // В сб. *Наблюдения ИСЗ*, М.: Астросовет АН СССР, 1982, № 21, часть 1, с. 67-74
- [24] Быков О.П. и др. Наблюдения объектов пояса Койпера на БТА // Письма в Астрон. журн., 1998, Т. 24, № 3, с. 220-225
- [25] Бэр М.Г., Полешиков С.М. Применение сплайн-интерполяции в методе Лапласа // ВИНТИ, 1987, депонент № 3302-87, 13 с.
- [26] Вильев М.А. Аналитическое решение основной задачи теоретической астрономии // Труды Астрономической обсерватории Ленингр. ун-та, 1938, Т. 9, с. 9-78
- [27] Горбацкий В.Г. Лекции по истории астрономии. СПб: изд. СПбГУ, 2003, 256 с.

- [28] Дубяго А.Д. Определение орбит. М.: ГИТТЛ, 1949, 444 с.
- [29] Жаров В.Е. Сферическая астрономия. Фрязино: ВЕК2, 2006, 480 с.
- [30] Ивановская К.П. Определение орбиты ИСЗ по методу Лапласа // Дипломная работа (рук. В.Ф.Проскурин), Кафедра небесной механики Ленинградского гос. университета, 1963, 45 с.
- [31] Киселев А.А. Применение метода выравнивания наблюдений для оценки точности положений ИСЗ // Бюллетень станций оптического наблюдения ИСЗ, 1962, № 2, с. 16-24
- [32] Киселев А.А. Векторная интерпретация основных методов фотографической астрометрии // Астрон. журн., 1965, Т. 42, вып. 2, с. 452-463
- [33] Киселев А.А. Теоретические основания фотографической астрометрии, 1989, М.: Наука, 264 с.
- [34] Киселев А.А., Быков О.П. Определение орбиты спутника по одной фотографии со многими экспозициями // Астрон. журн., 1973, Т. 50, вып. 6, с. 1298-1308
- [35] Киселев А.А., Быков О.П. Определение эллиптической орбиты спутника по параметрам его видимого движения // Астрон. журн., 1976, Т. 53, вып. 4, с. 879-888
- [36] Киселев А.А., Быков О.П. Определение предварительной орбиты сближающегося с Землей астероида по наблюдениям его координат и скоростей их изменения // Труды Всесоюзного совещания *Астероидная опасность-91*, ИТА РАН, 1992, с. 107-110
- [37] Киселев А.А., Быков О.П., Ягудин Л.И. Алгоритмы метода параметров видимого движения для определения орбит ИСЗ и параметров слежения за спутниками // Известия ГАО АН СССР в Пулкове, 1980, № 198, с. 139-149
- [38] Киселев А.А., Кияева О.В. Определение орбиты визуально-двойной звезды методом параметров видимого движения из наблюдений на короткой дуге // Астрон. журн., 1980, Т. 57, вып. 6, с. 1227-1239

- [39] Клокачева М.Ю. Об определении предварительной орбиты методом Лапласа // Астрон. журн., 1991, Т. 68, вып. 4, с. 863-871
- [40] Кононович Э.В., Мороз В.И. Общий курс астрономии. М.: УРСС, 2001, 544 с.
- [41] Крылов А.Н. Беседы о способах определения орбит комет и планет по малому числу наблюдений // Собрание трудов акад. А.Н.Крылова, 1936, Т. 6, с. 1-149
- [42] Львов В.Н., Смахачева Р.И., Цекмейстер С.Д. ЭПОС — эфемеридная программа для объектов Солнечной системы, 2004, инструкция пользователя, изд. ГАО РАН, с. 1-28
- [43] Новиков С.П., Фоменко А.Т. Элементы дифференциальной геометрии и топологии. М.: Наука, 1987, 432 с.
- [44] Панова Г.В., Сыщенко Т.Е., Фираго Б.А., Щеголев Д.Е. Наблюдения второго искусственного спутника Земли (1957 β) на станции № 039 (Пулково) // Бюллетень станций оптического наблюдения ИСЗ, 1959, № 6, с. 1-5
- [45] Погорелов А.В. Лекции по дифференциальной геометрии. Харьков: изд. Харьковского госуниверситета, 1961, 166 с.
- [46] Рапеевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.: ЛКИ, 2008, 432 с.
- [47] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968, 805 с.
- [48] Титов В.Б. Об алгоритме метода Лапласа для определения орбит из позиционных наблюдений // Труды Астрономической обсерватории Ленингр. ун-та, 1982, Т. 38, с. 181-188
- [49] Херрик С. Астродинамика, Т. 2, перевод с англ. под ред. В.А.Сарычева. 1977, М.: Мир, 263 с.
- [50] Холшевников К.В., Титов В.Б. Задача двух тел. СПб: изд. СПбГУ, 2007, 180 с.
- [51] Энеев Т.М., Платонов А.К., Казакова Р.К. Определение параметров орбиты ИСЗ по данным наземных измерений// В сб. *Искусственные спутники Земли*, 1960, М.: вып. 4, с. 43-55

- [52] Эскобал П. Методы определения орбит. 1970, М.: Мир, 472 с.
- [53] Barlier F. Détermination des éléments instantanés d'un satellite artificiel à partir de l'observation d'un passage // Space Res., 1961, V. 2, p. 83-90
- [54] Bykov O.P. On the Accuracy of CCD and Photographic Observations of Asteroids and Their Current Orbit Determinations // Proceedings of the IAU Symp. 167, 1995, p. 351-352
- [55] Bykov O.P. Modern CCD Observations of Moving Celestial Objects: Algorithms and Software for Interactive Processing // Astronomical Data Analysis Software and Systems VIII, ASP Conference Series, V. 172, 1999, p. 353-356
- [56] Bykov O.P., Komarov V.V. On the determination of a circular asteroid orbit with the use of its single CCD-observation (α , δ , $\alpha\cdot$, $\delta\cdot$, UT) // Astron. and Astroph. Transactions, 1995, V. 8, p. 323-324
- [57] Bykov O.P., Komarov V.V. On the possibility of an asteroid classification by means of a circular orbit obtained with the use of its single CCD-observation // Astron. and Astroph. Transactions, 1995, V. 8, p. 325-326
- [58] Bykov O.P., Komarova N.O. New method for asteroid identification with the use of Pulkovo Apparent Motion Parameters // Proceedings of Asteroids, Comets, Meteors (ACM 2002), 2002, Berlin, Germany, p. 417-420
- [59] Bykov O.P., L'vov V.N. The information status of the dense series of topocentric positions of celestial bodies derived from CCD observations // Baltic Astronomy, 1997, V. 6, N 2, p. 359
- [60] Bykov O.P. and others. Accuracy of positional CCD observations of Numbered Minor Planets in years 1999-2001 // Proceedings of Asteroids, Comets, Meteors (ACM 2002), 2002, Berlin, Germany, p. 413-415
- [61] Danjon A. Deux modes d'application de la méthode de Laplace pour la détermination des orbites (méthode des positions fictives, méthode des variations // Bull. astr., 1951, T. 16, p. 85-110

- [62] Gauss C.F. Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. Leipzig, Teubner (Werke, Bd VII, II Aufl., 1906, S. 1-261)
- [63] Gehrels T. Scanning with charge-coupled devices // Space Sci. Rev., 1991, V. 58, p. 347-375
- [64] Kovalevsky J. Sur la détermination des orbites elliptiques par la méthode de Laplace // 1957, Bull. astron., T. XXI, fasc. III, p. 161-193
- [65] Kovalevsky J. Valeurs des éléments moyens d'un satellite déduits de l'observation d'un passage // Space Res., 1961, V. 2, p. 91-101
- [66] Laplace P.S. Mémoire sur la détermination des orbites des comètes. Mém. Acad. Paris, 1780-1784
- [67] Leuschner A.O. A short method of determining orbits from three observations // Publ. Lick Observatory, 1902, V. 7, part 1
- [68] Rumjantsev V. Parameters of Apparent Motion of Asteroid which collide with the Earth // Proceedings of Asteroids, Comets, Meteors (ACM 2002), 2002, Berlin, Germany, p. 323-331
- [69] Taff L.G., and Hall D.L. The use of angles and angular rates // Celestial Mechanics, 1977, V. 16, p. 481-488; 1980, V. 21, p. 280-290
- [70] Vaisala Y. Über die Laplacesche Methode der Bahnbestimmung // Ann. Univ. Fennicae Aboensis, 1924, Ser. A, T. II, N 2, p. 1-19
- [71] Vaisala Y., and Oterma L. Formulae and directions for computing the orbits of minor planets and comets // Ann. Univ. Turkuensis, 1951, Ser. A, T. X, N 3, p. 1-32
- [72] Weber R. Passive ground-based electro-optical detection of AES. Optical Engineering, 1979, V. 18, N 1, p. 89-91