

Санкт-Петербургский государственный университет

Н.П. Питьев, В.Б. Титов, К.В. Холшевников

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2002

ББК 22.6

ПЗ5

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук В.А. Антонов
(ГАО РАН),
д-р физ.-мат. наук, проф. В.В. Витязев
(С.-Петербур. гос. ун-т)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
С.-Петербургского государственного университета*

Питьев Н.П., Титов В.Б., Холшевников К.В.

ПЗ5 **Фигуры равновесия небесных тел: Учеб. пособие. –**
СПб., 2002. – 108 с.

ISBN 5-87403-037-9

В учебном пособии приведены классические результаты теории фигур равновесия небесных тел. Описаны общие свойства фигур равновесия, исследованы модели жидких, однородных, вращающихся равновесных тел. Рассмотрено применение теории возмущений для получения фигур равновесия, близких к известным. Равновесные неоднородные фигуры рассмотрены на примерах моделей с политропным и степенным распределением плотности. Подробно изложены теория Ляпунова и ее современные обобщения.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов и научных сотрудников, занимающихся в областях звездной динамики и небесной механики.

ББК 22.6

© Н.П.Питьев, В.Б.Титов,
К.В.Холшевников, 2002

© С.-Петербургский
гос. университет, 2002

ISBN 5-87403-037-9

Содержание

Введение	6
Гравитационный потенциал и его свойства	8
1.1 Гравитационное поле точки	8
1.2 Гравитационное поле тела	10
1.3 Симметрия	12
1.4 Уравнения Лапласа и Пуассона, формула Гаусса	15
1.5 Потенциальная энергия гравитирующих масс	19
Некоторые общие свойства фигур равновесия вращающихся жидких масс	23
2.1 Равномерно вращающиеся жидкости	23
2.2 Характер установившегося движения жидкости	24
2.3 Совпадение поверхностей уровня давления, плотности и потенциала силы тяжести	26
2.4 Теорема Лихтенштейна	27
2.5 Основной параметр	29
2.6 Теорема Пуанкаре о верхнем пределе угловой скорости вращения равновесной фигуры	31
2.7 Модель Гюйгенса–Роша	32

Притяжение эллипсоидальных тел	39
3.1 Эллипсоидальный слой	39
3.2 Теорема Ньютона	41
3.3 Софокусные эллипсоиды	41
3.4 Софокусные эллипсоидальные слои	43
3.5 Первая теорема Шаля	44
3.6 Вторая теорема Шаля	45
3.7 Теорема Лапласа	45
3.8 Притяжение однородного эллипсоида для внутренней точки	46
3.9 Притяжение однородного эллипсоида для внешней точки	51
Эллипсоидальные фигуры равновесия однородной, твердотельно вращающейся жидкости	55
4.1 Существование равновесных эллипсоидов	55
4.2 Эллипсоиды Маклорена	59
4.3 Эллипсоиды Якоби	61
4.4 Связь параметров эллипсоида с моментом вращения, плотностью и массой	62
4.5 Об устойчивости равновесных фигур	65
Теория Ляпунова	71
5.1 Ряд Ляпунова	71
5.2 Основные уравнения	76
5.3 Разделение переменных	77
5.4 Первые приближения	82
5.4.1 Сферическое приближение	82
5.4.2 Линейное приближение	82
5.4.3 Квадратичное приближение	83
5.4.4 Приближения высших порядков	87
5.5 Модель Ньютона — постоянная плотность	87
5.5.1 Обращение оператора Клеро	87
5.5.2 Линейное приближение	88

5.5.3	Квадратичное приближение	88
5.5.4	Эллипсоиды Маклорена	89
5.6	Модель Гюйгенса — сосредоточенная в центре масса	89
5.6.1	Обращение оператора Клеро	89
5.6.2	Линейное приближение	90
5.6.3	Квадратичное приближение	90
5.7	Ступенчатая плотность	91
5.7.1	Обращение оператора Клеро	91
5.7.2	Линейное приближение	96
5.7.3	Квадратичное приближение	97
5.8	Сходимость рядов Ляпунова	98
5.8.1	Эллипсоиды Маклорена	98
5.8.2	Фигуры Гюйгенса–Роша	99
	Исторический очерк	101
	Литература	104

ВВЕДЕНИЕ

Начало изучения фигур равновесия небесных тел относится еще к XVII и XVIII вв., когда зародилась классическая теория фигур равновесия вращающихся гравитирующих жидких масс в трудах И. Ньютона, Х. Гюйгенса, К. Маклорена, П. Лапласа и др. применительно к фигурам планет Солнечной системы. Исследования были продолжены в работах К. Якоби, А. Пуанкаре, Дж. Дарвина, К. Шварцшильда, А. М. Ляпунова, поставивших и рассмотревших вопросы не только о форме, но и об устойчивости равновесных тел. Теория равновесных фигур с учетом сжимаемости среды нашла применение для звезд. Во второй половине XX в. с развитием внегалактической астрономии становится все более ясным, что почти все разновидности фигур равновесия жидких масс, полученные ранее чисто теоретически, находят свое воплощение в наблюдаемых в космосе фигурах звезд, планет и галактик. Нужно иметь в виду существенное отличие от жидких масс многих гравитирующих систем. Галактики, звездные скопления, протопланетные пылевые облака имеют то характерное отличие, что длина свободного пробега звезды или пылинки оказывается порядка размеров системы или более (*Антонов, 1975*). Тем не менее, сходство с такими привычными, уже классическими объектами теории равновесия, как планеты и нормальные звезды, во многих случаях все же очень большое.

Сложнее обстоит дело для сжимаемой среды. Общие результаты известны почти исключительно для случая малых угловых скоростей ω . Теория А. Клеро является теорией первого порядка относительно ω^2 , точнее относительно безразмерного параметра $q = 3\omega^2/(4\pi G\bar{\rho})$, где G — постоянная тяготения, $\bar{\rho}$ — средняя плотность. Частные случаи теории Клеро для политропных фигур рас-

смаатривали Дж. Джинс, С. Чандрасекар и др. Опираясь на теорию Ляпунова, результаты можно распространить до произвольного порядка по q .

Большое внимание, которое было уделено в классических исследованиях случаю однородной несжимаемой жидкости, объясняется наличием удобных точных моделей — эллипсоидов Маклорена и Якоби, которые по крайней мере качественно применимы к реальным небесным телам. Многие другие известные модели могут рассматриваться как возмущенные эллипсоиды.

С другой стороны, изучение устойчивости однородных моделей подняло ряд глубоких и интересных вопросов механики и математики. Разработанные попутно понятия имеют область применения, далеко выходящую за рамки первоначально поставленной задачи. Интересующимся рекомендуем работы (*Антонов, 1975; Поляченко и Фридман, 1976; Фридман, 1975; Fridman and Polyachenko, 1984*).

Открытие А.М. Ляпуновым (*Ляпунов, 1959a*) и А. Пуанкаре (*Пуанкаре, 2000*) неэллипсоидальных фигур относительного равновесия, исследование их устойчивости дало толчок появлению и развитию новых идей, понятий и методов (теория устойчивости Ляпунова, точки бифуркации решений, нелинейные интегральные уравнения и т.д.) в математике, механике, физике, астрономии.

Следует тем не менее отметить, что проблема нахождения и исследования фигур равновесия жидкой массы все еще далека от полного решения.

Глава 1

Гравитационный потенциал и его свойства

1.1 Гравитационное поле точки

По закону всемирного тяготения материальная точка Q' массой m создает вокруг себя гравитационное поле, которое может быть представлено векторным полем сил, определенным в каждой точке Q внешнего пространства $\mathbf{R}^3 \setminus \{Q'\}$. Именно на точку Q действует сила

$$\mathbf{F}(Q) = -\frac{Gmm_0}{s^3(Q', Q)}\mathbf{s}(Q', Q). \quad (1.1)$$

Здесь G — постоянная тяготения, m_0 — масса Q ; $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$; векторы \mathbf{r}' и \mathbf{r} отмечают положения Q' и Q относительно начала некоторой системы отсчета, а вектор \mathbf{s} соединяет точку Q' с Q . Модуль вектора мы обозначаем той же буквой, что и сам вектор, но не жирной. Обычно в книгах по теории тяготения вводят единицы измерения физических величин, в которых $G = 1$. Мы не будем делать этого, чтобы размерность при желании легко было восстановить. Напомним, что в системе СИ по последним данным (*Fukushima, 2000; Mohr, 1999*)

$$G = (6.673 \pm 0.010) \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}.$$

Такая точность, как правило, достаточна за пределами Солнечной системы, внутри же последней нужна точность по крайней мере на несколько порядков выше. К счастью, произведение G на массы

многих тел Солнечной системы известно с гораздо большей точностью, вплоть до семи-восьми значащих цифр (*Standish, 1998; Fukushima, 2000*). В единицах $\text{км}^3/\text{с}^2$

$$\begin{aligned} GM_0 &= 132712442076 \pm 50, \\ GM_1 &= 22032.0 \pm 1.1, & GM_5 &= 126712767 \pm 87, \\ GM_2 &= 324858.60 \pm 0.05, & GM_6 &= 37940630 \pm 190, \\ GM_3 &= 398600.4418 \pm 0.0008, & GM_7 &= 5794549.0 \pm 7.6, \\ GM_4 &= 42828.31 \pm 0.12, & GM_8 &= 6836534 \pm 14, \end{aligned}$$

где индекс 0 относится к Солнцу, остальные нумеруют планеты в обычном порядке.

Сила \mathbf{F} зависит от массы пробной точки и характеризует не только гравитационное действие точки Q' , но и свойства точки Q . Чтобы избавиться от этого, в физике вводят понятие *напряженности* поля, равной отношению силы к заряду пробной точки. В нашем случае гравитационный заряд совпадает с массой, а напряженность с ускорением

$$\mathbf{w}(Q) = -\frac{Gm}{s^3(Q', Q)}\mathbf{s}(Q', Q). \quad (1.2)$$

Выищем для примера проекцию на ось x :

$$w_x = \frac{Gm}{s^3}(x' - x),$$

причем

$$s = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Векторное поле (1.2) эквивалентно скалярному полю *гравитационного потенциала*, наведенному в пробной точке Q :

$$V(Q) = \frac{Gm}{s}. \quad (1.3)$$

Именно напряженность есть градиент потенциала

$$\mathbf{w}(Q) = \text{grad}_Q V(Q), \quad (1.4)$$

где индекс у градиента указывает, по координатам какой точки пространства берется градиент. Обычно такой точкой служит Q , и в таком случае мы опускаем индекс у градиента.

Размерность потенциала — энергия на единицу массы или, что то же, квадрат скорости. Физический смысл — потенциальная энергия единицы массы со знаком минус (см. задачи 1, 2).

Формула (1.4) проверяется непосредственным дифференцированием.

1.2 Гравитационное поле тела

По принципу независимости сил из (1.3) можно получить потенциалы любых протяженных образований.

Рассмотрим систему n материальных частиц Q_i с массами m_i , задаваемых радиус-векторами \mathbf{r}_i . Наведенный каждой точкой Q_i потенциал определяется формулой (1.3) при замене \mathbf{s} на $\mathbf{s}_i = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$. Векторному сложению ускорений отвечает скалярное сложение потенциалов. Поэтому потенциал системы равен

$$V(Q) = G \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{s_i}. \quad (1.5)$$

Предельный переход позволяет вывести из (1.5) потенциал при сплошном распределении масс в некотором теле T :

$$V(Q) = G \int_T \frac{dm}{s}. \quad (1.6)$$

Как и в (1.1), $\mathbf{s} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, так что s — переменное расстояние от пробной точки Q до точек Q' притягивающего тела T , dm — элемент массы T . Если через $\rho(Q')$ обозначить плотность в точке Q' , то $dm = \rho(Q') d\tau$, где $d\tau = dx' dy' dz'$ — элемент объема.

В модельных задачах рассматривают не только трехмерные тела, но и притягивающие двумерные поверхности и одномерные линии. В этих случаях ρ обозначает соответственно поверхностную и линейную плотности, измеряемые в $\text{кг}/\text{м}^2$ и $\text{кг}/\text{м}$.

Масса любого тела существует как одно из основных свойств материи. Поэтому распределение dm , если оно адекватно описывает свойства тела T , обязано быть интегрируемым. Плотность же определяется как величина, после интегрирования дающая массу. Так что плотность либо интегрируема, либо не существует (для моделей сложно устроенных реальных тел). В дальнейшем тела предпола-

гаются конечными и кусочно-гладкими, а плотности — кусочно-непрерывными. Иногда мы будем накладывать и более жесткие ограничения на плотность, вплоть до аналитичности и даже постоянства. Но такие случаи встречаются редко: как правило, в объемных телах плотность рвется на некоторых поверхностях, отделяющих, скажем, мантию от ядра и коры. Более того, сама поверхность тела есть поверхность разрыва: вне T плотность можно положить равной нулю.

Отметим, что поверхностная плотность отвечает бесконечной объемной, линейная — бесконечной поверхностной. Как следствие, потенциалы двумерных и особенно одномерных тел обладают худшими аналитическими свойствами по сравнению с объемными потенциалами.

Поскольку обратное расстояние s^{-1} как функция от Q' не имеет особенностей, если Q отделена от тела T , то потенциал всегда определен вне притягивающих масс. Напротив, при $Q \in T$ существование несобственного интеграла (1.6) зависит от гладкости распределения dm .

Потенциал точки или конечного множества точек (1.5) определен лишь вне тела T .

Потенциал линии также определен лишь вне T . Это с очевидностью следует из расходимости несобственного интеграла от функции $1/x$ по промежутку, включающему нуль. В общем случае внешний потенциал стремится к бесконечности при стремлении Q к притягивающей линии (см. задачи 3, 4): для отрыва точки Q от нее требуется бесконечная работа. Разумеется, отрыв реальной пылинки от реального стержня большой работы не требует. Идеализация одномерной линии здесь неправомерна: вблизи (тем более внутри) стержня нужно учитывать его объемную структуру.

Пусть теперь T — двумерная кусочно-гладкая поверхность. Тогда потенциал существует и непрерывен во всем пространстве \mathbf{R}^3 . Что касается градиента, то он претерпевает скачок в окрестности внутренней точки поверхности. При стремлении к краю градиент в общем случае перестает быть ограниченным. Подробности и доказательства можно найти в книге (*Антонов и др., 1989*) (см. также задачи к этой главе).

Перейдем к естественному случаю объемного тела. Потенциал и его градиент непрерывны во всем пространстве \mathbf{R}^3 . Вторые производные потенциала в общем случае разрывны. Но если плотность

в некоторой точке Q непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с любым положительным показателем, то там непрерывны и вторые производные (*Антонов и др., 1989*).

Остановимся на вопросе о начале отсчета значений потенциала. Физический смысл имеет не потенциал в отдельной точке, а разность его значений в двух произвольных точках: замена V на $V + \text{const}$ несущественна. Это очевидно из вида уравнений движения, куда входит не сам потенциал, а его градиент. Стандартным способом фиксации произвольной аддитивной константы является требование $V = 0$ на бесконечности (см. задачу 2). Иногда от этого соглашения отступают. При анализе движения звезды внутри звездного скопления, моделируемого эллипсоидом, удобно принять $V = 0$ в центре скопления.

1.3 Симметрия

Интуитивно ясно, что потенциал симметричного тела симметричен. Это нетрудно показать и формально. Пусть, например, тело T симметрично относительно некоторой плоскости, т.е. при выборе последней в качестве основной координатной плоскости будем иметь

$$\varrho(x, y, z) = \varrho(x, y, -z). \quad (1.7)$$

Заменой переменной интегрирования $z' \mapsto -z'$ в интеграле (1.6) получаем

$$V(x, y, z) = V(x, y, -z), \quad (1.8)$$

так что потенциал симметричен относительно этой плоскости. Аналогично из соотношения

$$\varrho(-x, -y, z) = \varrho(x, y, z) \quad (1.9)$$

следует равенство

$$V(-x, -y, z) = V(x, y, z). \quad (1.10)$$

Это осевая симметрия. Если ось z служит осью вращательной симметрии, то в (1.6) при переходе к цилиндрическим координатам зависимость от угла исчезает:

$$V = V(R, z). \quad (1.11)$$

Максимальной симметрией обладает сферическое тело, и для него потенциал выражается функцией одной переменной:

$$V = V(r). \quad (1.12)$$

Вообще, пусть \mathcal{G} — какая-либо подгруппа группы движений с отражениями, для произвольного элемента g которой

$$\varrho(gQ) = \varrho(Q). \quad (1.13)$$

Интеграл типа (1.6)

$$V(gQ) = G \int \frac{\varrho(Q') d\tau}{|g\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (1.14)$$

можно считать распространенным на все пространство, если принять $\varrho = 0$ вне тела T . Сделаем замену $\mathbf{r}' \mapsto g\mathbf{r}'$. По свойству (1.13) $\varrho(Q')$ не изменится. По определению группы движений не изменится и элемент объема, а знаменатель будет равен

$$|g\mathbf{r} - g\mathbf{r}'| = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|.$$

Поэтому

$$V(gQ) = V(Q), \quad (1.15)$$

т.е. потенциал обладает в точности той же симметрией (из группы движений с отражениями), что и тело.

Можно показать, что потенциал ведет себя простым образом также при преобразованиях подобия и инверсии (*Антонов и др., 1989*).

Найдем явные выражения для потенциалов нескольких симметричных тел разной размерности.

Пример 1. Однородная окружность. Пусть T — окружность радиусом a и массой M . Выберем плоскость окружности в качестве основной, а ось z направим через центр окружности. По симметрии потенциал зависит только от двух цилиндрических координат, так что можно считать $Q = (R, 0, z)$, $Q' = (a \cos \varphi, a \sin \varphi, 0)$, $s^2 = R^2 + a^2 - 2aR \cos \varphi + z^2$, $dm = (M/2\pi a)a d\varphi$. Формула (1.6) приобретает вид

$$V = \frac{GM}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{R^2 + a^2 + z^2 - 2aR \cos \varphi}}.$$

Последнее выражение сводится к полному эллиптическому интегралу. Окончательно

$$V(R, z) = \frac{2GM}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\xi}} \mathbf{K} \left(\frac{2aR}{\xi} \right), \quad (1.16)$$

где $\xi = R^2 + a^2 + z^2 + \sqrt{(R^2 + a^2 + z^2)^2 - 4a^2R^2}$.

При фиксированном R величина ξ минимальна в плоскости окружности $z = 0$; в этом случае $\xi = 2 \max\{a^2, R^2\}$. Таким образом, всегда $\xi \geq 2a^2$, $2aR/\xi \leq 1$, причем равенство достигается только на самой окружности, где V обладает логарифмической сингулярностью.

Простейшую форму потенциал окружности принимает на оси z

$$V(0, z) = \frac{GM}{\sqrt{a^2 + z^2}} \quad (1.17)$$

и в плоскости окружности

$$V(R, 0) = \begin{cases} 2GM/(\pi a) \mathbf{K}(R/a), & \text{если } R < a, \\ 2GM/(\pi R) \mathbf{K}(a/R), & \text{если } R > a. \end{cases} \quad (1.17')$$

Пример 2. *Однородная сфера.* Пусть T — сфера радиусом a и массой M . По симметрии потенциал зависит только от расстояния, так что можно считать $Q = (0, 0, r)$, $Q' = (a \sin \theta \cos \lambda, a \sin \theta \sin \lambda, a \cos \theta)$. Интегрируя в полярных координатах, получаем

$$V = \frac{GM}{4\pi a^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \sin \theta d\theta d\lambda}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}}.$$

Поскольку подынтегральное выражение не зависит от λ , то

$$V = \frac{GM}{2} \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta}} = \frac{GM}{2ar} (a + r - |a - r|).$$

Окончательно потенциал постоянен внутри сферы

$$V = \frac{GM}{a} \quad (r \leq a), \quad (1.18)$$

а вне ее совпадает с потенциалом точки массой M , помещенной в центре:

$$V(r) = \frac{GM}{r} \quad (r \geq a). \quad (1.19)$$

Таким образом, сфера *не притягивает* тел, помещенных внутри нее, а снаружи ее притяжение неотлично от притяжения точки.

Интересно, что потенциал сферы несравненно проще потенциала окружности и тем более диска даже в их плоскости.

Пример 3. Тело сферической структуры. Пусть T — шар массой M и радиусом a с зависящей лишь от расстояния плотностью $\varrho(r')$. Тройной интеграл (1.6) в сферических координатах можно представить в виде

$$V = \int_0^a \bar{V}(r') dr',$$

где через $\bar{V}(r')$ обозначен потенциал сферы (1.18), (1.19), в котором следует заменить a на r' , M на $4\pi r'^2 \varrho(r')$. Окончательно внутри шара

$$\frac{V(r)}{G} = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr' + 4\pi \int_r^a \varrho(r') r' dr'. \quad (1.20)$$

Вне шара последний интеграл исчезает, а первый дает полную массу

$$V(r) = \frac{GM}{r}. \quad (1.21)$$

По-прежнему внешние точки шар притягивает как материальная точка той же массы, помещенная в центре. Внутренние точки притягиваются только частью шара, расположенной ближе к центру. Это ясно, если продифференцировать (1.20) для получения ускорения

$$w(r) = -\frac{GM(r)}{r^2}, \quad (1.22)$$

где $M(r) = 4\pi \int_0^r \varrho(r') r'^2 dr'$ есть масса шара радиусом r .

Для однородного шара внутренний потенциал равен

$$V(r) = \frac{GM(3a^2 - r^2)}{2a^3}. \quad (1.23)$$

1.4 Уравнения Лапласа и Пуассона, формула Гаусса

В области, свободной от притягивающих масс, потенциал является гармонической функцией, т.е. удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0, \quad (1.24)$$

где Δ — оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.25)$$

Уравнение (1.24) проверяется сначала дифференцированием формулы (1.3) с учетом

$$\frac{\partial(s^{-1})}{\partial x} = \frac{x' - x}{s^3}, \quad \frac{\partial^2(s^{-1})}{\partial x^2} = \frac{3(x' - x)^2 - s^2}{s^5}.$$

Затем переходим к дифференцированию под знаком интеграла (1.6), законному ввиду непрерывности подынтегрального выражения и всех его производных по x, y, z .

Напомним, что оператор Лапласа инвариантен относительно группы движений с отражениями.

Перейдем к выводу формулы Гаусса: поток напряженности гравитационного поля через кусочно-гладкую поверхность S , ограничивающую область T , с точностью до множителя $-4\pi G$ равен суммарной массе M_S , расположенной в области T :

$$\iint_S w_n d\sigma = -4\pi G M_S. \quad (1.26)$$

Обратим внимание, что поверхность S не предполагается ни односвязной, ни даже связной. Символ w_n означает проекцию вектора \mathbf{w} на внешнюю нормаль, направленную прочь от области T . Если придерживаться стандартного определения внешней нормали для каждой связной части поверхности S , то для областей с пустотами вклады от внутренних граничных поверхностей надо брать с противоположным знаком.

Доказательство (1.26) проведем в три этапа.

1. Область T свободна от масс. Воспользуемся формулой Остроградского–Гаусса:

$$\iiint_T \operatorname{div} \mathbf{w} d\tau = \iint_S w_n d\sigma, \quad (1.27)$$

справедливой для любого непрерывно дифференцируемого в области T и на ее границе S векторного поля. Если $\mathbf{w} = \operatorname{grad} V$, то соотношение (1.27) равносильно

$$\iiint_T \Delta V d\tau = \iint_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma. \quad (1.28)$$

Для пустой области T уравнения (1.24) и (1.28) дают

$$\iint_S w_n d\sigma = \iint_S \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma = 0, \quad (1.29)$$

что совпадает с формулой (1.26) при $M_S = 0$.

2. Область T содержит все притягивающие массы. Если в T есть пустоты, ограниченные поверхностями S_k , то интегралы по S_k согласно (1.29) равны нулю, так что за S можно принять внешнюю поверхность тела. Возьмем охватывающую S сферу S_r радиусом r . Применим выражение (1.29) к области между S и S_r :

$$\iint_S w_n d\sigma = \iint_{S_r} w_n d\sigma.$$

Таким образом, от r последний интеграл не зависит. Его значение ($-4\pi GM$) получим, используя задачу 7 и предельный переход $r \rightarrow \infty$.

3. Притягивающие массы лежат по обе стороны S . Область T пуста для внешних масс, и в силу (1.29) вклад от них в левую часть (1.26) оказывается нулевым. Для внутренних же масс по п. 2 формула (1.26) справедлива.

Обобщим теперь (1.24) на случай пространства, в окрестности пробной точки заполненного массами объемной плотности ρ . Дифференцирование под знаком интеграла (1.6) приводит к неверному результату из-за возникающих сингулярностей. Один из способов правильного рассуждения состоит в следующем. Выделим вокруг пробной точки Q малую окрестность T , ограниченную гладкой поверхностью S произвольной формы. Представим левую часть формулы (1.26) тройным интегралом (1.27), а правую — тройным интегралом от плотности:

$$\iiint_T (\Delta V + 4\pi G\rho) d\tau = 0.$$

Предполагая непрерывность подынтегрального выражения, получим в силу произвольности области T соотношение, носящее имя Пуассона:

$$\Delta V = -4\pi G\rho. \quad (1.30)$$

В книге (Антонов и др., 1989) показано, что для непрерывности ΔV достаточно условия Липшица на ρ с произвольным положительным показателем.

Из-за наложенного условия гладкости дифференциальное уравнение Пуассона (1.30) имеет более ограниченную область применимости, чем формула Гаусса.

Установим теперь формулу Грина

$$\iiint_T (U \Delta V - V \Delta U) d\tau = \iint_S \left(U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma \quad (1.31)$$

при двукратной непрерывной дифференцируемости U, V в области T , ограниченной кусочно-гладкой поверхностью S (на S достаточно непрерывной дифференцируемости U, V , если тройной интеграл абсолютно сходится). Образует векторное поле $\mathbf{F} = U \text{grad} V$. Подставив в (1.27) $\text{div} \mathbf{F} = U \Delta V + \text{grad} U \text{grad} V$, $F_n = U \partial V / \partial n$, выведем предварительную формулу Грина:

$$\iiint_T (U \Delta V + \text{grad} U \text{grad} V) d\tau = \iint_S U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma. \quad (1.32)$$

Вычитая из (1.32) аналогичное соотношение с переменной ролей U и V , получим выражение (1.31).

При $U = 1$ формулы (1.31), (1.32) переходят в (1.28). Для гармонической функции V из (1.32) следует

$$\iiint_T \text{grad} U \text{grad} V d\tau = \iint_S U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma. \quad (1.33)$$

Фиксируем $Q \in T$ и применим формулу (1.31) к функциям U и $V = s^{-1}$ в области, получаемой выбрасыванием из области T шара радиусом ε с центром в точке Q . Устремив ε к нулю, получим после несложных выкладок

$$4\pi U(Q) = \iint_S \left(s^{-1} \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial s^{-1}}{\partial n} \right) d\sigma - \iiint_T s^{-1} \Delta U d\tau. \quad (1.34)$$

Для гармонической функции U тройной интеграл исчезает.

В заключение параграфа приведем выражения для оператора Лапласа в цилиндрических

$$\Delta = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.35)$$

и сферических координатах

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\tilde{\Delta}}{r^2}, \quad (1.36)$$

где $\tilde{\Delta}$ — сферическая часть оператора Лапласа

$$\Delta = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}. \quad (1.37)$$

1.5 Потенциальная энергия гравитирующих масс

До сих пор мы изучали потенциал, описывающий действие тела T на пробную точку Q . Если же считать тело T самогравитирующим, то можно ввести функционал

$$W = \frac{1}{2} \int_T V dm, \quad (1.38)$$

зависящий от формы T и распределения масс. Фактически здесь стоит двукратное интегрирование по объему T по равноправным точкам Q и Q' :

$$W = \frac{G}{2} \int_T \int_T \frac{dm dm'}{s(Q, Q')}. \quad (1.39)$$

Такое же выражение получается при вычислении работы для преодоления сил притяжения, требуемой на распыление тела на частицы и удаление их на бесконечность. Величина W имеет смысл гравитационной энергии тела T со знаком минус.

Дадим еще одно выражение для W . Пусть $dm = \rho d\tau$ и ρ удовлетворяет условию Липшица с некоторым положительным показателем. Тогда справедливо уравнение Пуассона (1.30), и функционал (1.38) преобразуется к виду

$$8\pi GW = - \iiint V \Delta V d\tau,$$

где интегрировать можно по всему пространству \mathbf{R}^3 . Воспользуемся формулой Грина (1.32), полагая $U = V$ и беря сферу с достаточно большим радиусом R в качестве S . Согласно результатам

задач 6 и 7 $V\partial V/\partial n \sim R^{-3}$, и поверхностный интеграл исчезает в пределе $R \rightarrow \infty$. Окончательно

$$W = \frac{1}{8\pi G} \iiint_{\mathbf{R}^3} (\text{grad } V)^2 d\tau. \quad (1.40)$$

Гравитационная энергия, как и потенциал, обладает определенными экстремальными свойствами. Сформулируем важнейшее из них, доказанное А.М.Ляпуновым.

Для однородного тела фиксированной массы и плотности функционал W достигает максимума (гравитационная энергия — минимума) в случае шара. Доказательство см. в книге (Антонов и др., 1989).

Задачи к главе 1

Задача 1. Докажите, что разность потенциалов равна работе сил гравитации при перемещении единичной массы вдоль любой соединяющей соответствующие точки кривой

$$V(Q_2) - V(Q_1) = \int_{Q_1}^{Q_2} \mathbf{w} d\mathbf{r} = \int_{Q_1}^{Q_2} (w_x dx + w_y dy + w_z dz). \quad (1.41)$$

Указание: сначала рассмотреть случай точечной массы.

Задача 2. Докажите, что потенциал в точке Q равен работе сил гравитации при перемещении единичной массы из бесконечности в эту точку:

$$V(Q) = \int_{\infty}^Q \mathbf{w} d\mathbf{r}, \quad (1.42)$$

где символ “ ∞ ” означает предельное положение точки с неограниченно растущим расстоянием от фиксированной точки пространства.

Указание: сначала рассмотреть случай точечной массы.

Задача 3. Для внешнего потенциала однородного стержня массой M , расположенного на оси z между точками a и b ($a < b$), выведите формулу

$$V(R, z) = \frac{GM}{b-a} \ln \frac{b-z + \sqrt{R^2 + (b-z)^2}}{a-z + \sqrt{R^2 + (a-z)^2}}, \quad (1.43)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ и считается, что $R \neq 0$, т.е. точка Q лежит вне оси z . Покажите предельным переходом в (1.43) и прямым интегрированием, что при $R = 0, z > b$ выражение под знаком логарифма следует заменить на $(z - a)/(z - b)$, а при $R = 0, z < a$ можно заменить на $(z - b)/(z - a)$.

Задача 4. Найти главный член асимптотики потенциала предыдущей задачи в окрестности внутренней точки стержня при малых R .

Ответ:

$$V(R, z) = \frac{GM}{b-a} \ln \frac{4(z-a)(b-z)}{R^2} + \mathcal{O}(R^2).$$

Как видим, вблизи одномерной линии потенциал сингулярен логарифмически, в отличие от степенной сингулярности (1.3) для притягивающей точки.

Задача 5. Найти границы потенциала (1.6):

$$\frac{GM}{r_2} \leq V \leq \frac{GM}{r_1},$$

где r_1 и r_2 — наименьшее и наибольшее расстояние от точек притягивающего тела до пробной точки.

Задача 6. Установить асимптотику

$$V = \frac{GM}{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

при $r \rightarrow \infty$.

Задача 7. Найти границы напряженности потенциала (1.6)

$$\frac{GM}{r_2^2} \leq w \leq \frac{GM}{r_1^2}$$

и установить асимптотику

$$\mathbf{w} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

при $r \rightarrow \infty$.

Замечание. Дифференцировать асимптотические формулы и тем более оценки нельзя. Советуем оценить сначала разность

$$\frac{\mathbf{r}' - \mathbf{r}}{s^3} - \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Задача 8. Вывести формулу для потенциала тела сферической структуры, пользуясь его симметрией и уравнением Пуассона (1.30).

Глава 2

Некоторые общие свойства фигур равновесия вращающихся жидких масс

2.1 Равномерно вращающиеся жидкости

Рассмотрим жидкое тело. Пусть жидкость вращается твердотельно, т.е. взаимные расстояния между точками сохраняются (относительное равновесие). В общем случае возможно прецессионное движение и ось вращения может менять направление в пространстве и в теле.

Поскольку вращение происходит как у твердого тела, можно использовать уравнения Эйлера для описания вращения тела относительно неподвижной точки. Пусть $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ — угловые скорости в системе координат главных осей инерции тела, тогда динамические уравнения Эйлера запишутся в виде

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - B)\omega_y\omega_z &= 0, \\ B\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_x\omega_z &= 0, \\ C\dot{\omega}_z + (B - A)\omega_x\omega_y &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где A, B, C — моменты инерции тела по отношению к осям x, y, z :

$$\begin{aligned} A &= \int_T (y^2 + z^2) dm = \int_T (y^2 + z^2) \rho d\tau, \\ B &= \int_T (x^2 + z^2) dm = \int_T (x^2 + z^2) \rho d\tau, \\ C &= \int_T (x^2 + y^2) dm = \int_T (x^2 + y^2) \rho d\tau, \end{aligned}$$

и интегралы берутся по всему телу T , $d\tau = dx dy dz$.

2.2 Характер установившегося движения жидкости

Пуанкаре доказал следующую теорему.

Если у равновесной вращающейся жидкой массы плотность ρ есть функция только давления $\rho = f(p)$, то прецессия отсутствует ($\omega = \text{const}$).

Доказательство. Считаем, что другие тела не действуют, есть только самогравитация, выражаемая через гравитационный потенциал $V(x, y, z)$, и силы давления, причем $\rho = f(p)$. Тогда компоненты ускорения даются гидродинамическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} w_x &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ w_y &= \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ w_z &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

С другой стороны, можно выразить компоненты ускорения через угловую скорость. Линейная скорость вращения $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, или

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y, \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z, \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_y z - \dot{\omega}_z y + \omega_y v_z - \omega_z v_y &= w_x, \\
 \dot{\omega}_z x - \dot{\omega}_x z + \omega_z v_x - \omega_x v_z &= w_y, \\
 \dot{\omega}_x y - \dot{\omega}_y x + \omega_x v_y - \omega_y v_x &= w_z.
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Учитывая, что $\rho = \rho(p)$, легко из (2.2) проверяется, что

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_y}{\partial x} &= \frac{\partial w_x}{\partial y}, \\
 \frac{\partial w_z}{\partial y} &= \frac{\partial w_y}{\partial z}, \\
 \frac{\partial w_x}{\partial z} &= \frac{\partial w_z}{\partial x}.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) получаем

$$\dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y = -\dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y,$$

или $\dot{\omega}_z = -\dot{\omega}_z$. Аналогично $\dot{\omega}_y = -\dot{\omega}_y$, $\dot{\omega}_x = -\dot{\omega}_x$. Следовательно, $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$ и $\omega = \text{const}$. Заметим, что условие баротропности можно опустить, как показано в работе (Антонов, 1973).

При выполнении условий этой теоремы уравнения Эйлера (2.1) существенно упростятся.

а) Если $A \neq B \neq C \neq A$, то для выполнения уравнений необходимо, чтобы две из компонент угловой скорости $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ равнялись нулю, т. е. вращение должно происходить вокруг одной из осей инерции тела.

б) Если $A = B \neq C$, то ось вращения либо перпендикулярна оси z , либо совпадает с осью z .

в) Если $A = B = C$, то тогда любую ось можно считать главной, т. е. вращение происходит вокруг главной оси инерции тела.

Таким образом, во всех случаях равновесная фигура должна вращаться вокруг одной из главных осей инерции. Можно доказать, что устойчивое вращение жидкой равновесной массы возможно только вокруг наименьшей из главных осей эллипсоида инерции (Пуанкаре, 2000).

2.3 Совпадение поверхностей уровня давления, плотности и потенциала силы тяжести

Примем ось вращения за ось z . Тогда $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$, $\mathbf{v} = (-\omega y, \omega x, 0)$. Уравнения для компонент ускорения можно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} + \omega^2 x &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial V}{\partial y} + \omega^2 y &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Умножив соответственно на dx , dy , dz и сложив уравнения, получим

$$d \left[V + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \right] = \frac{1}{\rho} dp.$$

Слева стоит дифференциал потенциала силы тяжести

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2),\tag{2.6}$$

справа — дифференциал функции $P = \int \rho^{-1} dp$. Напомним, что по баротропности ρ зависит только от p . Соотношения (2.5) можно переписать в виде

$$\text{grad } W = \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Таким образом, нормали к уровненным поверхностям $W(x, y, z) = C$ и $p(\rho) = c$ в общих точках совпадают. Если $\text{grad } W$ и $\text{grad } p$ не обращаются в нуль, то поверхности уровня потенциала тяжести и давления в общих точках имеют одну и ту же нормаль и касательную плоскость и, следовательно, эти поверхности совпадают.

Поскольку $\rho = \rho(p)$, то уровненные поверхности плотности также совпадают с уровнными поверхностями потенциала силы тяжести.

Таким образом, *уровненная поверхность потенциала силы тяжести является одновременно поверхностью равного давления и равной плотности*. Будем называть их эквиденситами.

Эти результаты могут быть расширены на более общий случай (Пуанкаре, Вавр) (*Тассуль, 1982*), в котором, в первую очередь, ослабляется требование на постоянство угловой скорости:

Для жидкой массы в состоянии стационарного вращения из любого следующего утверждения вытекают три остальных:
а) угловая скорость постоянна на цилиндрах, ось которых совпадает с осью вращения; б) сила тяжести обладает потенциалом; в) сила тяжести нормальна к поверхностям равной плотности; г) поверхности равного давления и равной плотности совпадают.

Эти утверждения сводят задачу нахождения эквиденсит (основная задача теории фигур равновесия) к решению сингулярного интегрального уравнения (гравитационный потенциал определяется объемным интегралом), в котором область интегрирования заранее не известна. Полной математической теории таких уравнений не существует до сих пор. Существенное продвижение получено в трех направлениях, которые и будут освещены в этом пособии.

- Общие свойства фигур.
- Частные решения.
- Аналитические решения, близкие к исходному порождающему.

Последнее направление с достаточной для практики полнотой разработано для случая медленно вращающихся фигур, когда порождающее решение — неподвижный шар.

2.4 Теорема Лихтенштейна

Лихтенштейн (*Лихтенштейн, 1965*) доказал следующее утверждение:

При равномерном твердотельном вращении однородной жидкой массы для любой равновесной фигуры существует плоскость симметрии, перпендикулярная оси вращения.

Доказательство. У равновесной фигуры конечных размеров поверхность S совпадает с одной из уровневых поверхностей потенциала силы тяжести $S(C_0)$

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = C_0. \quad (2.7)$$

Выделим в теле фигуры бесконечно тонкие столбики, параллельные оси вращения z . Столбиком считается односвязный “отрезок”, концы которого лежат на поверхности фигуры, так что все точки столбика (кроме концов) находятся внутри тела. Совокупность столбиков представляет рассматриваемую фигуру. Если середины всех столбиков имеют одну и ту же высоту по z , то плоскость, проходящая через середины столбиков, является плоскостью симметрии для тела и перпендикулярна оси z .

Предположим, что столбики имеют середины на разных высотах по z . Выражение для потенциала, создаваемого однородным стержнем, имеется в задаче 3 из главы 1. Рассмотрим столбик с наивысшей серединой z_{max} . Пусть координаты верхнего конца такого столбика Q_1 равны x_0, y_0, z_1 , нижнего конца Q_2 — x_0, y_0, z_2 . По предположению существует i -й столбик с серединой $z_m < z_{max}$. Потенциал, создаваемый этим i -м столбиком в верхней точке “наивысшего” столбика, меньше потенциала в нижней точке:

$$V_i(x_0, y_0, z_1) < V_i(x_0, y_0, z_2).$$

Поскольку все другие столбики фигуры не выше “наивысшего” столбика, то для суммарного потенциала тоже имеем

$$V(x_0, y_0, z_1) < V(x_0, y_0, z_2).$$

Это неравенство сохраняется и для потенциала силы тяжести $W(x_0, y_0, z_1) < W(x_0, y_0, z_2)$, так как вклад потенциала центробежных сил для точек Q_1 и Q_2 одинаков. Но эти точки лежат на одной уровенной поверхности фигуры $S(C_0)$ и, значит, $W(x_0, y_0, z_1) = W(x_0, y_0, z_2)$. Получили противоречие.

Возможен еще случай, когда у столбика с максимальной серединой нулевая длина и точки Q_1 и Q_2 совпадают: $Q_1 = Q_2 = Q$.

Если в точке Q существует касательная плоскость, то она параллельна оси z , иначе через Q проходил бы ненулевой столбик. Следовательно, нормаль $n(Q) = (\partial W/\partial x, \partial W/\partial y, \partial W/\partial z)$ к поверхности фигуры в этой точке перпендикулярна оси z , так что $\partial W/\partial z = 0 \Rightarrow \partial V/\partial z = 0$.

С другой стороны, поскольку существуют по предположению столбики с серединами строго ниже по z , чем Q , а остальные не выше, то от всей совокупности столбиков должно быть $\partial V/\partial z < 0$

(силы притяжения тянут точку Q “вниз” по z) . Получили противоречие.

Если же в точке Q нет касательной плоскости, т. е. Q является особой точкой поверхности S (2.7), то в ней частные производные $\partial W/\partial x, \partial W/\partial y, \partial W/\partial z$ обращаются в нуль. Отсюда, в частности, следует, что $\partial V/\partial z = 0$. Но так как точка Q “наивысшая”, то в ней, как и в предыдущем случае, компоненты силы и ускорения должны быть направлены по z “вниз”. Следовательно, $\partial V/\partial z < 0$ — опять противоречие.

Таким образом, существует плоскость симметрии, она перпендикулярна оси z и очевидно проходит через центр тяжести фигуры.

Если тело не вращается, то в качестве оси может рассматриваться любая прямая, проходящая через центр тяжести. Следовательно, любая проходящая через центр масс плоскость есть плоскость симметрии, т. е. эта фигура — шар.

Требования в формулировке доказанной теоремы могут быть существенно ослаблены. Этот вопрос подробно изучили Лихтенштейн (*Лихтенштейн, 1965*) и Вавр (*Wavre, 1932*), которые показали, что теорему можно распространить, во-первых, на неоднородное жидкое тело при главном условии невозрастания плотности при переходе от внутренних слоев к наружным и, во-вторых, ослабить требования на угловую скорость: угловая скорость может зависеть от расстояния $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ от оси вращения, но не от высоты по z .

2.5 Основной параметр

Мы показали, что теория фигур небесных тел приводит к очень сложным уравнениям, которые невозможно за редкими исключениями решить аналитически, и даже численно это можно сделать лишь с большим трудом, используя всю мощь современной техники. Между тем аналитическое решение может быть получено и без чрезвычайных усилий, если воспользоваться методом возмущений.

Действительно, все известные к середине XX в. тела вращаются медленно и потому имеют близкую к шару форму. Это наблюдательный факт, подкрепленный теорией: шар — фигура равновесия неподвижного тела, что установил еще Ньютон. Как только

что показано, из теоремы Лихтенштейна непосредственно вытекает единственность шара как неподвижной фигуры равновесия. Значительно раньше А. М. Ляпунов (1884) доказал, что *устойчивой* конфигурацией для невращающейся массы жидкости является шар. Единственность шара как фигуры равновесия жидкой массы без вращения была доказана Т. Карлеманом (*Carleman, 1919*).

Естественно ввести параметр, малый вместе с угловой скоростью, и проводить последовательные приближения, получая все более и более точный результат, отслеживая малые отклонения формы тела от сферической. Казалось бы, проще всего выбрать ω за параметр. Но такой выбор неудачен хотя бы потому, что ω — размерная величина. А. Клеро предложил безразмерную комбинацию

$$q = \frac{\omega^2 R^3}{GM}, \quad (2.8)$$

где M — масса T , R — характерный радиус T . За последний в приложениях берут разные величины. Чаще всего это — экваториальный радиус (мы увидим, что метод возмущений описывает только тела вращения, для которых экваториальный радиус единствен) или радиус равновеликой сферы. Последний выбор удобен тем, что представляет q в функции только двух величин: угловой скорости и средней плотности:

$$q = \frac{3\omega^2}{4\pi G \bar{\rho}}. \quad (2.9)$$

В первом приближении q представляет собой отношение центробежной силы к силе тяжести на экваторе. Более определенно: q равно отношению центробежной силы к силе тяжести на экваторе воображаемого шара массой M и радиусом R , вращающегося с угловой скоростью ω . Обратим внимание, что q зависит от того, что мы приняли за R и что формула (2.9) верна только при указанном соглашении, которого мы будем придерживаться, если не оговорено противное.

2.6 Теорема Пуанкаре о верхнем пределе угловой скорости вращения равновесной фигуры

Основной параметр твердотельно вращающейся равновесной жидкой фигуры должен удовлетворять неравенству

$$q < \frac{3}{2}. \quad (2.10)$$

Доказательство. Пусть начало системы координат совпадает с центром тяжести фигуры, ось z — с осью вращения. Из условий равновесия вектор $\text{grad } W$, равный ускорению силы тяжести, направлен внутрь T и может обратиться в нуль только на экваторе. Если точка принадлежит поверхности S равновесной фигуры, то производная по внешней нормали \mathbf{n} равняется

$$\frac{\partial W}{\partial n} = -|\text{grad } W|.$$

Физически это соответствует тому, что точка не может улететь.

Применим формулу Остроградского (1.28) к функции W :

$$\iiint_T \Delta W d\tau = \iint_S \frac{\partial W}{\partial n} d\sigma, \quad (2.11)$$

где \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности S фигуры T , $d\sigma$ — элемент площади. Лапласиан от V дается формулой Пуассона (1.30), а от центростремительного потенциала вычисляется непосредственно. В результате

$$\Delta W = -4\pi G \rho + 2\omega^2.$$

Правая часть в выражении (2.11) отрицательна, поэтому

$$\iiint_T (2\omega^2 - 4\pi G \rho) d\tau < 0,$$

откуда в силу постоянства ω

$$2\omega^2 - 4\pi G \bar{\rho} < 0,$$

что равносильно (2.10).

Содержание этой достаточно общей теоремы, полученной впервые в 1885 г. А. Пуанкаре, физически означает, что при некоторой угловой скорости ω частицы жидкости начнут отрываться. Оценка (2.10) существенно завышена (примерно в три раза). Упомянем без доказательства о результате У.Крудели (*Crudeli, 1910a; Crudeli, 1910b*):

$$\omega^2 < \pi G \rho_c,$$

где ρ_c — плотность в центре. Кроме общепринятого предположения о невозрастании плотности к периферии и определенных, достаточно естественных условий на регулярность поверхности фигуры, в доказательстве предполагалась выпуклость равновесной фигуры. Позднее В.Никлиборц (*Nicliborc, 1929*) избавился от последнего предположения.

Для конкретных семейств равновесных фигур можно получить более точные оценки. Как будет показано ниже, для однородных эллипсоидов вращения

$$q \leq 0.336998;$$

для фигур Гюйгенса–Роша

$$q \leq 0.541116.$$

2.7 Модель Гюйгенса–Роша

Как показано в § 2.3, форма эквиденсит определяется сингулярным интегральным уравнением с неизвестной заранее областью интегрирования. Семейство решений (“общее решение”) этого уравнения необозримо. Чтобы не потонуть в нем, следует ввести дополнительные условия. Обычно фиксируют общую массу, число связанных кусков T , зависимость плотности от нумерующего эквиденситы параметра или от давления. В этом параграфе мы рассмотрим простейший частный (точнее, предельный) случай, когда интегральное уравнение сводится к алгебраическому третьей степени.

Рассмотрим изолированное самогравитирующее небесное тело T массой M . Предположим, что выполнены все условия классической теории фигур равновесия (баротропная жидкость, твердотельное

вращение с постоянным вектором угловой скорости ω). Следуя А. М. Ляпунову, зададим эквиденситы уравнением

$$r = Rau(a, q, Q). \quad (2.12)$$

Здесь r — радиус, Q — точка единичной сферы с координатами θ (дополнение широты) и λ (долгота); R — масштабный множитель; переменная $a \in [0, 1]$ параметризует семейство эквиденсит S_a ; q — стандартный малый параметр (2.9). Поскольку при $q = 0$ фигура становится шаром, считаем

$$u(a, 0, Q) = 1. \quad (2.13)$$

Условие равновесия заключается в постоянстве суммы W гравитационного и центробежного потенциалов вдоль эквиденсит. Назовем фигурой Гюйгенса–Роша сосредоточенную в центре массу, окруженную невесомой атмосферой. Последняя не притягивает, а потенциал точки известен. Условие равновесия записывается в форме

$$\frac{GM}{r} + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \theta = W(a, q). \quad (2.14)$$

Подставляя (2.12) в (2.14), получим уравнение относительно u . Суммарный потенциал W зависит только от a и q , но не от θ и λ . Уравнение (2.14) вообще не содержит долготы λ , так что $u = u(a, q, \theta)$ и эквиденситами служат поверхности вращения.

Полагая $\theta = 0$ и обозначая $v = v(a, q) = u(a, q, 0)$, находим

$$W = \frac{GM}{Rav}.$$

Уравнение (2.14) преобразуется к виду

$$\frac{qa^3 \sin^2 \theta}{2} u^3 - \frac{u}{v} + 1 = 0. \quad (2.15)$$

Поскольку согласно (2.13) $u = v$ при $q = 0$, достаточно найти решение кубического относительно u уравнения (2.15), обращающееся в v при $q = 0$. Представим решение (2.15) в форме (Корн, 1984)

$$u = vF(\zeta). \quad (2.16)$$

Здесь

$$\zeta = \frac{27qa^3v^3 \sin^2 \theta}{8}, \quad (2.17)$$

F — гипергеометрическая функция, первые три аргумента которой равны $2/3$, $1/3$, $3/2$, так что она выражается через элементарные функции

$$F(\zeta) = \frac{3}{\sqrt{\zeta}} \sin \varphi, \quad \varphi = \frac{1}{3} \arcsin \sqrt{\zeta}. \quad (2.18)$$

Полезно привести разложение F в ряд Маклорена по степеням ζ :

$$F(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n, \quad c_n = \frac{(3n)!}{n!(2n+1)!} \left(\frac{4}{27}\right)^n. \quad (2.19)$$

По формуле Стирлинга

$$c_n \sim \sqrt{\frac{3}{16\pi n^3}}. \quad (2.20)$$

Поэтому ряд (2.19) сходится при $|\zeta| \leq 1$. Приведем также несколько первых коэффициентов c_n и рекуррентное соотношение:

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{4}{3^3}, \quad c_2 = \frac{4^2}{3^5}, \quad c_3 = \frac{4^4}{3^8}, \quad c_4 = 55 \left(\frac{4}{27}\right)^4,$$

$$c_{n+1} = \frac{2(3n+2)(3n+1)}{9(n+1)(2n+3)} c_n.$$

Простейшая параметризация. Формулы (2.16)–(2.18) еще не дают решения задачи, поскольку v в общем случае является функцией от a, q . Вид же последней функции зависит от смысла параметра a , который можно определять по-разному.

Для исследуемых фигур простейшая параметризация такова: R — полярный радиус T , Ra — расстояние по оси ζ от начала до эквиденситы. В этом случае

$$v = 1. \quad (2.21)$$

Поэтому (2.19) представляет собой разложение по степеням q (фактически по степеням $qa^3 \sin^2 \theta$), радиус сходимости которого равен

$$q_1(a, \theta) = \frac{8}{27a^3 \sin^2 \theta},$$

причем сходимость обеспечена при $q \leq q_1$. Наименьший радиус сходимости

$$q_0 = q_1(1, \pi/2) = 8/27 = 0.296296296 \quad (2.22)$$

имеет поверхность тела ($a = 1$) на экваторе ($\theta = \pi/2$).

Обратим внимание, что мы столкнулись с *вещественной* особенностью. Действительно, при $a = v = 1$, $q = q_0$ имеем $\zeta = \sin^2 \theta$, поэтому для северного полушария ($0 \leq \theta \leq \pi/2$)

$$u = F(\sin^2 \theta) = \frac{3}{\sin \theta} \sin \frac{\theta}{3} = \frac{3}{3 - 4 \sin^2(\theta/3)}. \quad (2.23)$$

Для южного следует θ заменить на $\pi - \theta$. Предельное значение производной $du/d\theta$ при подходе к экватору с севера равно $\sqrt{3}/2$, при подходе с юга — $(-\sqrt{3}/2)$. Экватор представляет собой *ребро* фигуры. Касательной плоскости в точках экватора не существует. Это влечет равенство нулю градиента W , а с ним и силы притяжения. Действительно, на экваторе $\theta = \pi/2$, $r = Ru(1, \pi/2) = 3R/2$. Гравитационное ускорение равно $4GM/9R^2$, центробежное — $3\omega^2 R/2 = 3GMq/2R^2$, где мы выразили ω^2 через q . Поставляя $q = 8/27$, убедимся в равенстве ускорений.

На рис. 2.1 изображены меридиональные сечения поверхности тел T для $R = 1$ при нескольких значениях q . На рис. 2.2 — семей-

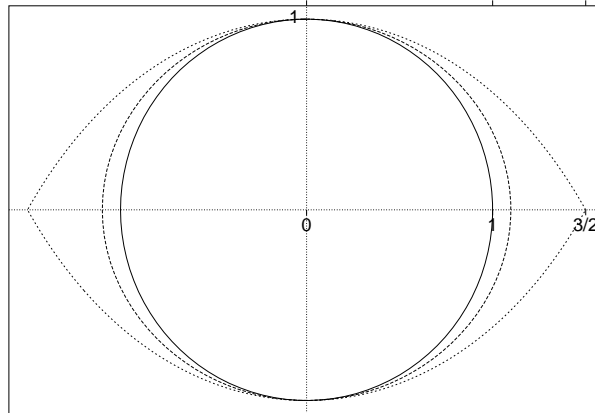


Рис. 2.1: Меридиональные сечения тела T .

ство эквиденсит тела T при $q = 8/27$. Полярное сжатие увеличивается с ростом q и a от нуля ($q=0$ или $a \rightarrow 0$) до $1/3$ ($q = 8/27, a = 1$).

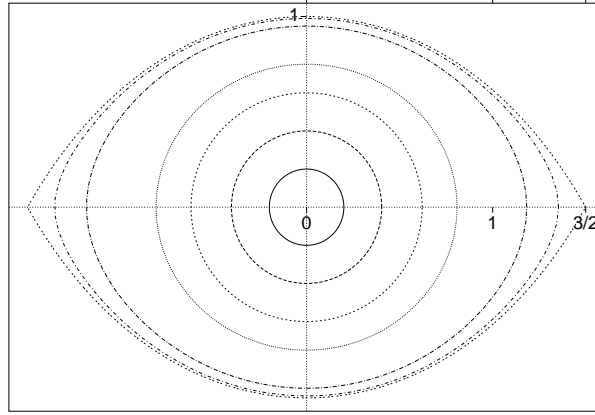


Рис. 2.2: Семейство эквиденсит тела T .

При $q > 8/27$ фигуры равновесия не существует. Действительно, вблизи экватора (при близких к единице значениях $\sin \theta$) для наружных слоев (близких к единице значениях a) левая часть (2.15) при $v = 1$ не имеет положительных корней (рис. 2.3). Физическое объяснение: при быстром вращении наружные слои атмосферы диссипируют в космическое пространство.

Параметризация Ляпунова. А. М. Ляпунов предложил другую универсальную параметризацию, вводимую условием: объем тела $\tau(a)$ внутри эквиденситы S_a совпадает с объемом шара радиусом Ra . Считая a, θ, λ криволинейными координатами и вычисляя якобиан, находим

$$d\tau = R^3 a^2 u^2 \sin \theta \frac{\partial a u}{\partial a} da d\theta d\lambda.$$

Интегрирование по a, λ элементарно. С учетом симметрии север – юг

$$\tau(a) = \frac{4\pi}{3} R^3 a^3 \int_0^{\pi/2} u^3(a, q, \theta) \sin \theta d\theta.$$

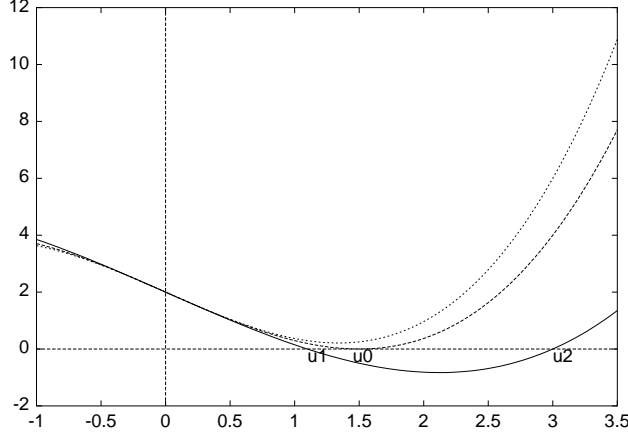


Рис. 2.3: График функции $f(u) = qu^3 - 2u + 2$.

По условию Ляпунова

$$\int_0^{\pi/2} u^3(a, q, \theta) \sin \theta d\theta = 1. \quad (2.24)$$

В силу (2.15) соотношение (2.24) равносильно

$$qa^3 = \frac{2}{v} \int_0^{\pi/2} \frac{u - v}{\sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{F(\zeta) - 1}{\sin \theta} d\theta. \quad (2.25)$$

Как и в предыдущем пункте, R произвольно, a меняется от 0 до 1. Соотношение (2.25) представляет собой уравнение, связывающее q, a, v . Величины q, a входят только в комбинации qa^3 . Иными словами, (2.25) имеет вид

$$H(qa^3, v) = 0,$$

так что v — функция от qa^3 ; u — функция от qa^3, θ , как и в случае простейшей параметризации.

В данном случае параметризация Ляпунова неудобна, так как влечет необходимость решать уравнение (2.25). Кроме того, она лишает ряд (2.19) статуса ряда Тейлора по q , поскольку от этого параметра зависит теперь v . Но во многих других случаях параметризация Ляпунова естественна.

Отметим, что величины R, a, q различны при разных параметризациях. В частности, критическое значение q , отвечающее ребру на экваторе, теперь равно (*Холшевников и Курдубов, 2002*)

$$q^* = 3\sqrt{3} - 4 + 3\ln(6 - 3\sqrt{3}) = 0.541116. \quad (2.26)$$

Задачи к главе 2

Задача 1. Вывести эквивалентность выражений (2.19) и (2.20) для c_n , применяя формулу Стирлинга для факториалов.

Задача 2. Найти угол между предельными положениями касательной плоскости к поверхности критической фигуры Роша при стремлении точки касания к экватору с севера и юга.

Задача 3. Убедитесь, что подстановка (2.16), (2.17), (2.18) обращает в нуль левую часть (2.15) (воспользуйтесь формулой $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$).

Задача 4. Решить уравнение (2.25) разложением v в ряд Маклорена по q с точностью до q^3 .

Глава 3

Притяжение эллипсоидальных тел

3.1 Эллипсоидальный слой

Определение 1. *Гомотетическими эллипсоидами называются подобные и подобно расположенные эллипсоиды, т. е. эллипсоиды E и E' с общим центром, с одинаково ориентированными осями и с одинаковыми отношениями полуосей $a : b : c = a' : b' : c'$.*

Определение 2. *Эллипсоидальным слоем называется слой, заключенный между поверхностями двух гомотетических эллипсоидов.*

Например, слой между поверхностями эллипсоидов $S(k_i)$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = k_i^2, \quad i = 1, 2, \quad (3.1)$$

будет эллипсоидальным. Через любую точку пространства можно провести эллипсоид, гомотетический данному.

Лемма 1. *Проведем прямую так, чтобы она пересекала эллипсоидальный слой в четырех точках. Тогда отрезки этой прямой, заключенные внутри слоя, равны между собой.*

Доказательство. Отрезок прямой, заключенный между двумя точками пересечения с поверхностью эллипсоида, называется хордой. Покажем, что середины параллельных между собой

хорд эллипсоида $S(1)$ лежат в одной плоскости, проходящей через центр эллипсоида. Пусть уравнение прямой для одной из хорд $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{e}t$, где $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ — начальная точка, $\mathbf{e}(\lambda, \mu, \nu)$ — направляющий вектор.

Точки концов хорды найдем из системы

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (3.2)$$

$$x = x_0 + \lambda t, \quad y = y_0 + \mu t, \quad z = z_0 + \nu t. \quad (3.3)$$

Подставив уравнение прямой (3.3) в равенство (3.2), получим квадратное уравнение относительно параметра t

$$a_0 t^2 + 2a_1 t + a_2 = 0,$$

где

$$a_0 = \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} + \frac{\nu^2}{c^2}, \quad a_1 = \frac{\lambda x_0}{a^2} + \frac{\mu y_0}{b^2} + \frac{\nu z_0}{c^2}, \quad a_2 = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1.$$

По теореме Виета середине хорды отвечает параметр

$$t_0 = (t_1 + t_2)/2 = -(a_1/a_0),$$

так что радиус-вектор середины хорды равен

$$\mathbf{r}_{mid} = \mathbf{r}_0 - \frac{a_1}{a_0} \mathbf{e}, \quad (3.4)$$

где t_1, t_2 — корни квадратного уравнения.

Умножив скалярно обе части равенства (3.4) на вектор $\mathbf{n} = (\lambda/a^2, \mu/b^2, \nu/c^2)$, получим уравнение плоскости

$$\mathbf{n} \mathbf{r}_{mid} = 0,$$

называемой *сопряженной* с вектором \mathbf{e} . Сопряженная плоскость будет общей для гомотетических эллипсоидов (3.1), и, следовательно, середины хорд для внешнего и внутреннего эллипсоидов совпадают. Отсюда — отрезки прямой между поверхностями эллипсоидов равны. Лемма доказана.

3.2 Теорема Ньютона

Однородный эллипсоидальный слой внутренние точки не притягивает.

Доказательство. Пусть Q — внутренняя точка полости, окруженная эллипсоидальным слоем. Плотность эллипсоидального слоя $\varrho = \text{const}$. Проведем очень узкий конус через точку Q , телесный угол которого $d\Omega$. Внутри эллипсоидального слоя на расстоянии r от точки Q выделим в конусе бесконечно малый объем $d\tau = r^2 d\Omega dr$. Масса его равна $dm = \varrho r^2 d\Omega dr$, и в точке Q он индуцирует ускорение

$$dw = \frac{G\varrho r^2 d\Omega dr}{r^2} = G\varrho d\Omega dr.$$

Чтобы найти притяжение от всего участка конуса в эллипсоидальном слое, нужно вычислить интеграл вдоль радиуса r от внутренней поверхности слоя (r_1) до внешней (r_2):

$$\int_{r_1}^{r_2} G\varrho d\Omega dr = Gh\varrho d\Omega,$$

где h — длина конуса в эллипсоидальном слое вдоль радиуса.

Если рассмотреть тот же самый конус, но в противоположном направлении, то такое же значение притяжения получаем для противоположного объема, поскольку расстояния h вдоль радиуса r по лемме равны. Силы равны и направлены противоположно, равнодействующая равна нулю. Рассматривая весь эллипсоидальный слой, т. е. все направления, получаем в сумме тоже нуль:

$$w(Q) = 0, \quad V(Q) = \text{const} \quad \text{внутри полости.}$$

Теорема доказана.

3.3 Софокусные эллипсоиды

Определение 3. Два эллипсоида, у которых совпадают фокусы во всех трех главных сечениях, называются софокусными.

Поскольку квадраты фокусных расстояний от центра эллипсоида равны разностям квадратов полуосей, условие софокусности

эллипсоидов E и E' с полуосями (a, b, c) и (a', b', c') запишется в виде

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2, \quad b^2 - c^2 = b'^2 - c'^2, \quad a^2 - c^2 = a'^2 - c'^2, \quad (3.5)$$

что равносильно

$$(a^2 - a'^2) = (b^2 - b'^2) = (c^2 - c'^2). \quad (3.6)$$

Пусть первый эллипсоид задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (3.7)$$

Тогда эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2 + u} + \frac{y^2}{b^2 + u} + \frac{z^2}{c^2 + u} = 1 \quad (3.7')$$

согласно равенству (3.6) будет софокусным исходному при любом u , при которых знаменатели в (3.7') положительны.

Через любую точку пространства можно подбором u провести эллипсоид, софокусный с данным. Не умаляя общности, считаем далее $c^2 \leq b^2 \leq a^2$. Тогда

$$-c^2 < u < +\infty.$$

Очевидно, софокусность — свойство взаимное.

Определение 4. Две точки $P(x, y, z)$ и $P'(x', y', z')$ на двух софокусных эллипсоидах называются соответственными, если они удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1, \\ \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} &= 1, \\ \frac{x'}{a'} &= \frac{x}{a}, \quad \frac{y'}{b'} = \frac{y}{b}, \quad \frac{z'}{c'} = \frac{z}{c}. \end{aligned}$$

Лемма 2. Пусть даны точки $P(x, y, z)$ и $Q'(\xi', \eta', \zeta')$ на софокусных эллипсоидах E и E' соответственно. Построим соответственные им точки $P'(x', y', z') \in E'$ и $Q(\xi, \eta, \zeta) \in E$. Тогда $PQ' = P'Q$.

Доказательство. Обозначим r, r' — расстояния $PQ', P'Q$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} r^2 &= (x - \xi')^2 + \dots, \\ r'^2 &= (x' - \xi)^2 + \dots \end{aligned}$$

Так как для соответственных точек $x' = \frac{a'}{a}x, \xi' = \frac{a'}{a}\xi$ и т. д., то

$$\begin{aligned} r^2 - r'^2 &= (x - \xi')^2 - (x' - \xi)^2 + \dots = \left(1 - \frac{a'^2}{a^2}\right)x^2 - \left(1 - \frac{a'^2}{a^2}\right)\xi^2 + \dots = \\ &= (a^2 - a'^2) \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{\xi^2}{a^2}\right) + (b^2 - b'^2) \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{\eta^2}{b^2}\right) + (c^2 - c'^2) \left(\frac{z^2}{c^2} - \frac{\zeta^2}{c^2}\right). \end{aligned}$$

Поскольку для софокусных эллипсоидов справедливо равенство (3.6) и точки $P(x, y, z)$ и $Q(\xi, \eta, \zeta)$ лежат на эллипсоиде E , то

$$r^2 - r'^2 = (a^2 - a'^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{\zeta^2}{c^2}\right) = 0.$$

Лемма доказана.

3.4 Софокусные эллипсоидальные слои

Пусть дан эллипсоидальный слой T , поверхности S_i которого подобны и заданы уравнениями (3.1). Пусть $0 < k_1 < k_2$.

Возьмем произвольную точку вне слоя и проведем эллипсоид S_1' с полуосями a', b', c' , софокусный с эллипсоидом S_1 :

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = k_1^2. \quad (3.8)$$

Для него построим гомотетический эллипсоид S_2' с коэффициентом подобия k_2/k_1 :

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = k_2^2. \quad (3.9)$$

Легко проверить, что эллипсоид S_2' будет софокусным. Получили два эллипсоидальных слоя T и T' , ограничивающие поверхности которых соответственно софокусны. Такие два слоя называются *софокусными*.

3.5 Первая теорема Шаля

Всякий эллипсоид, софокусный с данным, является поверхностью уровня для потенциала бесконечно тонкого, однородного эллипсоидального слоя, построенного на данном эллипсоиде.

Доказательство. Даны: эллипсоид S с полуосями a, b, c , бесконечно тонкий эллипсоидальный слой T с плотностью ϱ , построенный на S и точка P' вне его.

Построим софокусный бесконечно тонкий эллипсоидальный слой T' на эллипсоиде S' с полуосями a', b', c' , проходящем через P' . Пусть точка P — соответственная P' . Рассмотрим потенциалы $V'(P)$ и $V(P')$, создаваемые соответственно эллипсоидальными слоями T' и T :

$$V'(P) = G\varrho' \int_{T'} \frac{d\tau'}{r'}, \quad V(P') = G\varrho \int_T \frac{d\tau}{r}. \quad (3.10)$$

Сопоставим элемент $d\tau'$ на T' соответственному элементу $d\tau$ на T . Тогда в интегралах (3.10) две величины r и r' будут равны по лемме и

$$d\tau' = \frac{a'b'c'}{abc} d\tau.$$

Перейдем в первом из выражений (3.10) к интегрированию по T :

$$V'(P) = G\varrho' \frac{a'b'c'}{abc} \int_T \frac{d\tau}{r} = \frac{\varrho'a'b'c'}{\varrho abc} V(P'). \quad (3.11)$$

Точка P для T' является внутренней и по теореме Ньютона потенциал $V'(P)$ постоянен для всех $P \in T$. Отсюда $V(P') = \text{const}$ на S' и, значит, софокусный эллипсоид S' — уровенная поверхность потенциала бесконечно тонкого эллипсоидального слоя T .

Теорема доказана.

3.6 Вторая теорема Шаля

Два софокусных однородных эллипсоидальных слоя притягивают внешнюю точку с силами, направленными параллельно друг другу и по величине пропорциональными массам соответствующих однородных эллипсоидов.

Доказательство. Пусть даны софокусные бесконечно тонкие эллипсоидальные слои ϱ', a', b', c' и ϱ'', a'', b'', c'' и внешняя для обоих слоев точка P . Пусть точки P' и P'' — соответственные P на этих эллипсоидах. Проведем через точку P эллипсоидальный слой ϱ, a, b, c , софокусный двум первым. По первой теореме Шаля

$$V'(P) = \frac{\varrho' a' b' c'}{\varrho a b c} V(P'),$$

$$V''(P) = \frac{\varrho'' a'' b'' c''}{\varrho a b c} V(P'').$$

Так как обе точки P' и P'' — внутренние для эллипсоидального слоя с потенциалом V , то $V(P') = V(P'')$ и отсюда

$$\frac{V'(P)}{\varrho' a' b' c'} = \frac{V''(P)}{\varrho'' a'' b'' c''}.$$

Если умножить знаменатели на $\frac{4}{3}\pi$, то получим массы эллипсоидов. Перейдя к градиентам, получим, что силы пропорциональны массам:

$$\frac{\mathbf{F}'}{M'} = \frac{\mathbf{F}''}{M''}.$$

Теорема доказана.

3.7 Теорема Лапласа

Как следствие доказанных теорем Шаля получим теорему Лапласа:

Однородные софокусные эллипсоиды притягивают внешнюю точку с силами, параллельными друг другу и пропорциональными массам эллипсоидов.

Следуя традиции, будем называть эллипсоидом не только поверхность, но и ограниченное ею тело, если это не приводит к путанице.

Разобьем каждый из эллипсоидов T_i ($i = 1, 2$) на N достаточно тонких эллипсоидальных слоев T_{in} ($n = 1 \div N$). Разбиваем так, чтобы слои T_{1n} и T_{2n} были софокусны и для них выполнялись теоремы Шаля. При этом объемы эллипсоидов, на которых они лежат, составляют одинаковую долю от первоначальных эллипсоидов.

Поскольку потенциал есть аддитивная функция, то, суммируя и устремляя N к бесконечности, получаем теорему Лапласа.

3.8 Притяжение однородного эллипсоида для внутренней точки

Пусть имеется однородный эллипсоид T с плотностью ρ и полуосями a, b, c . Найдем значение гравитационного потенциала и силы притяжения во внутренней точке $P(x, y, z) \in T$. Проекция силы притяжения на ось абсцисс равна

$$F_x(P) = -G\rho \int_T \frac{x-\xi}{r^3} d\tau, \quad d\tau = d\xi d\eta d\zeta.$$

Перейдем под знаком интеграла к сферическим координатам с центром в точке P :

$$\xi = x + r\alpha,$$

$$\eta = y + r\beta,$$

$$\zeta = z + r\gamma,$$

где r — длина вектора PQ ; α, β, γ — направляющие косинусы. В сферических координатах элемент объема $d\tau = r^2 dr d\Omega$, $d\Omega$ — элемент поверхности единичной сферы. Отсюда

$$F_x = G\rho \int \alpha d\Omega \int_0^{r_{max}} dr = G\rho \int \alpha r_{max} d\Omega, \quad (3.12)$$

где интегралы берутся по поверхности единичной сферы, если не

оговорено противное, r_{max} — максимальное значение r (до поверхности эллипсоида E) в заданном направлении (функция полярных координат α, β, γ).

Чтобы найти r_{max} , подставляем в уравнение поверхности эллипсоида уравнение луча из точки P :

$$\frac{(x + r\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y + r\beta)^2}{b^2} + \frac{(z + r\gamma)^2}{c^2} = 1,$$

что равносильно

$$Ar^2 + 2Br + C = 0, \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}, \\ B &= \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} + \frac{\gamma z}{c^2}, \\ C &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1. \end{aligned}$$

Поскольку $A > 0, C < 0$ (точка P — внутренняя), уравнение (3.13) имеет единственное положительное решение

$$r_{max} = -\frac{B}{A} + \sqrt{\frac{B^2 - AC}{A^2}}.$$

Подставив это выражение в (3.12), получаем

$$F_x = -G_\varrho \int \alpha \frac{B}{A} d\Omega + G_\varrho \int \alpha \sqrt{\frac{B^2 - AC}{A^2}} d\Omega.$$

Покажем, что второй интеграл равен нулю. Рассмотрим два противоположных направления: α, β, γ и $-\alpha, -\beta, -\gamma$. Значения подынтегральной функции будут равны по абсолютному значению, но противоположны по знаку. При интегрировании по сфере получаем нуль. Останется

$$\begin{aligned} F_x &= -G_\varrho \int \alpha \frac{B}{A} d\Omega = -G_\varrho \int \left(\frac{\alpha^2 x}{a^2} + \frac{\alpha\beta y}{b^2} + \frac{\alpha\gamma z}{c^2} \right) \frac{d\Omega}{A} = \\ &= -G_\varrho x \int \frac{\alpha^2}{a^2} \frac{d\Omega}{A} - G_\varrho y \int \frac{\alpha\beta}{b^2} \frac{d\Omega}{A} - G_\varrho z \int \frac{\alpha\gamma}{c^2} \frac{d\Omega}{A}. \end{aligned}$$

Последние два интеграла равны нулю по соображениям симметрии. Действительно, если сочетать направления луча в прямом и противоположном направлении и симметричных им относительно координатных плоскостей и осей, то будем получать равные по абсолютной величине, но разные по знакам значения подынтегральных функций и при интегрировании по сфере интегралы обращаются в нуль. Останется

$$F_x = -G\rho \frac{x}{a^2} \int \frac{\alpha^2}{A} d\Omega.$$

Перейдем к сферическим координатам по формулам

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos \theta, \\ \beta &= \sin \theta \cos \varphi, \\ \gamma &= \sin \theta \sin \varphi.\end{aligned}$$

Дифференциальный элемент поверхности единичной сферы равен

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Отсюда

$$F_x = -G\rho \frac{x}{a^2} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{c^2}}.$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{c^2}} = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}\right) \cos^2 \varphi + \left(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{c^2}\right) \sin^2 \varphi} = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{P \cos^2 \varphi + Q \sin^2 \varphi}.\end{aligned}$$

Последний интеграл элементарен (см. задачу 1) и равен $2\pi/\sqrt{PQ}$, так что

$$F_x = -2\pi G\rho \frac{x}{a^2} \int_0^\pi \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{\sqrt{(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2})(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{c^2})} =$$

$$-4\pi G\rho \frac{x}{a^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{\sqrt{(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2})(\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{c^2})}.$$

Подстановка

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + s}}, \quad s > 0,$$

приводит к

$$F_x = -2\pi G\rho xabc \int_0^\infty \frac{(a^2 + s)ds}{\sqrt{(b^2 + s)(c^2 + s)(a^2 + s)^{\frac{5}{2}}}} =$$

$$-2\pi G\rho xabc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}}.$$

Обозначая $\delta(s) = \sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s)}$, получаем окончательно

$$F_x = -2\pi G\rho xabc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\delta(s)}. \quad (3.14)$$

По равноправию осей

$$F_y = -2\pi G\rho yabc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2 + s)\delta(s)}, \quad (3.15)$$

$$F_z = -2\pi G\rho zabc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)\delta(s)}. \quad (3.16)$$

Интегралы сводятся к эллиптическим. Введя обозначения

$$P = \pi G\rho abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\delta(s)},$$

$$Q = \pi G \varrho abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(b^2 + s)\delta(s)},$$

$$R = \pi G \varrho abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{(c^2 + s)\delta(s)},$$

можно записать

$$dV = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -2(Px dx + Qy dy + Rz dz).$$

Отсюда

$$V(x, y, z) = -(Px^2 + Qy^2 + Rz^2) + V_0,$$

где V_0 — значение потенциала в начале координат (центр эллипсоида). Осталось найти значение константы V_0 . Будем исходить из формулы для точки $(0,0,0)$ в центре эллипсоида

$$V_0 = G \varrho \int_T \frac{dT}{r} = G \varrho \int d\Omega \int_0^{r_{max}} r dr = \frac{1}{2} G \varrho \int r_{max}^2 d\Omega.$$

Пусть направляющий единичный вектор из начала координат есть (α, β, γ) , тогда

$$r_{max}^2 \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2} \right) = 1.$$

Отсюда

$$V_0 = \frac{1}{2} G \varrho \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{b^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{c^2}}.$$

Проведя аналогичные предыдущим выкладки, найдем

$$V_0 = \pi G \varrho abc \int_0^{\infty} \frac{ds}{\delta(s)}.$$

Вот окончательное выражение потенциала для внутренних точек однородного эллипсоида:

$$V(x, y, z) = \pi G \varrho abc \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{\delta(s)}. \quad (3.17)$$

Если две полуоси равны между собой (эллипсоид вращения), то интегралы выражаются в элементарных функциях. Пусть $a = b \geq c$, эксцентриситет меридионального сечения $e = \sqrt{1 - c^2/a^2}$, тогда

$$F_x = -2\pi G \rho x \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2} \right), \quad (3.18)$$

$$F_y = -2\pi G \rho y \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2} \right), \quad (3.19)$$

$$F_z = -4\pi G \rho z \left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e \right), \quad (3.20)$$

$$V = \pi G \rho \left\{ 2a^2 \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} \arcsin e - (x^2 + y^2) \left(\frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e - \frac{1 - e^2}{e^2} \right) - 2z^2 \left(\frac{1}{e^2} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \arcsin e \right) \right\}. \quad (3.21)$$

Если ввести второй эксцентриситет меридионального сечения $l = \sqrt{a^2/c^2 - 1}$, то

$$F_x = -2\pi G \rho x \frac{1 + l^2}{l^3} \left(\operatorname{arctg} l - \frac{l}{1 + l^2} \right), \quad (3.22)$$

$$F_y = -2\pi G \rho y \frac{1 + l^2}{l^3} \left(\operatorname{arctg} l - \frac{l}{1 + l^2} \right), \quad (3.23)$$

$$F_z = -4\pi G \rho z \frac{1 + l^2}{l^3} (l - \operatorname{arctg} l), \quad (3.24)$$

$$V(x, y, z) = \pi G \rho \frac{1 + l^2}{l^3} \left\{ 2c^2 l^2 \operatorname{arctg} l - (x^2 + y^2) \left(\operatorname{arctg} l - \frac{l}{1 + l^2} \right) - 2z^2 (l - \operatorname{arctg} l) \right\}. \quad (3.25)$$

3.9 Притяжение однородного эллипсоида для внешней точки

Пусть точка $P(x, y, z)$ — внешняя для данного эллипсоида T с полуосями a, b, c и массой M . Проведем через точку P эллип-

соид (3.7'), софокусный с данным. Полуоси нового эллипсоида T' равны

$$\begin{aligned} a' &= \sqrt{a^2 + u}, \\ b' &= \sqrt{b^2 + u}, \\ c' &= \sqrt{c^2 + u}, \end{aligned}$$

где u — корень уравнения (3.7').

Предположим, что эллипсоид T' заполнен материей с плотностью ρ исходного эллипсоида. Пусть F_x, F_y, F_z — проекции силы притяжения эллипсоида T в точке P ; F'_x, F'_y, F'_z — проекции силы притяжения эллипсоида T' . Точку P можно считать внешней по отношению к обоим эллипсоидам (для эллипсоида T' — предельный случай внешней точки). Можем применить теорему Лапласа:

$$\frac{F_x}{F'_x} = \frac{M}{M'} = \frac{abc}{a'b'c'},$$

откуда

$$F_x = \frac{abc}{a'b'c'} F'_x.$$

Так как точка P для второго эллипсоида является одновременно и внутренней (как предельный случай), то, выражая F'_x по формуле (3.14), получаем

$$F_x = \frac{abc}{a'b'c'} \left(-2\pi G \rho x a' b' c' \int_0^\infty \frac{ds}{(a'^2 + s) \delta'(s)} \right).$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \delta'(s) &= \sqrt{(a'^2 + s)(b'^2 + s)(c'^2 + s)} = \\ &= \sqrt{(a^2 + u + s)(b^2 + u + s)(c^2 + u + s)} = \delta(u + s), \end{aligned}$$

и переходя к новой переменной интегрирования $s' = u + s$, находим

$$F_x = -2\pi G \rho x abc \int_u^\infty \frac{ds'}{(a^2 + s') \delta(s')}. \quad (3.26)$$

Таким образом, выражение для внешней точки отличается лишь нижним пределом от формулы (3.14) для внутренней точки. Проверим, что выражение для потенциала имеет вид

$$V(x, y, z) = \pi G \rho abc \int_u^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s} - \frac{z^2}{c^2 + s} \right) \frac{ds}{\delta(s)}. \quad (3.27)$$

По определению потенциала при дифференцировании функции $V(x, y, z)$ по переменным (x, y, z) должны получиться соответствующие компоненты ускорений F_x, F_y, F_z . При этом следует учесть, что нижний предел в интеграле u есть функция координат точки $P(x, y, z)$. Известно, что если функция F имеет вид

$$F(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(t, \alpha) dt,$$

то при обычных условиях гладкости

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} \frac{\partial f}{\partial \alpha} dt + \frac{db}{d\alpha} f(b, \alpha) - \frac{da}{d\alpha} f(a, \alpha).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = & \pi G \rho abc \left\{ (-2x) \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\delta(s)} \right. \\ & \left. - \frac{\partial u}{\partial x} \left[1 - \frac{x^2}{a^2 + u} - \frac{y^2}{b^2 + u} - \frac{z^2}{c^2 + u} \right] \frac{1}{\delta(u)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Поскольку точка $P(x, y, z)$ лежит на поверхности эллипсоида T' , то выражение в квадратных скобках в (3.28) обращается в нуль и остается

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -2\pi G \rho x abc \int_u^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\delta(s)},$$

что совпадает с полученным выражением (3.26) для F_x .

В общем случае получаются эллиптические интегралы. Для эллипсоида вращения ($a = b$) можно получить выражения в элементарных функциях. Через второй эксцентриситет меридионального сечения $l = \sqrt{a^2/c^2 - 1}$ компоненты ускорения и потенциал выражаются следующим образом:

$$F_x = -2\pi G \rho x \frac{1+l^2}{l^3} \left(\operatorname{arctg}(lU) - \frac{lU}{1+l^2U^2} \right), \quad (3.29)$$

$$F_y = -2\pi G \rho y \frac{1+l^2}{l^3} \left(\operatorname{arctg}(lU) - \frac{lU}{1+l^2U^2} \right), \quad (3.30)$$

$$F_z = -4\pi G \rho z \frac{1+l^2}{l^3} \left(lU - \operatorname{arctg}(lU) \right), \quad (3.31)$$

$$V(x, y, z) = \pi G \rho \frac{1+l^2}{l^3} \left(2c^2 l^2 \operatorname{arctg}(lU) - \right. \\ \left. (x^2 + y^2) \left(\operatorname{arctg}(lU) - \frac{lU}{1+l^2U^2} \right) - 2z^2 \left(lU - \operatorname{arctg}(lU) \right) \right), \quad (3.32)$$

где $U = c/\sqrt{c^2 + u}$, а $u = u(x, y, z)$ находится из уравнения (3.7').

Задачи к главе 3

Задача 1. Найти значение интеграла

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{P \cos^2 \varphi + Q \sin^2 \varphi}.$$

Указание. Можно воспользоваться нахождением площади эллипса в полярных координатах.

Глава 4

Эллипсоидальные фигуры равновесия однородной, твердотельно вращающейся жидкости

4.1 Существование равновесных эллипсоидов

Для вращающегося тела наряду с потенциалом тяготения необходимо рассматривать потенциал центробежных сил. Пусть система координат выбрана так, чтобы ось z совпадала с осью вращения тела, угловая скорость — одна для всех точек тела, т. е. вращение твердотельное. Суммарный потенциал силы тяжести (2.6) равен

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2). \quad (4.1)$$

Поверхность равновесного жидкого тела, определяемая силами, соответствующими потенциалу силы тяжести, должна быть одной из уровней поверхностей

$$W(x, y, z) = C_0 = \text{const}. \quad (4.2)$$

Предположим, что наружная поверхность имеет форму эллипсоида, и покажем существование такой фигуры равновесия для однородной твердотельно вращающейся жидкой массы. Как было

показано (глава 3), потенциал тяготения однородного эллипсоида для внутренних точек имеет вид

$$V(x, y, z) = V_0 - Px^2 - Qy^2 - Rz^2, \quad (4.3)$$

где V_0, P, Q, R — постоянные.

Покажем, что коэффициенты P, Q, R зависят только от отношения полуосей эллипсоида. Пусть у эллипсоида полуоси a, b, c , плотность ρ . Коэффициент P равен

$$P = \pi G \rho abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\delta(s)}.$$

Возьмем другой эллипсоид с тем же отношением полуосей

$$a' = ka, \quad b' = kb, \quad c' = kc$$

и вычислим соответствующий коэффициент P' для его внутренних точек:

$$P' = \pi G \rho a' b' c' \int_0^\infty \frac{ds}{(a'^2 + s)\delta'(s)} =$$

$$\pi G \rho q^3 abc \int_0^\infty \frac{ds}{(k^2 a^2 + s)\sqrt{(k^2 a^2 + s)(k^2 b^2 + s)(k^2 c^2 + s)}}.$$

Переходя к новой переменной интегрирования $t = k^2 s$, получаем $P = P'$. Таким образом, коэффициенты P, Q, R зависят только от отношения полуосей.

Соотношение (4.2) для урванной поверхности с учетом (4.1) и (4.3) дает

$$\left(P - \frac{\omega^2}{2}\right)x^2 + \left(Q - \frac{\omega^2}{2}\right)y^2 + Rz^2 = C_0. \quad (4.4)$$

Для того чтобы существовал равновесный эллипсоид с полуосями a, b, c , (a — по x , b — по y , c — по z), на поверхности эллипсоида должны выполняться в точках $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$ равенства

$$a^2 \left(P - \frac{\omega^2}{2}\right) = b^2 \left(Q - \frac{\omega^2}{2}\right) = Rc^2 = C_0. \quad (4.5)$$

Пусть $c \leq b \leq a$. Введем параметры u, v , связанные с отношениями полуосей эллипсоида:

$$u = \frac{c^2}{a^2}, \quad v = \frac{c^2}{b^2},$$

при этом $0 \leq u, v \leq 1$.

Из равенств (4.5) имеем

$$P - \frac{\omega^2}{2} = uR \quad (4.6)$$

и

$$Q - \frac{\omega^2}{2} = vR. \quad (4.7)$$

Выражая ω^2 через q согласно (2.9), получим из уравнения (4.6)

$$\frac{2}{3}q = \frac{P - uR}{\pi G \varrho} = abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2 + s)\delta(s)} - abc u \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2 + s)\delta(s)}. \quad (4.8)$$

Первое слагаемое в равенстве (4.8) при переходе под знаком интеграла к новой переменной s' , $s = s'c^2$ преобразуется к

$$u \int_0^\infty \frac{ds}{(1 + us)D(s)},$$

где штрихи опущены и $D(s) = \sqrt{(1 + us)(1 + vs)(1 + s)}$; второе слагаемое аналогично трансформируется к

$$u \int_0^\infty \frac{ds}{(1 + s)D(s)}.$$

Таким образом,

$$\frac{2}{3}q = u \int_0^\infty \frac{(1 - u)s ds}{(1 + s)(1 + us)D(s)}. \quad (4.9)$$

Из второго аналогичного соотношения (4.7) получаем

$$\frac{2}{3}q = v \int_0^\infty \frac{(1 - v)s ds}{(1 + s)(1 + vs)D(s)}. \quad (4.10)$$

Чтобы эллипсоид был уровенной поверхностью, нужно, чтобы две эти величины были равны. Отсюда

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{u(1-u)}{1+us} - \frac{v(1-v)}{1+vs} \right] \frac{sds}{(1+s)D(s)} = 0.$$

После приведения к общему знаменателю получаем уравнение, которому должны удовлетворять параметры u, v для равновесных эллипсоидальных фигур:

$$(u-v) \int_0^{\infty} \frac{(1-u-v-uvs)sds}{D^3(s)} = 0. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) удовлетворяется в двух случаях.

1. $u-v=0$ или $a=b$, что отвечает эллипсоиду вращения. Это однопараметрическое семейство решений нашел в 1742 г. К. Маклорен, и соответствующие фигуры равновесия называются эллипсоидами Маклорена.

2. Второе решение, найденное в 1837 г. К. Якоби, должно удовлетворять соотношению

$$\int_0^{\infty} \frac{(1-u-v-uvs)sds}{D^3(s)} = 0, \quad (4.12)$$

которое тоже определяет однопараметрическое семейство. Замена $u \leftrightarrow v$ оставляет уравнение (4.12) инвариантным, поэтому эллипсоиды $S(u, v)$, $S(v, u)$ переходят друг в друга при повороте на 90° вокруг оси z . Существование решения легко увидеть. Действительно, $0 \leq u, v \leq 1$. Закрепим произвольное значение u , $0 < u < 1$. Полагая $v=0$ в левой части (4.12), получаем

$$\int_0^{\infty} \frac{(1-u)sds}{D^3(s)} > 0.$$

Аналогично при $v=1$

$$\int_0^{\infty} \frac{(-u)(1+s)sds}{D^3(s)} < 0.$$

По непрерывности найдется v , $0 < v < 1$, удовлетворяющее соотношению (4.12). В общем случае найденные равновесные эллипсоиды трехосны и называются эллипсоидами Якоби. Уравнения (4.10) и (4.12) были тщательно исследованы С.О.Мейером (*Meyer, 1842*), который показал, что при заданных полуосях a и b существует только одно значение c , удовлетворяющее уравнению (4.12). Мейер также показал, что при $a = b = 1.716c$ правые части (4.9) и (4.10) достигают наибольшего значения 0.187115 ($q = 0.28067$) и эллипсоид Якоби совпадает с одним из эллипсоидов Маклорена.

4.2 Эллипсоиды Маклорена

Для эллипсоидов Маклорена $u = v$ и уравнение (4.9) принимает вид

$$\frac{2}{3}q = \int_0^{\infty} \frac{u(1-u)sds}{(1+s)^{3/2}(1+us)^2}. \quad (4.13)$$

Интеграл (4.13) элементарен:

$$q = \frac{3}{2} \left(\frac{1+2u}{1-u} \sqrt{\frac{u}{1-u}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-u}{u}} - \frac{3u}{1-u} \right).$$

Полученное соотношение можно преобразовать, если выразить u через эксцентриситет меридионального сечения e или второй эксцентриситет l (см. задачу 1). В результате

$$\begin{aligned} q &= \frac{3}{2e^3} \left\{ (3 - 2e^2) \sqrt{1 - e^2} \arcsin e - 3e(1 - e^2) \right\} = \\ &= \frac{3}{2l^3} \left\{ (3 + l^2) \operatorname{arctg} l - 3l \right\}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Формула (4.14) не содержит сингулярностей при $l = e = 0$, как это следует из тейлоровских разложений

$$q = 6 \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{4n^2 + 8n + 3} l^{2n}, \quad (4.15)$$

$$q = 3 \sum_1^{\infty} \frac{(3-n)(2n-2)!!}{(2n+3)!!} e^{2n} \quad (4.16)$$

(см. задачи 3–5). Заметим, что представление (4.15) справедливо лишь при $l < 1$, или, что то же, $e < 1/\sqrt{2}$, тогда как (4.16) применимо даже в предельном случае $l = \infty$, или, что то же, $e = 1$.

Функция (4.14) обращается в нуль при $e = 0$ и $e = 1$. Ее производные по e^2 обращаются в минус бесконечность при $e = 1$, как это следует из расходимости производных ряда (4.16) при $e = 1$ и отрицательности всех коэффициентов ряда за исключением первых двух положительных и третьего, равного нулю. Поскольку $d^2q/d(e^2)^2$ убывает от $4/35$ до $-\infty$, она имеет единственный корень $\xi \in (0, 1)$. Поэтому $dq/d(e^2)$ имеет единственный на $(0, 1)$ корень $e^2 \in (\xi, 1)$.

Итак, функция q имеет на $[0, 1]$ единственный максимум q_0 в точке e_0 или в соответствующей ей точке u_0 . Вычисления дают

$$e_0 = 0.92995569, \quad u_0 = 0.13518242, \quad q_0 = 0.33699856.$$

Функция q представлена на рис. 4.1 и 4.2.

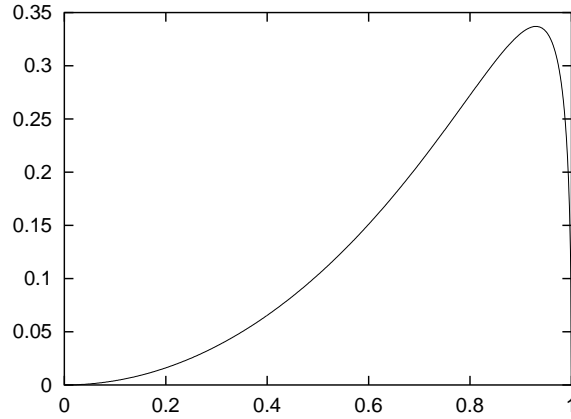


Рис. 4.1: График функции $q(e)$.

Для существования эллипсоидов Маклорена необходимо, чтобы

$$q \leq q_0.$$

В случае строгого неравенства одному значению q соответствуют два эллипсоида Маклорена: на левой (см. рис. 4.1) ветви графика — 1-го рода (слабосжатые) и на правой — 2-го рода (сильносжатые). Максимальному значению q_0 отвечает единственная фигура.

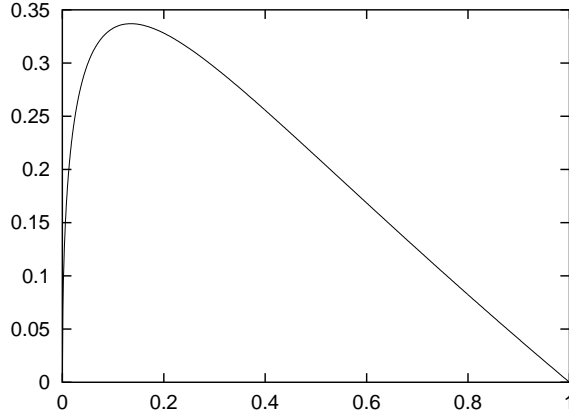


Рис. 4.2: График функции $q(u)$.

4.3 Эллипсоиды Якоби

Перейдем к случаю $u \neq v$ (эллипсоиды Якоби). Можно преобразовать выражение для q к симметричному виду по u и v . Если рассмотреть разность $vq - uq$, где в первом случае q выражено по формуле (4.9), а во втором — по (4.10), то после очевидных преобразований и сокращений получим

$$\frac{2}{3}q = uv \int_0^{\infty} \frac{sds}{(1+us)(1+vs)D(s)}. \quad (4.17)$$

Условие (4.11) для равновесного эллипсоида тоже имеет симметричный вид по u и v . Поэтому при изображении семейства эллипсоидов Якоби в пространстве параметров u, v, q , кривая семейства будет симметрична относительно плоскости $u = v$, проходящей через ось q (рис. 4.3). На этом же графике семейство эллипсоидов Маклорена отобразится кривой над биссектрисой $u = v$.

На рис. 4.3 точки O, A, B, C соответствуют предельным случаям однородных равновесных равномерно вращающихся эллипсоидальных фигур:

$C(1, 1)$ — однородный шар,

$O(0, 0)$ — бесконечно тонкий однородный диск (диск Маклорена),

инвариантом для тела, на которое не действуют другие тела, является не угловая скорость, а момент вращения

$$L = \int_T (xy - yx) \rho d\tau$$

относительно оси z . С учетом $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ выпишем интегральные представления L , M и J — момента инерции относительно оси z :

$$L = \int_T \omega(x^2 + y^2) \rho d\tau, \quad (4.18)$$

$$M = \int_T \rho d\tau, \quad (4.19)$$

$$J = \int_T (x^2 + y^2) \rho d\tau. \quad (4.20)$$

Отсюда

$$L = \omega J. \quad (4.21)$$

Масса однородного эллипсоида хорошо известна:

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho abc. \quad (4.22)$$

Момент инерции будет найден в задаче 7:

$$J = \frac{M}{5} (a^2 + b^2). \quad (4.23)$$

Соотношения (2.8), (4.21), (4.23) позволяют получить следующую зависимость основного параметра q от L , M , a , b , c :

$$q = 6\Theta \left(\frac{R^2}{a^2 + b^2} \right)^2, \quad (4.24)$$

где

$$\Theta = \frac{25L^2}{6GM^3R}, \quad (4.25)$$

$R = \sqrt[3]{abc}$ — радиус равновеликой сферы.

а) Эллипсоиды Маклорена. Здесь $a = b$, $c^2 = a^2(1 - e^2)$, так что $R = a\sqrt[3]{1 - e^2}$,

$$q = \frac{3}{2}\Theta(1 - e^2)^{2/3}. \quad (4.26)$$

С учетом равенства (4.14) имеем

$$\Theta = \frac{(1 - e^2)^{-1/6}}{e^3} \left\{ (3 - 2e^2) \arcsin e - 3e\sqrt{1 - e^2} \right\},$$

что можно представить в виде

$$\Theta = 4(1 - e^2)^{-1/6} \sum_1^{\infty} \frac{(2n + 1)!!}{(4n^2 + 8n + 3)(2n)!!} e^{2n} \quad (4.27)$$

(см. задачу 6). Поскольку коэффициенты ряда Маклорена функции $(1 - e^2)^{-1/6}$ положительны, то же справедливо и для функции Θ . Поэтому с ростом e от нуля до единицы Θ возрастает от нуля до бесконечности. В частности, при $e_0 = 0.92995569$ (максимум функции $q = q(e)$) параметр $\Theta = 0.85294947$.

Если мы, сохраняя объем и массу эллипсоида Маклорена, будем увеличивать его эксцентриситет от нуля до единицы, пропорциональная \sqrt{q} угловая скорость ω будет сначала возрастать, а затем убывать до нуля. Напротив, пропорциональный $\sqrt{\Theta}$ вращательный момент L будет возрастать до бесконечности. Предельная $e \rightarrow 1$ форма эллипсоидов Маклорена — бесконечно тонкий диск бесконечно большого радиуса a .

б) Эллипсоиды Якоби. Если использовать отношения квадратов полуосей эллипсоида u, v , то

$$\frac{R^2}{a^2 + b^2} = \frac{(uv)^{\frac{2}{3}}}{(u + v)},$$

так что вместо соотношения (4.24) получим

$$q = 6\Theta \frac{(uv)^{\frac{4}{3}}}{(u + v)^2}. \quad (4.28)$$

Минимальное значение параметра Θ для эллипсоидов Якоби соответствует эллипсоиду, совпадающему с эллипсоидом вращения

Теорема об устойчивости механических систем, находящихся под действием сил, зависящих только от положения системы, обладающих заданной силовой функцией V (или потенциальной энергией $\hat{V} = -V$), была впервые сформулирована Лагранжем. В ней утверждалось, что для существования устойчивого равновесия необходимо, чтобы функция V в данном положении системы достигала максимума (а потенциальная энергия — минимума). Следующим шагом был учет диссипативных (силы внутреннего трения, силы трения на границе двух тел и т. п.) и гироскопических сил. В большинстве случаев, включающих в рассмотрение эти силы, условие максимума силовой функции оказывается необходимым и достаточным условием устойчивости системы. В связи с тем, что диссипативные силы производят, как правило, лишь сравнительно медленные изменения в энергии небесных тел, то изменения механических характеристик, возникающих от действия этих сил, были названы вековыми изменениями, а *вековой* Кельвин назвал устойчивость, которая сохраняется, несмотря на наличие диссипативных сил. Таким образом, появились понятия *обыкновенной* (динамической) и *вековой* устойчивости и неустойчивости.

Вывод о существовании обыкновенной неустойчивости основывается на анализе чисто динамических уравнений, без учета диссипативных и гироскопических эффектов. Вековая неустойчивость предполагает учет их и характеризуется значительно меньшими инкрементами, если, как это обычно бывает в астрономических приложениях, внутреннее трение, теплопроводность и т. д. существенно сказываются за время, значительно большее периода основного колебания данной системы. Критерий устойчивости в вековом смысле: изучаемая конфигурация должна соответствовать минимуму полной энергии по отношению к различным допустимым деформациям.

Простейший вариант исследования некоторой системы — рассмотрение в линейном приближении. Предполагается, что флуктуации достаточно малы, и поэтому можно линеаризовать нелинейные уравнения, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии, т. е. пренебречь всеми произведениями и степенями выше первой соответствующих возмущений. Часто решения этих линеаризованных уравнений аппроксимируют истинные решения достаточно точно и по ним можно судить об общем характере движения в непосредственной близости от состояния равновесия. Для

более строгого изучения проблемы нужно исследовать движения конечной амплитуды, что является во много раз более сложной задачей по сравнению с исследованием в линейном приближении.

Когда задача линеаризована, можно разделить пространственные переменные x и время t и искать решения (часто говорят, нормальные моды) в виде

$$\delta(x, t) = \delta(x, \omega)e^{i\omega t},$$

где ω — частота из спектра возмущений.

Для исследования устойчивости относительно флуктуаций с малой амплитудой необходимо, чтобы любое произвольно малое возмущение можно было разложить в линейную комбинацию собственных функций, так как иначе могли бы существовать возмущения, недоступные анализу таким методом.

Устойчивость однородных эллипсоидальных фигур равновесия исследовалась в работах А.М.Ляпунова, А.Пуанкаре, Дж.Дарвина, Дж.Джинса. Пуанкаре (1892) рассмотрел вековую устойчивость эллипсоида Маклорена для таких эллипсоидальных возмущений, при которых ось вращения остается главной осью. Получилось, что эллипсоид Маклорена для эллипсоидальных деформаций оказывается вековым образом устойчивым или неустойчивым, смотря по тому, меньше эксцентриситет e или больше, чем $e_1 = 0.81267$. Напомним, что таков эксцентриситет того эллипсоида вращения, с которого начинается серия Якоби. Пуанкаре показал, что равновесие обладает вековой устойчивостью относительно всякого рода возмущений, пока $e < e_1$, поскольку для эллипсоида вращения с меньшим эксцентриситетом не существует бифуркации. Из рассмотрения следует, что серия Якоби вначале вполне устойчива.

Пуанкаре исследовал также коэффициенты устойчивости эллипсоидов Маклорена и Якоби при помощи функций Ламе, чтобы выяснить, какие члены семейств представляют формы бифуркации. Он нашел, что существует бесконечно много форм такого рода, а следовательно, и бесконечно много других линейных серий фигур равновесия. Наибольший интерес привлек к себе случай первой бифуркации, которая имеет место в серии эллипсоидов Якоби

$$u_2 = 0.119043, \quad v_2 = 0.637404, \quad q_2 = 0.213000, \quad \Theta = 0.632354.$$

За точкой бифуркации эллипсоиды Якоби оказываются неустойчивыми, а в этой точке ответвляются новые, уже неэллипсоидаль-

ные серии равновесных фигур. Первые члены этих новых серий имеют “грушевидную” форму. Наиболее строгие результаты были получены Ляпуновым. Он показал, что грушевидное тело неустойчиво.

Малые колебания вращающихся эллипсоидальных масс исследовались разными авторами. Простейшие из возможных типов возмущений те, при которых поверхность жидкой массы остается эллипсоидом, и ось вращения является главной осью этого эллипсоида. В случае эллипсоида Маклорена существует два различных типа возмущений этого рода:

- а) поверхность остается эллипсоидом вращения;
- б) экваториальные оси становятся неравными, причем одна возрастает, а другая убывает, полярная же ось остается неизменной.

Риман показал (1860), что второй тип становится неустойчивым, когда эксцентриситет e меридионального сечения превосходит значение 0.95289. Так как не принимались во внимания эффекты диссипации, то критерий относится к обыкновенной устойчивости.

Во многих случаях понятия обыкновенной и вековой устойчивости совпадают (Антонов, 1975). Это имеет место, в частности, для всех покоящихся конфигураций, поскольку обыкновенная устойчивость в таком случае определяется тем же самым вариационным критерием. Различие обыкновенной и вековой устойчивости появляется при включении гироскопических сил, хотя и не всегда. Совпадение имеет место для вращающихся конфигураций, если рассматривается устойчивость только по отношению к возмущениям, сохраняющим осевую симметрию.

Но для возмущений, нарушающих симметрию вращающейся жидкой массы, возможно уже расхождение. Классическим примером является поведение эллипсоидов Маклорена: вековую устойчивость они утрачивают в точке бифуркации с эллипсоидами Якоби, что соответствует эксцентриситету меридионального сечения $e = 0.81267$, а обыкновенная устойчивость продолжает существовать несколько дольше. Она исчезает, как установил Картан (Cartan, 1922), при $e = 0.95289$.

Для эллипсоидов Якоби нет разрыва между появлением обыкновенной и вековой неустойчивости. Та и другая теряются в точке бифуркации с грушевидными фигурами. При вытягивании эллипсоида Якоби в иглу последовательно добавляются все новые неустойчивости.

Отметим, что изучение устойчивости даже осесимметричных вращающихся конфигураций, не обладающих простой симметрией (сферической, цилиндрической или плоскопараллельной), является в общем случае очень сложной задачей, которая еще более усложняется при рассмотрении неоднородного тела.

Задачи к главе 4

Задача 1. Выразите параметр эллипсоида Маклорена $u = c^2/a^2$ через обычный e и второй эксцентриситет l эллипсоида.

Задача 2. Обозначим через a, b, d большую полуось, малую полуось и расстояние от центра до фокуса произвольного эллипса. Эксцентриситет и второй эксцентриситет по определению равны отношению d к a и b соответственно. Докажите формулы

$$1 - e^2 = \frac{1}{1 + l^2}, \quad \operatorname{arctg} l = \arcsin e.$$

Задача 3. Получите разложение 4.15 из 4.14. Покажите, что оно сходится абсолютно при $0 < l < 1$ и условно при $l = 1$ ($e = 1/\sqrt{2}$).

Задача 4. Получите разложение 4.16 из 4.14.

Указание: покажите, что функция $g(e) = \sqrt{1 - e^2} \arcsin e$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - e^2)g' + eg = 1 - e^2$$

и получите ее ряд Маклорена

$$g(e) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-2)!!}{(2n+1)!!} e^{2n+1},$$

где принято $0!! = -(-2)!! = 1$.

Задача 5. Покажите, что ряд 4.16 сходится абсолютно при $e \leq 1$.

Указание: используя формулу Валлиса, покажите, что коэффициент при e^{2n} имеет порядок $n^{-3/2}$.

Задача 6. Используя стандартные разложения, выведите формулу (4.27):

$$(3 - 2e^2) \arcsin e = 3e + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2n+1}, \quad e\sqrt{1-e^2} = e - \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2n+1},$$

$$a_n = \frac{(4n^2 - 16n + 3)(2n - 3)!!}{(4n^2 - 1)(2n)!!}, \quad b_n = \frac{(2n - 3)!!}{(2n)!!}.$$

Задача 7. Дан однородный эллипсоид с полуосями a, b, c и массой M . Найдите момент его инерции относительно оси z .

Решение. Вычислим интеграл

$$J_1 = \int_T x^2 d\tau = \int_{-c}^c dz \int_{-b_1}^{b_1} dy \int_{-a_1}^{a_1} x^2 dx,$$

где

$$a_1 = a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}, \quad b_1 = b\sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Внутренний интеграл по x равен $\frac{2}{3}a^3$. В оставшемся двойном интеграле выполним растяжение по осям $y = by', z = cz'$ и перейдем к полярным координатам $y' = r \cos \varphi, z' = r \sin \varphi$. Якобиан преобразования равен bcr , так что

$$J_1 = \frac{2}{3}a^3 bc \int_0^1 (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi}{15}a^3 bc.$$

По симметрии

$$J_2 = \int_T y^2 d\tau = \frac{4\pi}{15}ab^3c.$$

С учетом равенства (4.20)

$$J = \varrho(J_1 + J_2) = \frac{M}{5}(a^2 + b^2). \quad (4.29)$$

Глава 5

Теория Ляпунова

5.1 Ряд Ляпунова

В §2.5 мы ввели безразмерный параметр q , малый вместе с ω согласно (2.8). Значению $q = 0$ отвечает единственная фигура — шар.

А.Клеро разработал теорию фигуры Земли в линейном приближении по q . При точности измерений того времени этого было достаточно. Уравнения произвольного приближения получил и исследовал А.М.Ляпунов (*Ляпунов, 1959а*). В этой главе мы подробно изложим теорию Ляпунова.

Представим семейство поверхностей равной плотности уравнением (2.12). С учетом равенства (2.13) запишем его в виде

$$r = Ra [1 + \zeta(a, Q)]. \quad (5.1)$$

Напомним, что r — радиус; Q — точка единичной сферы, определяемая дополнением широты θ и долготой λ ; R — масштабный множитель; переменная $a \in [0, 1]$ параметризует семейство; ζ — функция на произведении отрезка $[0, 1]$ и единичной сферы. Ее-то и требуется найти, а, точнее, вывести определяющие ее уравнения.

Плотность ρ в теории Ляпунова считается заданной положительной невозрастающей функцией от a такой, что $a^2\rho$ интегрируема. Отсюда следует, что ρ может обращаться в бесконечность лишь при $a = 0$ и притом медленнее, чем a^{-3} . Считаем, кроме того, плотность кусочно-гладкой на $(0, 1]$. Как будет показано далее, отсюда вытекает непрерывность ζ , $\partial a\zeta/\partial a$ по совокупности переменных.

Одно и то же семейство поверхностей можно параметризовать бесконечным множеством способов. Наложим определяющее a единственным образом условие Ляпунова равновеликости объемов, ограниченных поверхностью (5.1) и сферой $r = Ra$ (при введении q речь шла только о сфере $r = R$):

$$\frac{4}{3}\pi R^3 a^3 = \int d\sigma \int_0^{Ra(1+\zeta)} r^2 dr.$$

Здесь $d\sigma$ — элемент поверхности единичной сферы, по которой проводится интегрирование, если не указана другая область. Вычисляя внутренний интеграл, записываем равновеликость формулой

$$\int (1 + \zeta)^3 d\sigma = 4\pi, \quad (5.2)$$

равносильной

$$\int \zeta d\sigma = - \int \left(\zeta^2 + \frac{\zeta^3}{3} \right) d\sigma. \quad (5.3)$$

Получим некоторые важные следствия из равенств (5.2), (5.3).

Дифференцируя выражение (5.2) по a и комбинируя результат с (5.2), находим

$$\int (1 + \zeta)^2 \left(1 + \frac{\partial a \zeta}{\partial a} \right) d\sigma = 4\pi. \quad (5.4)$$

Вычислим массу вещества $M(a)$, ограниченную поверхностью (5.1). Якобиан перехода от $r\theta\lambda$ к $a\theta\lambda$ равен $R(1 + \partial a \zeta / \partial a)$, что дает элемент объема

$$d\tau = R^3 a^2 (1 + \zeta)^2 \left(1 + \frac{\partial a \zeta}{\partial a} \right) da d\sigma. \quad (5.5)$$

Отсюда

$$M(a) = R^3 \int_0^a \varrho(a) a^2 da \int (1 + \zeta)^2 \left(1 + \frac{\partial a \zeta}{\partial a} \right) d\sigma.$$

С учетом соотношения (5.4) получаем такое же выражение, как и для массы шара:

$$M(a) = 4\pi R^3 \int_0^a \varrho(a) a^2 da. \quad (5.6)$$

В частности, для полной массы справедливо равенство

$$M = 4\pi R^3 \int_0^1 \varrho(a) a^2 da,$$

что можно использовать для определения средней плотности

$$\bar{\varrho} = \frac{3M}{4\pi R^3} = 3 \int_0^1 \varrho(a) a^2 da. \quad (5.7)$$

Обратимся к гравитационному потенциалу (1.6):

$$V(a, Q) = G \int_T \frac{\varrho' d\tau'}{s}. \quad (5.8)$$

Здесь и ниже s — расстояние между точкой (r, Q) и переменной точкой интегрирования (r', Q') :

$$s^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda')],$$

$$\varrho' = \varrho(a'), \quad \zeta' = \zeta(a', Q'),$$

$$D^2 = a^2 + a'^2 - 2aa' [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\lambda - \lambda')].$$

Величину D можно считать невозмущенным значением s , когда $r = Ra, r' = Ra', \zeta = \zeta' = 0$.

Считая ζ малой величиной, А.М. Ляпунов предлагает представить интеграл (5.8) рядом, каждый член которого имеет одинаковый порядок относительно ζ :

$$V = GR^2 \bar{\varrho} \sum_{n=0}^{\infty} V_{(n)}(a, Q), \quad (5.9)$$

где $V_{(n)}$ — безразмерный, однородный степени n функционал от ζ , а именно,

$$V_{(0)} = \frac{4\pi}{a} \int_0^a a'^2 db' + 4\pi \int_a^1 a' db', \quad (5.10)$$

а для $n \geq 1$

$$V_{(n)} = \frac{4\pi}{a} (-\zeta)^n \int_0^a a'^2 db' + \int_0^1 \frac{\partial \tilde{V}_n}{\partial a'} db'. \quad (5.11)$$

Здесь

$$\tilde{V}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^i a'^{n-i} \zeta^i}{i!(n-i)!} \frac{\tilde{\partial}^{n-1}}{\partial a^i \partial a'^{n-i-1}} \left\{ a'^2 \int \frac{\zeta'^{n-i} d\sigma'}{D} \right\},$$

$db' = \varrho' / \bar{\varrho} da'$. Волна над знаком частной производной $\tilde{\partial}$ указывает, что при ее вычислении величина ζ' считается постоянной.

Вопрос о сходимости будет рассмотрен ниже, а пока будем обращаться с рядами, как с многочленами.

Представим определяющую эквиденситы функцию ζ рядом по стандартному малому параметру (2.8):

$$\zeta(a, Q) = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \zeta_n(a, Q), \quad (5.12)$$

который назовем рядом Ляпунова. В силу (5.3) функции ζ_n связаны соотношением

$$-\int \zeta_n d\sigma = \sum_{i=1}^{n-1} \int \zeta_i \zeta_{n-i} d\sigma + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \int \zeta_i \zeta_j \zeta_{n-i-j} d\sigma. \quad (5.13)$$

Здесь и ниже пустая сумма считается нулем, а пустое произведение — единицей.

Подстановка (5.12) в (5.11) приводит к представлению $V_{(n)}$ рядом Маклорена

$$V_{(n)}(a, Q) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{n+k} V_{nk}(a, Q). \quad (5.14)$$

Ряд (5.14) тривиален при $n = 0$, поскольку $V_{(0)}$ не зависит от ζ : $V_{(0)} = V_{00}$. Обозначение V_{00} поэтому можно не использовать. При $n \geq 1$

$$\begin{aligned} V_{nk} &= \left\{ (-1)^n \frac{4\pi}{a} \int_0^a a'^2 db' \right\} \sum \zeta_{m_1} \cdots \zeta_{m_n} + \\ &+ \int_0^1 \frac{\partial \tilde{V}_{nk}}{\partial a'} db', \quad (5.15) \\ \tilde{V}_{nk} &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a^i a'^{n-i}}{i!(n-i)!} \sum \zeta_{m_1} \cdots \zeta_{m_i} \times \\ &\times \frac{\tilde{\partial}^{n-1}}{\partial a^i \partial a'^{n-i-1}} \left\{ a'^2 \int \frac{\zeta'_{m_{i+1}} \cdots \zeta'_{m_n}}{D} d\sigma' \right\}. \end{aligned}$$

Суммирование осуществляется по множеству натуральных m_s , удовлетворяющих условию

$$m_1 + \dots + m_n = n + k .$$

Подставляя ряд (5.14) в выражение (5.9), находим разложение потенциала в ряд по степеням q :

$$V = GR^2 \bar{q} \sum_{n=0}^{\infty} q^n V_n(a, Q) = \frac{3GM}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} q^n V_n. \quad (5.16)$$

Здесь

$$V_0 = V_{(0)},$$

а при $n \geq 1$

$$V_n = \sum_{k=1}^n V_{k, n-k}. \quad (5.17)$$

В дальнейшем основную роль играет представление (5.16). Поэтому дадим явное выражение для общего члена суммы (5.17), преобразуя выражение (5.15). При $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$

$$V_{k, n-k} = \left\{ (-1)^k \frac{4\pi}{a} \int_0^a a'^2 db' \right\} \sum \zeta_{m_1} \dots \zeta_{m_k} + \int_0^1 \frac{\partial \tilde{V}_{k, n-k}}{\partial a'} db', \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{k, n-k} &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{a^i a'^{k-i}}{i!(k-i)!} \sum \zeta_{m_1} \dots \zeta_{m_i} \times \\ &\times \frac{\partial^{k-1}}{\partial a^i \partial a'^{k-i-1}} \left\{ a'^2 \int \frac{\zeta'_{m_{i+1}} \dots \zeta'_{m_k}}{D} d\sigma' \right\}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Суммирование распространяется на множество натуральных m_s , удовлетворяющих условию

$$m_1 + \dots + m_k = n. \quad (5.20)$$

Максимальный индекс s , с которым ζ_s входит в V_n , равен n . Выпишем явно соответствующее слагаемое.

Для того чтобы среди решений (5.20) хотя бы одно из m_s равнялось n , необходимо и достаточно $k = 1, m_1 = n$. Поэтому из формул (5.17), (5.18), (5.19) следует

$$V_n = V_{[n]} + V_{\{n\}}, \quad (5.21)$$

где

$$V_{[n]} = V_{1,n-1} = -\frac{4\pi\zeta_n}{a} \int_0^a a'^2 db' + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^3 \int \frac{\zeta'_n}{D} d\sigma' \right\} db', \quad (5.22)$$

$$V_{\{n\}} = \sum_{k=2}^n V_{k,n-k}, \quad (5.23)$$

причем $V_{\{n\}}$ — функционал от $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$.

Ряд (5.16) построен. Он однозначно определяет потенциал, если известны ζ_n в представлении Ляпунова (5.12). Но сами функции ζ_n пока почти произвольны: они подчинены только интегральному условию (5.13), ограничивающему их средние значения. Это неудивительно: мы нигде не использовали то обстоятельство, что T — фигура равновесия.

5.2 Основные уравнения

Как показано в §2.3, условие относительного равновесия T заключается в том, что сумма гравитационного и центробежного потенциалов (2.7) постоянна вдоль эквиденсит (5.1). Иными словами,

$$V + \frac{\omega^2}{2} R^2 a^2 (1 + \zeta)^2 \sin^2 \theta = \dots,$$

где точками мы будем обозначать функции лишь от q, a (но не от Q). Принимая во внимание выражения (5.16), (2.8), получаем

$$\sum_0^\infty q^n V_n + \frac{2\pi a^2}{3} q (1 + \zeta)^2 \sin^2 \theta = \dots \quad (5.24)$$

Соотношение (5.24) не накладывает ограничений на уже известную нам функцию $V_0(a)$. Переменные же V_n с натуральными n оказываются выраженными через $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ с точностью до не зависящей от Q функции

$$V_1 + \frac{2\pi}{3} a^2 \sin^2 \theta = \dots,$$

а при $n \geq 2$

$$V_n + \frac{4\pi}{3} a^2 \left(\zeta_{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \zeta_i \zeta_{n-1-i} \right) \sin^2 \theta = \dots \quad (5.25)$$

При $n = 1$ соотношение (5.25) с учетом выражений (5.21), (5.22) есть уравнение относительно ζ_1 . Выбор не зависящей от Q функции однозначен благодаря уравнению (5.13).

Далее можно действовать по индукции, считая $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ уже определенными. Соотношение (5.25) с учетом равенств (5.21), (5.22) представляет собой уравнение относительно ζ_n . По-прежнему выбор не зависящей от Q функции однозначен благодаря уравнению (5.13).

5.3 Разделение переменных

Для решения выведенных уравнений воспользуемся известным приемом разделения переменных, а именно отделим радиальную переменную a от направления Q . Для этого представим решение уравнения для ζ_n в виде формального ряда по элементарным сферическим функциям $Y_{mk}(Q)$ с зависящими от a коэффициентами:

$$\zeta_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-m}^m \zeta_{nmk}(a) Y_{mk}(Q). \quad (5.26)$$

Как и раньше, начинаем со случая $n = 1$. Подставим выражение (5.26) в формулу (5.21). Воспользуемся равенством (Гобсон, 1952)

$$\int \frac{Y_m(Q') d\sigma'}{D} = \frac{4\pi\Pi}{2m+1} Y_m(Q), \quad (5.27)$$

где Y_m — произвольная сферическая функция порядка m ;

$$\Pi = \begin{cases} \frac{a'^m}{a^{m+1}}, & \text{если } a' \leq a, \\ \frac{a^m}{a'^{m+1}}, & \text{если } a' \geq a. \end{cases}$$

В результате, разбивая промежуток интегрирования $[0, 1]$ на $[0, a] \cup [a, 1]$, получаем

$$V_1 = -4\pi a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=-m}^m [A_m \zeta_{1mk}(a)] Y_{mk}(Q). \quad (5.28)$$

Здесь \mathbf{A}_m — линейный интегродифференциальный оператор Клеро:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_m F &= \frac{F}{a^3} \int_0^a a^2 db - \frac{a^{-m-3}}{2m+1} \int_0^a \frac{d}{da} (a^{m+3} F) db - \\ &- \frac{a^{m-2}}{2m+1} \int_a^1 \frac{d}{da} (a^{2-m} F) db. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Мы позволяем себе опустить штрихи, если под знаком интеграла стоит функция только от a' . При непрерывной плотности ϱ оператор \mathbf{A}_m переводит пространство непрерывно-дифференцируемых на $[0,1]$ функций в себя. При кусочно-непрерывной плотности оператор переводит в себя пространство кусочно-гладких функций. При аналитичности ϱ и F аналитична и $\mathbf{A}_m F$. Замкнутость \mathbf{A}_m сохраняется, если допустить у ϱ , F сингулярность в нуле:

Второе слагаемое (5.25) элементарно выражается через сферические функции:

$$\frac{3}{2} \sin^2 \theta = 1 - P_2(\cos \theta),$$

где P_m — многочлен Лежандра, для которого мы принимаем стандартную нормировку $P_m(1) = 1$. Сравнение соотношений (5.25) и (5.28) при всех $m \geq 1$ приводит к уравнениям Клеро для ζ_{1mk} , а именно, за исключением случая $m = 2, k = 0$:

$$\mathbf{A}_m \zeta_{1mk} = 0.$$

Существование и единственность решения уравнения Клеро при ограниченности и монотонности ϱ А.М.Ляпунов установил в мемуаре (*Ляпунов, 1959б*). Слабая сингулярность $a^2 \varrho(a)$ в нуле не приводит к нарушению единственности. Поэтому однородное уравнение Клеро имеет лишь нулевое решение. Таким образом, ряд (5.26) при $n = 1$ может содержать лишь два слагаемых: свободный член и вторую зональную гармонику. По индукции легко доказать (фактически это сделано ниже), что ряд (5.26) редуцируется к конечной сумме

$$\zeta_n = \sum_{m=0(2)}^{2n} \zeta_{nm}(a) P_m(\cos \theta). \quad (5.30)$$

Символ (2) указывает на суммирование только по четным значениям индекса.

Считая $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ известными, получаем уравнение для определения ζ_{nm} . Подставляя сумму (5.30) в соотношение (5.22), с учетом равенства (5.27) находим

$$V_{[n]} = -4\pi a^2 \sum_{m=0(2)}^{2n} [\mathbf{A}_m \zeta_{nm}(a)] P_m(\cos \theta). \quad (5.31)$$

Обратимся к $V_{\{n\}}$. Произведение $\zeta'_{m_{i+1}} \cdots \zeta'_{m_k}$ под знаком интеграла (5.19) в силу (5.30) переходит в линейную комбинацию с зависящими от a' коэффициентами от $P'_{n_{i+1}} \cdots P'_{n_k}$ при $n_j \leq 2m_j$. В свою очередь последнее произведение представляется линейной комбинацией P'_s , причем $\max s = n_{i+1} + \dots + n_k \leq 2(m_{i+1} + \dots + m_k)$. По четности n_j четными являются и все s . Согласно равенству (5.27) после взятия интеграла по сфере P'_s переходит в P_s . Поэтому $V_{k,n-k}$ оказывается многочленом по системе P_s с четными индексами $s \leq 2n$. В силу (5.23) можно записать

$$V_{\{n\}} = -4\pi a^2 \sum_{m=0(2)}^{2n} \zeta_{nm}^*(a) P_m(\cos \theta), \quad (5.32)$$

где переменные ζ_{nm}^* можно считать известными — они находятся по только что описанному алгоритму.

Из соотношений (5.21), (5.31), (5.32) следует

$$V_n = -4\pi a^2 \sum_{m=0(2)}^{2n} u_{nm}(a) P_m(\cos \theta), \quad (5.33)$$

где

$$u_{nm} = \mathbf{A}_m \zeta_{nm}(a) + \zeta_{nm}^*(a).$$

Выражение в круглых скобках (5.25) — многочлен по системе P_s с четными индексами вплоть до P_{2n-2} . Положим

$$\frac{\sin^2 \theta}{6} = \sum_{m=0(2)}^2 \zeta_{1m}^{**}(a) P_m(\cos \theta),$$

а при $n \geq 2$ —

$$\frac{\sin^2 \theta}{3} \left(\zeta_{n-1} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \zeta_i \zeta_{n-1-i} \right) = \sum_{m=0(2)}^{2n} \zeta_{nm}^{**}(a) P_m(\cos \theta). \quad (5.34)$$

Здесь

$$\zeta_{10}^{**} = \frac{1}{9}, \quad \zeta_{12}^{**} = -\frac{1}{9}, \quad (5.35)$$

а ζ_{nm}^{**} при $n \geq 2$ находятся последовательно по вышеописанному алгоритму.

Подставляя выражения (5.33), (5.34) в соотношение (5.25), получаем, что некоторый многочлен по системе $P_s(\cos \theta)$ не зависит от θ . Это возможно только в том случае, если все его коэффициенты за исключением свободного члена равны нулю:

$$u_{nm} = \zeta_{nm}^{**}, \quad m \geq 2.$$

Мы получили, таким образом, для каждого коэффициента ζ_{nm} , $m \geq 2$ уравнение Клеро

$$\mathbf{A}_m \zeta_{nm}(a) = \tilde{\zeta}_{nm}(a), \quad m = 2, 4, \dots, 2n, \quad (5.36)$$

где

$$\tilde{\zeta}_{nm}(a) = \zeta_{nm}^{**}(a) - \zeta_{nm}^*(a). \quad (5.37)$$

Свободный член (5.30) определяется однозначно условием (5.13). В самом деле, пусть

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \zeta_i \zeta_{n-i} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-i-1} \zeta_i \zeta_j \zeta_{n-i-j} = \\ = Z_n + (\text{многочлен по системе } P_s \text{ без свободного члена}). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Тогда

$$\zeta_{n0} = -Z_n. \quad (5.39)$$

Итак, V_n и ζ_{n0} полностью определяются эквиденситами предыдущего приближения:

$$\begin{aligned} u_{n0} &= -\mathbf{A}_0 Z_n + \zeta_{n0}^* \\ u_{nm} &= \zeta_{nm}^{**}, \quad m \geq 2. \end{aligned} \quad (5.40)$$

В частности, V_0 и V_1 формально не зависят от ζ . Как будет показано далее, V_1 формально не зависит даже от ρ . Косвенно V_1 зависит от ρ , ζ как определяющих смысл параметра a . Отметим здесь же, что величина ζ_{n0}^{**} в окончательных формулах не фигурирует и вычислять ее не обязательно.

Для определения ζ_n требуется решить уравнение Клеро (5.36). Существование и единственность решения, как уже упоминалось, установлены А.М.Ляпуновым. Поскольку ряд (5.26) выродился в конечную сумму (5.30), формальное решение для ζ_n оказалось истинным.

Итак, формальные ряды (5.12), (5.16) построены. Точнее, алгоритм их построения сведен к элементарным операциям и *обращению оператора Клеро*.

Опишем важнейшие свойства фигур равновесия при достаточно малых q .

1. При данных R, M, ρ, q фигура равновесия T существует и единственна. Иными словами, функция ζ однозначно определяется указанными величинами.
2. Фигура T обладает осевой симметрией: функция ζ не зависит от долготы.
3. Фигура T обладает экватором: проходящая через центр масс перпендикулярно оси вращения плоскость является плоскостью симметрии.

Третье свойство вытекает из четности многочленов Лежандра четного индекса и согласно теореме Лихтенштейна (см. §2.4) справедливо всегда. Напротив, первые два свойства утрачиваются при достаточно больших q . Действительно, даже при постоянной плотности существуют не только осесимметричные эллипсоиды Маклорена, но и трехосные эллипсоиды Якоби. Более того, при *каждом* $q < 0.3370$ существуют *два* эллипсоида Маклорена, а при $q < 0.2806$ еще и эллипсоид Якоби! Противоречие с результатами А.М.Ляпунова кажущееся. При $q = 0$ согласно уравнению (5.12) $\zeta = 0$, т.е. бесконечно малые q в теории Ляпунова отвечают бесконечно близким к сфере фигурам. Второй эллипсоид Маклорена при $q \rightarrow 0$ переходит в бесконечно большой диск бесконечно малой толщины, а эллипсоид Якоби — в бесконечно тонкую бесконечно длинную иглу. В обоих случаях формула (5.12) неприменима.

Во избежание недоразумений лучше принять, что свойства 1–3 выполнены при фиксированных R, M, ρ для однопараметрического семейства $T(q)$, отвечающего от сферы $T(0)$, при всех достаточно малых значениях параметра q , обеспечивающих сходимость рядов Ляпунова.

Прежде чем переходить к решению уравнения Клеро, упростим общие формулы для начальных приближений.

5.4 Первые приближения

Для начальных значений индекса n формулы предыдущего параграфа значительно упрощаются. Поэтому имеет смысл вывести их явные выражения.

5.4.1 Сферическое приближение

Начальное приближение $n = 0$ соответствует невращающемуся шару с потенциалом (5.10)

$$V_0 = \frac{4\pi}{a} \int_0^a a^2 db + 4\pi \int_a^1 adb. \quad (5.41)$$

Эквиденситы — сферы

$$r = Ra.$$

Для общности можно считать $\zeta_0 = 1$.

5.4.2 Линейное приближение

Пусть $n = 1$. Согласно соотношению (5.23)

$$V_{\{1\}} = 0.$$

Следовательно, равны нулю и коэффициенты многочлена (5.32):

$$\zeta_{10}^* = \zeta_{12}^* = 0.$$

Коэффициенты ζ_{1m}^{**} уже были вычислены — см. формулы (5.35). Левая часть уравнения (5.38) при $n = 1$ тождественно равна нулю. Поэтому в силу равенства (5.39)

$$\zeta_{10} = Z_1 = 0. \quad (5.42)$$

В результате согласно формулам (5.40)

$$u_{10} = 0, \quad u_{12} = -1/9.$$

Для потенциала (5.33) получаем простое выражение

$$V_1 = \frac{4}{9}\pi a^2 P_2(\cos \theta), \quad (5.43)$$

не зависящее ни от каких параметров.

Переходим к эквиденситам. Из формулы (5.37) имеем

$$\tilde{\zeta}_{12} = -1/9.$$

Для эквиденсит (5.30) с учетом (5.42) выводим представление

$$\zeta_1 = \zeta_{12}(a) P_2(\cos \theta), \quad (5.44)$$

где ζ_{12} — решение уравнения Клеро

$$\mathbf{A}_2 \zeta_{12}(a) = -1/9. \quad (5.45)$$

5.4.3 Квадратичное приближение

Считая известной функцию $\zeta_{12}(a)$, переходим к случаю $n = 2$. Согласно соотношениям (5.23), (5.18), (5.19)

$$V_{\{2\}} = V_{20} = \frac{4\pi}{a} \zeta_1^2 \int_0^a a'^2 db' + \int_0^1 \frac{\partial \tilde{V}_{20}}{\partial a'} db',$$

где

$$\tilde{V}_{20} = a a'^3 \zeta_1 \frac{\partial}{\partial a} \int \frac{\zeta_1' d\sigma'}{D} + \frac{a'^2}{2} \frac{\tilde{\partial}}{\partial a'} \left\{ a'^2 \int \frac{\zeta_1'^2 d\sigma'}{D} \right\}. \quad (5.46)$$

Возводя выражение (5.44) в квадрат и заменяя P_2^2 многочленом по P_0, P_2, P_4 , получаем

$$\zeta_1^2 = \zeta_{12}^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2 + \frac{18}{35} P_4 \right). \quad (5.47)$$

Так как символ $\tilde{\partial}$ предполагает постоянство ζ_{12}' , второе слагаемое (5.46) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} a'^2 \zeta_{12}'^2 \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ a'^2 \int \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2' + \frac{18}{35} P_4' \right) \frac{d\sigma'}{D} \right\},$$

что согласно (5.27) равно

$$2\pi a'^2 \zeta'_{12} \frac{\partial}{\partial a'} \begin{cases} \frac{a'^2}{5a} + \frac{2a'^4}{35a^3} P_2 + \frac{2a'^6}{35a^5} P_4, & \text{если } a' < a, \\ \frac{a'}{5} + \frac{2a^2}{35a'} P_2 + \frac{2a^4}{35a'^3} P_4, & \text{если } a' > a, \end{cases}$$

или

$$2\pi \zeta_{12}^2 \begin{cases} \frac{2a'^3}{5a} + \frac{8a'^5}{35a^3} P_2 + \frac{12a'^7}{35a^5} P_4, & \text{если } a' < a, \\ \frac{a'^2}{5} - \frac{2a^2}{35} P_2 - \frac{6a^4}{35a'^2} P_4, & \text{если } a' > a. \end{cases}$$

Аналогично первое слагаемое (5.46) записываем в виде

$$\frac{4\pi}{5} a a'^3 \zeta_{12} \zeta'_{12} P_2^2 \frac{\partial}{\partial a} \begin{cases} \frac{a'^2}{a^3}, & \text{если } a' < a, \\ \frac{a^2}{a'^3}, & \text{если } a' > a, \end{cases}$$

или

$$\frac{4\pi}{5} \zeta_{12} \zeta'_{12} P_2^2 \begin{cases} -\frac{3a'^5}{a^3}, & \text{если } a' < a, \\ 2a^2, & \text{если } a' > a. \end{cases}$$

Квадрат многочлена Лежандра можно заменить трехчленом из правой части формулы (5.47).

Теперь без труда можно записать выражения для коэффициентов ζ_{2m}^* в представлении (5.32) для $V_{\{2\}}$:

$$\begin{aligned} \zeta_{20}^* &= -\frac{\zeta_{12}^2}{5a^3} \int_0^a a^2 db + \frac{3\zeta_{12}}{25a^5} \int_0^a \frac{d}{da} (a^5 \zeta_{12}) db - \\ &\quad - \frac{1}{5a^3} \int_0^a \frac{d}{da} (a^3 \zeta_{12}^2) db - \frac{1}{10a^2} \int_a^1 \frac{d}{da} (a^2 \zeta_{12}^2) db - \\ &\quad - \frac{2\zeta_{12}}{25} \int_a^1 \frac{d\zeta_{12}}{da} db, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{22}^* &= -\frac{2\zeta_{12}^2}{7a^3} \int_0^a a^2 db + \frac{6\zeta_{12}}{35a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5\zeta_{12})db - \\
&\quad - \frac{4}{35a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5\zeta_{12}^2)db + \frac{1}{35} \int_a^1 \frac{d}{da}\zeta_{12}^2 db - \\
&\quad - \frac{4\zeta_{12}}{35} \int_a^1 \frac{d\zeta_{12}}{da} db, \\
\zeta_{24}^* &= -\frac{18\zeta_{12}^2}{35a^3} \int_0^a a^2 db + \frac{54\zeta_{12}}{175a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5\zeta_{12})db - \\
&\quad - \frac{6}{35a^7} \int_0^a \frac{d}{da}(a^7\zeta_{12}^2)db + \frac{3a^2}{35} \int_a^1 \frac{d}{da} \left(\frac{\zeta_{12}^2}{a^2} \right) db - \\
&\quad - \frac{36\zeta_{12}}{175} \int_a^1 \frac{d\zeta_{12}}{da} db.
\end{aligned}$$

Последний интеграл в каждом выражении для ζ_{2m}^* легко исключить, поскольку из уравнений (5.29), (5.45) следует

$$\int_a^1 \frac{d\zeta_{12}}{da} db = \frac{5}{9} + \frac{5\zeta_{12}}{a^3} \int_0^a a^2 db - \frac{1}{a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5\zeta_{12})db.$$

В результате

$$\begin{aligned}
\zeta_{20}^* &= -\frac{2\zeta_{12}}{45} - \frac{3\zeta_{12}^2}{5a^3} \int_0^a a^2 db + \frac{\zeta_{12}}{5a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5\zeta_{12})db - \\
&\quad - \frac{1}{5a^3} \int_0^a \frac{d}{da}(a^3\zeta_{12}^2)db - \frac{1}{10a^2} \int_a^1 \frac{d}{da}(a^2\zeta_{12}^2)db, \\
\zeta_{22}^* &= -\frac{4\zeta_{12}}{63} - \frac{6\zeta_{12}^2}{7a^3} \int_0^a a^2 db + \frac{2\zeta_{12}}{7a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5\zeta_{12})db - \\
&\quad - \frac{4}{35a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5\zeta_{12}^2)db + \frac{1}{35} \int_a^1 \frac{d}{da}\zeta_{12}^2 db, \quad (5.48) \\
\zeta_{24}^* &= -\frac{4\zeta_{12}}{35} - \frac{54\zeta_{12}^2}{35a^3} \int_0^a a^2 db + \frac{18\zeta_{12}}{35a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5\zeta_{12})db - \\
&\quad - \frac{6}{35a^7} \int_0^a \frac{d}{da}(a^7\zeta_{12}^2)db + \frac{3a^2}{35} \int_a^1 \frac{d}{da} \left(\frac{\zeta_{12}^2}{a^2} \right) db.
\end{aligned}$$

Переходим к функциям $\zeta_{2m}^{**}(a)$. Левая часть равенства (5.34) при $n = 2$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\zeta_1 \sin^2 \theta &= \frac{\zeta_{12}(a)}{3} \sin^2 \theta P_2(\cos \theta) = \\ &= \frac{\zeta_{12}(a)}{3} \left\{ -\frac{2}{15} + \frac{10}{21}P_2(\cos \theta) - \frac{12}{35}P_4(\cos \theta) \right\}. \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при $P_s(\cos \theta)$, получаем

$$\zeta_{20}^{**} = -\frac{2}{45}\zeta_{12}, \quad \zeta_{22}^{**} = \frac{10}{63}\zeta_{12}, \quad \zeta_{24}^{**} = -\frac{4}{35}\zeta_{12}. \quad (5.49)$$

Для определения Z_2 заметим, что левая часть уравнения (5.38) равна ζ_1^2 , а для последнего уже получено выражение (5.47). Поэтому

$$Z_2 = \frac{1}{5}\zeta_{12}^2(a). \quad (5.50)$$

Определим действие оператора \mathbf{A}_0 на Z_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 Z_2 &= \frac{\zeta_{12}^2}{5a^3} \int_0^a a^2 db - \frac{1}{5a^3} \int_0^a \frac{d}{da} (a^3 \zeta_{12}^2) db - \\ &\quad - \frac{1}{5a^2} \int_a^1 \frac{d}{da} (a^2 \zeta_{12}^2) db. \end{aligned} \quad (5.51)$$

В соответствии с формулами (5.40) находим коэффициенты потенциала (5.33)

$$\begin{aligned} u_{20} &= -\frac{2\zeta_{12}}{45} - \frac{4\zeta_{12}^2}{5a^3} \int_0^a a^2 db + \\ &\quad + \frac{\zeta_{12}}{5a^5} \int_0^a \frac{d}{da} (a^5 \zeta_{12}) db + \frac{1}{10a^2} \int_a^1 \frac{d}{da} (a^2 \zeta_{12}^2) db, \\ u_{22} &= \frac{10}{63}\zeta_{12}, \\ u_{24} &= -\frac{4}{35}\zeta_{12}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Переходим к эквиденситам. В силу соотношений (5.39), (5.50) свободный член представления (5.30) равен

$$\zeta_{20} = -\frac{1}{5}\zeta_{12}^2. \quad (5.53)$$

Два других удовлетворяют уравнениям Клеро (5.36), где по формулам (5.37), (5.48), (5.49)

$$\begin{aligned}
\tilde{\zeta}_{22} &= \frac{2\zeta_{12}}{9} + \frac{6\zeta_{12}^2}{7a^3} \int_0^a a^2 db - \frac{2\zeta_{12}}{7a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5 \zeta_{12}) db + \\
&+ \frac{4}{35a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5 \zeta_{12}^2) db - \frac{1}{35} \int_a^1 \frac{d}{da} \zeta_{12}^2 db, \quad (5.54) \\
\tilde{\zeta}_{24} &= \frac{54\zeta_{12}^2}{35a^3} \int_0^a a^2 db - \frac{18\zeta_{12}}{35a^5} \int_0^a \frac{d}{da}(a^5 \zeta_{12}) db + \\
&+ \frac{6}{35a^7} \int_0^a \frac{d}{da}(a^7 \zeta_{12}^2) db - \frac{3a^2}{35} \int_a^1 \frac{d}{da} \left(\frac{\zeta_{12}^2}{a^2} \right) db.
\end{aligned}$$

5.4.4 Приближения высших порядков

На практике, как правило, достаточно квадратичного или даже линейного приближения. Но встречаются и случаи, когда необходим учет высших порядков. Уже при $n = 3$ формулы становятся чудовищными, так что проще описать общий алгоритм. Последний тоже оказался настолько громоздким, что хранить его имеет смысл только на машинных носителях.

Займемся теперь обещанным построением решения для заданной плотности в простейших случаях.

5.5 Модель Ньютона — постоянная плотность

5.5.1 Обращение оператора Клеро

При постоянной плотности ($\varrho = \bar{\varrho} = \text{const}$) оператор Клеро элементарен:

$$\mathbf{A}_m F(a) = \frac{1}{3} F(a) - \frac{a^{m-2}}{2m+1} F(1). \quad (5.55)$$

Обратный оператор, разрешающий уравнение

$$\mathbf{A}_m F(a) = G(a), \quad (5.56)$$

также элементарен:

$$\mathbf{A}_m^{-1}G(a) = 3G(a) + \frac{9a^{m-2}}{2(m-1)}G(1) \quad (5.57)$$

(см. задачи 4, 5).

5.5.2 Линейное приближение

Начальный член разложения потенциала (5.41) вычисляется просто:

$$V_0 = 2\pi \left(1 - \frac{a^2}{3}\right). \quad (5.58)$$

Потенциал в первом приближении определяется формулой (5.43) при любой плотности.

Уравнение Клеро (5.45) согласно (5.57) имеет решением

$$\zeta_{12}(a) = -5/6. \quad (5.59)$$

5.5.3 Квадратичное приближение

Подставляя в уравнения (5.52) значение (5.59), находим коэффициенты потенциала (5.33):

$$u_{20} = \frac{5}{72} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{17}{15} \right), \quad u_{22} = -\frac{25}{189}, \quad u_{24} = \frac{2}{21}. \quad (5.60)$$

Переходим к эквиденситам. Согласно равенствам (5.54)

$$\tilde{\zeta}_{22} = -\frac{20}{189}, \quad \tilde{\zeta}_{24} = \frac{5}{84}(3 - a^2). \quad (5.61)$$

Свободный член представления (5.30) дается формулой (5.53). Коэффициенты при P_2 и P_4 определяются по формуле (5.57) как решения уравнений Клеро (5.36). Окончательно

$$\zeta_{20} = -\frac{5}{36}, \quad \zeta_{22} = -\frac{50}{63}, \quad \zeta_{24} = \frac{15}{28}. \quad (5.62)$$

5.5.4 Эллипсоиды Маклорена

Для первых приближений оказалось, что

$$\zeta_{nm}(a) = \text{const}. \quad (5.63)$$

Это верно и в общем случае. В самом деле, отвечающее от сферы семейство однородных фигур равновесия нам уже известно — это эллипсоиды Маклорена. В силу теоремы единственности *другого семейства не существует*. Так что формулы (5.58), (5.62) можно рассматривать как тест. Для эллипсоидов Маклорена справедливо свойство (5.63), означающее подобие эквиденсит (Апель, 1936; Кондратьев, 1989а; Пицетти, 1933).

5.6 Модель Гюйгенса — сосредоточенная в центре масса

5.6.1 Обращение оператора Клеро

Во всех исследованиях фигур равновесия плотность предполагается убывающей функцией при движении от внутренних областей к наружным. Крайний случай постоянной плотности изучен в предыдущем разделе.

Перейдем к другому крайнему случаю, по которому вся масса сосредоточена в центре и рассматривается равновесие невесомой вращающейся атмосферы. Математически в согласии с выражениями (5.6), (5.7) ситуация описывается плотностью вида

$$\varrho(a) = \frac{\bar{\varrho}}{3a^2} \delta(a). \quad (5.64)$$

Здесь $\bar{\varrho}$ — средняя плотность в шаре $r \leq R$:

$$\bar{\varrho} = \frac{3M}{4\pi R^3}, \quad (5.65)$$

δ — односторонняя дельта-функция Дирака, определяемая соотношением

$$\int_0^1 \delta(a) F(a) da = F(0)$$

при непрерывной на $[0, 1]$ функции F . Очевидно, что

$$db = \frac{1}{3a^2} \delta(a) da. \quad (5.66)$$

Если F гладка на $(0, 1]$ и $\lim_{a \rightarrow 0} a^m F(a) = \lim_{a \rightarrow 0} a^{m+1} \frac{dF(a)}{da} = 0$, то

$$\mathbf{A}_m F(a) = \frac{1}{3a^3} F(a). \quad (5.67)$$

Поэтому обратный оператор находим сразу:

$$\mathbf{A}_m^{-1} G(a) = 3a^3 G(a). \quad (5.68)$$

5.6.2 Линейное приближение

Очевидно, что

$$V_0 = \frac{4\pi}{3a}. \quad (5.69)$$

Сопоставляя выражения (5.45) и (5.68), получаем

$$\zeta_{12} = -\frac{1}{3} a^3. \quad (5.70)$$

5.6.3 Квадратичное приближение

Подставляя в уравнения (5.52) функцию (5.70), находим коэффициенты потенциала (5.33):

$$\begin{aligned} u_{20} &= -\frac{2}{135} a^3, \\ u_{22} &= -\frac{10}{189} a^3, \\ u_{24} &= \frac{4}{105} a^3. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Переходим к эквиденситам. По формулам (5.54)

$$\tilde{\zeta}_{22} = -\frac{8}{189} a^3, \quad \tilde{\zeta}_{24} = \frac{2}{35} a^3. \quad (5.72)$$

Свободный член представления (5.30) задается формулой (5.53). Коэффициенты при P_2 и P_4 описываются решением (5.68) уравнений Клеро (5.36)

$$\zeta_{20} = -\frac{1}{45}a^6, \quad \zeta_{22} = -\frac{8}{63}a^6, \quad \zeta_{24} = \frac{6}{35}a^6. \quad (5.73)$$

По индукции легко показать, что u_{nm}, ζ_{nm} пропорциональны a^{3n-3}, a^{3n} в согласии с §2.7.

5.7 Ступенчатая плотность

5.7.1 Обращение оператора Клеро

На практике плотность $\varrho(a)$ чаще всего задается набором своих значений на конечном множестве точек \mathcal{X} :

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \quad N \geq 1,$$

где \mathcal{X} может и не зависеть от нашей воли. Поэтому естественно ввести класс функций ϱ , представимых сплайнами определенного вида с узлами \mathcal{X} . Для определения действия оператора \mathbf{A}_m на функцию F согласно равенству (5.29) достаточно представить F в виде сплайна того же вида. Особенно прост случай ступенчатой плотности, когда интегралы (5.29) берутся явно вне зависимости от вида F . Здесь мы исследуем только этот случай, поскольку он существенно проще и в то же время при надлежащей плотности узлов его можно рассматривать как общий: кусочно-непрерывная монотонная функция ϱ аппроксимируется ступенчатой с произвольной степенью точности.

Обозначим через \mathcal{D}_i промежуток $x_i \leq a < x_{i+1}$, $0 \leq i \leq N-1$. Пусть функция ϱ кусочно-постоянна:

$$\varrho(a) = c_i \quad \text{при } a \in \mathcal{D}_i, \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad (5.74)$$

где c_i — набор убывающих неотрицательных чисел. Разбивая область интегрирования на промежутки \mathcal{D}_i , находим среднюю плотность (5.7):

$$\bar{\varrho} = \sum_{i=0}^{N-1} c_i (x_{i+1}^3 - x_i^3) = c_{N-1} + \sum_{i=1}^{N-1} \varrho_i x_i^3. \quad (5.75)$$

Здесь $\varrho_i = c_{i-1} - c_i$ и далее принимаем $c_{-1} = c_N = 0$.

Введем пространство \mathcal{F} непрерывных на $[0, 1]$ функций, гладких за возможным исключением угловых точек на множестве \mathcal{X} . Оператор \mathbf{A}_m переводит \mathcal{F} в себя.

Любая точка $a \in [0, 1]$ входит в один из непересекающихся промежутков \mathcal{D}_n и может быть представлена в форме $a = x_n + x$, $0 \leq x \leq x_n - x_{n-1}$. Интегралы (5.29) элементарны:

$$\bar{\varrho} \mathbf{A}_m F(a) = G(a),$$

$$\begin{aligned} G(a) = & \frac{F(a)}{3a^3} \left\{ c_n (a^3 - x_n^3) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i (x_{i+1}^3 - x_i^3) \right\} - \\ & \frac{a^{-m-3}}{2m+1} \left\{ c_n [a^{m+3} F(a) - x_n^{m+3} F(x_n)] + \right. \\ & \left. + \sum_{i=0}^{n-1} c_i [x_{i+1}^{m+3} F(x_{i+1}) - x_i^{m+3} F(x_i)] \right\} - \\ & - \frac{a^{m-2}}{2m+1} \left\{ c_n [x_{n+1}^{2-m} F(x_{n+1}) - a^{2-m} F(a)] + \right. \\ & \left. + \sum_{i=n+1}^{N-1} c_i [x_{i+1}^{2-m} F(x_{i+1}) - x_i^{2-m} F(x_i)] \right\}, \end{aligned}$$

что можно представить в форме

$$\begin{aligned} G(a) = & \frac{c_n}{3} F(a) + \sum_{i=1}^n \varrho_i \left\{ \left(\frac{x_i}{a} \right)^3 \frac{F(a)}{3} - \left(\frac{x_i}{a} \right)^{m+3} \frac{F(x_i)}{2m+1} \right\} - \\ & - \sum_{i=n+1}^N \frac{\varrho_i}{2m+1} \left(\frac{a}{x_i} \right)^{m-2} F(x_i). \end{aligned} \quad (5.76)$$

В частности, при $n = 0$

$$G(a) = \frac{c_0}{3} F(a) - \sum_{i=1}^N \frac{\varrho_i}{2m+1} \left(\frac{a}{x_i} \right)^{m-2} F(x_i). \quad (5.77)$$

Выражение для $G(x_n)$ запишем в виде

$$G(x_n) = \sum_{k=0}^N a_{nk} F(x_k), \quad n = 0, \dots, N. \quad (5.78)$$

Здесь

$$a_{00} = \frac{c_0}{3}, \quad a_{0k} = -\frac{1}{5}\varrho_k \varrho_{m-2,0}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

а при $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{nk} &= -\frac{\varrho_k}{2m+1} \left(\frac{x_k}{x_n}\right)^{m+3}, & \text{если } k < n, \\ a_{nn} &= \frac{2(m-1)c_{n-1} + 3c_n}{3(2m+1)} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} \varrho_i \left(\frac{x_i}{x_n}\right)^3, \\ a_{nk} &= -\frac{\varrho_k}{2m+1} \left(\frac{x_n}{x_k}\right)^{m-2}, & \text{если } k > n. \end{aligned}$$

В частности, $a_{n0} = 0$ при $n \geq 1$.

Докажем разрешимость системы уравнений (5.78) относительно $F(x_k)$. Обозначим $(N+1)$ -матрицу a_{nk} через \mathcal{A} , а N -матрицу a_{nk} , получающуюся из \mathcal{A} отбрасыванием первой строки и первого столбца, через \mathcal{A}_1 . Поскольку $\det \mathcal{A} = a_{00} \det \mathcal{A}_1$, достаточно доказать, что

$$\det \mathcal{A}_1 > 0. \quad (5.79)$$

Представим \mathcal{A}_1 в виде $\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_3$, где \mathcal{A}_2 диагональна с элементами a_{nn} , а $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_1$. Ненулевые элементы матриц $\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ положительны. Образует разность между a_{nn} и суммой элементов n -строки матрицы \mathcal{A}_3 :

$$\begin{aligned} \frac{2(m-1)c_{n-1} + 3c_n}{3(2m+1)} + \sum_{k=1}^{n-1} \varrho_k \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{x_k}{x_n}\right)^3 - \frac{1}{2m+1} \left(\frac{x_k}{x_n}\right)^{m+3} \right\} - \\ - \sum_{k=n+1}^N \frac{\varrho_k}{2m+1} \left(\frac{x_n}{x_k}\right)^{m-2}. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Выражение в фигурных скобках положительно. Последняя сумма ограничена сверху величиной

$$\sum_{k=n+1}^N \frac{\varrho_k}{2m+1} = \frac{1}{2m+1} \sum_{k=n+1}^N (c_{k-1} - c_k) = \frac{c_n}{2m+1}.$$

Поэтому выражение (5.80) больше, чем

$$\frac{2(m-1)}{3(2m+1)}c_{n-1} > 0.$$

Если ввести чебышевскую норму $\|\mathcal{B}\| = \max_n \sum_{k=1}^N |b_{nk}|$ матрицы \mathcal{B} с элементами b_{nk} , то доказанное неравенство влечет

$$\|\mathcal{A}_2^{-1}\mathcal{A}_3\| < 1,$$

откуда по критерию Адамара (*Гантмахер, 1967*) следует обратимость матрицы

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 (I - \mathcal{A}_2^{-1}\mathcal{A}_3),$$

что с учетом положительности элементов \mathcal{A}_2 доказывает неравенство (5.79). Более того, малость $\|\mathcal{A}_3\|$ по сравнению с $\|\mathcal{A}_2\|$ означает близость \mathcal{A}_1 (а значит, и \mathcal{A}) к диагональной матрице, что делает процесс ее обращения устойчивым в вычислительном отношении.

После нахождения $F(x_k)$ процесс обращения оператора \mathbf{A}_m тривиален. Достаточно преобразовать выражение (5.76) к форме

$$\left\{ c_n + \sum_{i=1}^n \varrho_i \left(\frac{x_i}{a} \right)^3 \right\} F(a) = 3G(a) + \quad (5.81)$$

$$+ \frac{3}{2m+1} \sum_{i=1}^n \varrho_i \left(\frac{x_i}{a} \right)^{m+3} F(x_i) + \frac{3}{2m+1} \sum_{i=n+1}^N \varrho_i \left(\frac{a}{x_i} \right)^{m-2} F(x_i)$$

при $a \in \mathcal{D}_n$. Формула (5.77) уже имеет требуемый вид.

Заметим, что коэффициент при $F(a)$ положителен.

Если множество узлов \mathcal{X} достаточно плотно, то операцию (5.81) можно не применять, ограничившись определением F на \mathcal{X} .

Обратный оператор \mathbf{A}_m^{-1} — как и прямой \mathbf{A}_m — не выводит из пространства \mathcal{F} . Действительно, при $G \in \mathcal{F}$ формулы (5.77) и (5.81) показывают, что разрывы F возможны лишь в узлах x_n , $1 \leq n \leq N-1$. Вычислим пределы $F(a)$ при стремлении $a \rightarrow x_n$ слева и справа.

Для определения предела слева считаем $a \in \mathcal{D}_{n-1}$, поэтому полагаем в равенстве (5.81) $n := n-1$ и устремляем $a \rightarrow x_n - 0$:

$$Q_n F(x_n - 0) = G(x_n) + \quad (5.82)$$

$$+ \frac{1}{2m+1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \varrho_i \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^{m+3} F(x_i) + \sum_{i=n}^N \varrho_i \left(\frac{x_n}{x_i} \right)^{m-2} F(x_i) \right\},$$

что можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^N a_{nk} F(x_k) = G(x_n) + Q_n [F(x_n) - F(x_n - 0)].$$

Здесь

$$Q_n = \frac{1}{3} \left\{ c_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} \varrho_i \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^3 \right\}.$$

Отсюда в силу уравнения (5.78) с учетом положительности Q_n имеем

$$F(x_n - 0) = F(x_n).$$

Для определения предела справа устремляем в выражении (5.81) $a \rightarrow x_n + 0$:

$$\frac{1}{3} \left\{ c_n + \sum_{i=1}^{n-1} \varrho_i \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^3 + \varrho_n \right\} F(x_n + 0) = \quad (5.83)$$

$$= G(x_n) + \frac{1}{2m+1} \left\{ \sum_{i=1}^n \varrho_i \left(\frac{x_i}{x_n} \right)^{m+3} F(x_i) + \sum_{i=n+1}^N \varrho_i \left(\frac{x_n}{x_i} \right)^{m-2} F(x_i) \right\}.$$

Легко показать, что уравнения (5.82) и (5.83) совпадают с точностью до обозначения неизвестной, поэтому

$$F(x_n - 0) = F(x_n) = F(x_n + 0),$$

что и означает непрерывность F .

Непрерывность $F = \mathbf{A}_m^{-1}G$ естественна. Неожиданной оказывается *гладкость F при гладкости G* . Для проверки этого достаточно продифференцировать выражение (5.81) справа и слева от точки

$a = x_n$. Используя доказанную непрерывность, устанавливаем существование пределов односторонних производных и равенства

$$\begin{aligned}
Q_n F'(x_n - 0) &= G'(x_n) + F(x_n) \sum_1^{n-1} \frac{\varrho_i x_i^3}{x_n^4} - \\
&- \frac{m+3}{2m+1} \sum_1^{n-1} \varrho_i F_i \frac{x_i^{m+3}}{x_n^{m+4}} + \frac{m-2}{2m+1} \sum_n^N \varrho_i F_i \frac{x_n^{m-3}}{x_i^{m-2}}, \\
Q_n F'(x_n + 0) &= G'(x_n) + F(x_n) \sum_1^n \frac{\varrho_i x_i^3}{x_n^4} - \\
&- \frac{m+3}{2m+1} \sum_1^n \varrho_i F_i \frac{x_i^{m+3}}{x_n^{m+4}} + \frac{m-2}{2m+1} \sum_{n+1}^N \varrho_i F_i \frac{x_n^{m-3}}{x_i^{m-2}}.
\end{aligned} \tag{5.84}$$

Из (5.84) легко вывести соотношение

$$F'(x_n - 0) = F'(x_n + 0). \tag{5.85}$$

По известной теореме анализа (*Фихтенгольц, 1970*, п. 113) отсюда вытекают существование и непрерывность производной $F'(a)$ в точке x_n .

Вторая производная F в общем случае разрывна на сетке \mathcal{X} . Действительно, если G дважды непрерывно дифференцируема, то аналогом (5.85) служит соотношение

$$Q_n [F''(x_n + 0) - F''(x_n - 0)] = \frac{2\varrho_n}{x_n^2} [F(x_n) + x_n F'(x_n)]. \tag{5.86}$$

Правая часть тождественно равна нулю лишь при $aF(a) = \text{const}$.

5.7.2 Линейное приближение

Начальный член разложения потенциала вычисляется элементарно:

$$V_0(a) = -\frac{2\pi c_n}{3\bar{\varrho}} a^2 + \frac{4\pi}{3\bar{\varrho}a} \sum_{i=1}^n \varrho_i x_i^3 + \frac{2\pi}{\bar{\varrho}} \sum_{i=n+1}^N \varrho_i x_i^2. \tag{5.87}$$

Для получения эквиденсит в первом приближении прежде всего решаем линейную систему (5.78) при $m = 2$, $G(x_n) = -\bar{\varrho}/9$. Ее решение дает значения $F(x_k) = \zeta_{12}(x_k)$ на сетке \mathcal{X} . Значение $F(a) = \zeta_{12}(a)$ в произвольной точке определяется равенством (5.81).

5.7.3 Квадратичное приближение

Коэффициенты u_{22}, u_{24} согласно формулам (5.52) пропорциональны F . Интегралы для u_{20} элементарны:

$$\begin{aligned} u_{20} = & -\frac{2}{45}F(a) - \frac{c_n F^2(a)}{6\bar{\varrho}} - \frac{4}{15} \frac{F^2(a)}{a^3 \bar{\varrho}} \sum_{i=1}^n \varrho_i x_i^3 + \quad (5.88) \\ & + \frac{F(a)}{5a^5 \bar{\varrho}} \sum_{i=1}^n \varrho_i x_i^5 F(x_i) + \frac{1}{10a^2 \bar{\varrho}} \sum_{i=n+1}^N \varrho_i x_i^2 F^2(x_i). \end{aligned}$$

Переходим к эквиденситам. В соответствии с равенствами (5.53) $\zeta_{20} = -F^2/5$. Согласно соотношениям (5.54)

$$\begin{aligned} \bar{\varrho} \tilde{\zeta}_{22} = & \frac{2}{9} \bar{\varrho} F(a) + \frac{c_n F^2(a)}{7} + \frac{2}{7} \frac{F^2(a)}{a^3} \sum_{i=1}^n \varrho_i x_i^3 - \\ & - \frac{2}{7} \frac{F(a)}{a^5} \sum_{i=1}^n \varrho_i x_i^5 F(x_i) + \\ & + \frac{4}{35a^5} \sum_{i=1}^n \varrho_i x_i^5 F^2(x_i) - \frac{1}{35} \sum_{i=n+1}^N \varrho_i F^2(x_i), \quad (5.89) \\ \bar{\varrho} \tilde{\zeta}_{24} = & \frac{9}{35} c_n F^2(a) + \frac{18F^2(a)}{35a^3} \sum_{i=1}^n \varrho_i x_i^3 - \frac{18F(a)}{35a^5} \sum_{i=1}^n \varrho_i x_i^5 F(x_i) + \\ & + \frac{6}{35a^7} \sum_{i=1}^n \varrho_i x_i^7 F^2(x_i) - \frac{3}{35} a^2 \sum_{i=n+1}^N \varrho_i \frac{F^2(x_i)}{x_i^2}. \end{aligned}$$

Заметим, что формулы (5.87), (5.89) не содержат сингулярностей при $a \rightarrow 0$, так как сумма от 1 до $n = 0$ в этом случае равна нулю.

Для получения ζ_{22} сначала решаем линейную систему (5.78) при $m = 2$, $G := \bar{\varrho} \tilde{\zeta}_{22}$, $F := \zeta_{22}$ и находим значения ζ_{22} на \mathcal{X} . Продолжение на весь промежуток $[0, 1]$ осуществляется согласно равенству (5.81).

Вычисление ζ_{24} аналогично с учетом $m = 4$, $G := \bar{\varrho} \tilde{\zeta}_{24}$, $F := \zeta_{24}$.

5.8 Сходимость рядов Ляпунова

Перейдем к вопросам сходимости. В классической работе А. М. Ляпунова (*Ляпунов, 1959a*) сформулирована теорема¹ о существовании универсальной области сходимости ряда (5.12): для всех тел с положительной убывающей интегрируемой плотностью он сходится при $|q| < q^*$. Более того, в книге (*Ляпунов, 1959a*) построен алгоритм нахождения q^* , слишком сложный для докомпьютерной эры. Согласно (*Kholshchevnikov and Elkin, 2002*) $q^* = 0.000370916$.

Насколько предел Ляпунова q^* занижен для реальных фигур равновесия? Ответ можно получить, исследуя частные случаи, для которых существует решение в замкнутой форме. К сожалению, их всего три: эллипсоиды Маклорена, фигуры Гюйгенса–Роша и их композиция, состоящая из эллипсоидов Маклорена, окруженных невесомой атмосферой.

5.8.1 Эллипсоиды Маклорена

Однородных фигур равновесия с заданными R, M, ρ, q может существовать несколько. Но по свойству 1 (см. §5.3) ряд Ляпунова может представлять лишь одну из них (или даже никакой в случае расходимости). Такой привилегированной фигурой служит эллипсоид Маклорена, так как только соответствующее семейство отвечается от сферы при $q = 0$.

Поскольку эквиденситы в рассматриваемом случае подобны друг другу, достаточно рассмотреть граничный эллипсоид. Символ a в этой главе мы использовали для “номера” эквиденситы. Поэтому экваториальную полуось обозначим через A . Поверхность эллипсоида в сферических координатах задается уравнением

$$r = A \sqrt{\frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \theta}}.$$

Переходя к ляпуновскому масштабному множителю

$$R = \sqrt[3]{A^2 \times A \sqrt{1 - e^2}},$$

¹Доказательство Ляпунов обещал привести в следующем мемуаре. К несчастью, он покончил с собой, не выполнив обещания, так что теорему, строго говоря, нельзя считать доказанной.

получаем

$$\zeta = \frac{(1 - e^2)^{1/3}}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}} - 1. \quad (5.90)$$

Мы выразили ζ как функцию от вспомогательного параметра e — эксцентриситета эллипсоида Маклорена. Нам же нужен ляпуновский параметр q . Связь между ними дается формулой (4.14)

$$q = f(e) = \frac{3}{2e^3} \left\{ (3 - 2e^2)\sqrt{1 - e^2} \arcsin e - 3e(1 - e^2) \right\}.$$

В §4.2 мы показали, что функция $f(e)$ на отрезке $[0, e_0]$ возрастает от нуля до q_0 и далее убывает от q_0 до нуля. При $e = e_0$ производная $dq/de = 0$, а $de/dq = \infty$. Поэтому обратная к f функция $e = g(q)$ существует на отрезке $[0, q_0]$ и имеет особенность на его правом конце. Следовательно, ряд Ляпунова (5.12) сходится самое большее на отрезке $[0, q_0]$, представляя там ветвь слабосжатых эллипсоидов (конечно, трудно считать слабосжатым эллипсоид с эксцентриситетом e_0 , но эксцентриситеты второй ветви еще больше!). Если же функция $g(q)$, распространенная на комплексную область, имеет особые точки, расположенные ближе к началу, чем q_0 , то радиус сходимости будет меньше.

Исследование нужных функций $g(q)$, $\zeta(g(q))$ в комплексной области — задача не из легких, и мы приведем только окончательный результат. Доказательство можно найти в (*Kholshchikov and Elkin, 2002*).

Теорема. *Радиус сходимости рядов Ляпунова для однородных фигур равновесия равен $q_0 = 0.336\,998\,559$. Ряд Ляпунова сходится и при $q = q_0$.*

Признаться, столь большое значение радиуса сходимости было для нас неожиданностью. Но еще удивительнее результат следующего пункта.

5.8.2 Фигуры Гюйгенса–Роша

Обратимся к другому простейшему случаю — фигурам Гюйгенса–Роша §2.7. При $q = q^*$ поверхность тела имеет особые точки (ребро на экваторе). Поэтому ряд Ляпунова (5.12) сходится самое большее на отрезке $[0, q^*]$, представляя там все семейство фигур.

Исследование нужных функций в комплексной области оказалось еще более трудной задачей, чем для эллипсоидов Маклорена,

и мы приведем только окончательный результат. Доказательство можно найти в статье (Холшевников и Курдубов, 2002).

Теорема. *Радиус сходимости рядов Ляпунова для фигур Гюйгенса–Роша равен $q^* = 0.541116$. Ряд Ляпунова сходится и при $q = q^*$.*

Поразительно: ряды, предназначенные для аналитического представления фигур равновесия, слабо отличающихся от сферы, быстро сходятся даже для фигур, имеющих ребра, на которых равны силы тяготения и центробежные силы, и при дальнейшем увеличении q фигура разрушается!

Это показывает высокую эффективность метода Ляпунова.

Задачи к главе 5

Задача 1. Вычислить якобиан перехода от сферических координат к координатам $a\theta\lambda$ и получить элемент объема $d\tau$ (формула (5.5)).

Задача 2. Вывести формулу (5.10) для $U_{(0)}$, подставляя $\zeta = \zeta' = 0$ в интеграл (5.8).

Задача 3. Вывести формулу (5.11) для $U_{(n)}$, вычисляя частную производную порядков $i, n - i$ по ζ и ζ' соответственно от подынтегрального выражения (5.8).

Задача 4. Пусть плотность постоянна: $\varrho = \bar{\varrho} = \text{const}$. Выведите формулу (5.55) для действия оператора Клеро на произвольную функцию.

Задача 5. Пусть плотность постоянна: $\varrho = \bar{\varrho} = \text{const}$. Выведите формулу (5.57) для действия обратного оператора Клеро на произвольную функцию.

Указание. Сначала выразить $G(1)$ через $F(1)$.

Задача 6. Рассмотрим случай Гюйгенса сосредоточенной в центре массы, когда плотность задается выражением (5.64). Докажите по индукции, что u_{nm}, ζ_{nm} пропорциональны соответственно a^{3n-3}, a^{3n} .

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

Первым осознавшим важную роль закона тяготения для объяснения формы небесных тел был Исаак Ньютон (1643–1727). В своем труде *Philosophiae Naturalis Principia mathematica* (1687) он впервые рассмотрел вопрос о фигуре Земли, считая ее однородным слегка сплюснутым сфероидом, вращающимся с постоянной угловой скоростью. Христиан Гюйгенс (1629–1695) в сочинении *Discours de la cause de la pesanteur* (1690) сформулировал требование необходимого условия относительного равновесия вращающейся жидкости: равнодействующая силы тяготения и центробежной силы в любой точке свободной поверхности направлена по нормали к поверхности в этой точке.

Ньютон принимал без доказательства, что для медленно вращающейся жидкости возможной фигурой равновесия является сплюснутый сфероид. В 1737 г. Алексис Клод Клеро (1713–1765) получил выражение для силы тяготения в любой точке поверхности однородного сфероида, когда он несильно отличается от сферы. Затем в первом приближении он показал, что в каждой точке линия отвеса перпендикулярна к поверхности сфероида. В 1740 г. Колин Маклорен (1698–1746) обобщил этот результат, доказав, что фигурой относительного равновесия может служить любой сплюснутый сфероид. Ему удалось найти связь между угловой скоростью вращения и сплюснутостью меридионального сечения и показать, что линия отвеса перпендикулярна свободной поверхности в каждой ее точке. В 1743 г. Клеро опубликовал замечательный трактат *Théorie de la figure de la Terre*, в котором рассмотрел фигуры равно-

веса медленно вращающихся неоднородных тел. Он показал, что уровенные поверхности должны совпадать с поверхностями равной плотности.

Адриену Мари Лежандру (1752–1833) принадлежит понятие гравитационного потенциала и общая теория притяжения однородного эллипсоида. Он первым определил уровенные поверхности твердотельно вращающегося тела как такие поверхности, на которых сумма гравитационного и центробежного потенциалов постоянна. Ему удалось улучшить теорию Клеро и доказать, что когда отклонения от сферичности невелики, слои должны иметь вид сплюснутых сфероидов. Пьер Симон де Лаплас (1749–1827) доказал теорему, что в твердотельно вращающейся фигуре равновесия уровенные поверхности совпадают как с поверхностями равного давления, так и с поверхностями равной плотности (1825, *Traité de mécanique céleste*). Лаплас же предложил представлять неоднородные фигуры равновесия, мало отличающиеся от сферы, рядом по сферическим функциям. Этот метод получил значительное развитие в работах В.М.Жаркова, В.П.Трубицына и их школы (*Жарков и др., 1971; Жарков, 1983*). Однако вопрос о сходимости рядов Лапласа до сих пор остается открытым.

В 1834 г. Карл Якоби (1804–1851) нашел, что одной из форм относительного равновесия у вращающихся тел может быть однородный эллипсоид с тремя неравными осями. Жозеф Лиувиль (1809–1882) привел аналитическое доказательство этого утверждения и в 1843 г. впервые описал свойства этих эллипсоидов в зависимости от момента количества движения. К тому времени было уже известно, что с увеличением момента количества движения от нуля до бесконечности сфероиды Маклорена видоизменяются от сферы до бесконечно тонкого диска. В отношении эллипсоидов Якоби, форма которых меняется от конфигурации с осевой симметрией до бесконечно тонкой спицы, Лиувиль установил, что они могут представлять фигуры равновесия, только если момент количества движения превышает определенный предел. Александр Михайлович Ляпунов (1857–1918) предложил вместо ряда Лапласа использовать ряд по степеням малого параметра q . Алгоритмически он немного сложнее (*Заки и др., 1994; Елькин, 2003*), зато математически обоснован несколькими теоремами о сходимости.

Тщательное исследование устойчивости эллипсоидальных фигур равновесия выполнили А.М.Ляпунов и Анри Пуанкаре (1854–

1912). Появилось понятие фигур бифуркации и было доказано существование грушевидных фигур, которые ответвляются от последовательности эллипсоидов Якоби. Неустойчивость грушевидных фигур была показана Ляпуновым. С помощью метода последовательных приближений Ляпунов первым развил точную теорию неоднородных тел, уровенные поверхности которых лишь слегка отличаются от эллипсоидов. Леон Лихтенштейн (1878–1933) и Ролен Вавр (1896–1949) предложили другие методы исследования этой задачи. По большей части все они в настоящее время уступили численным методам, однако с их помощью были доказаны некоторые фундаментальные теоремы, которые лежат в основе теории быстро вращающихся центрально конденсированных тел.

Подчеркнем, что нами освещена лишь теория твердоотельно вращающихся баротропных фигур равновесия. Более общие случаи выходят за рамки этой книги.

Авторы признательны **Российскому Фонду Фундаментальных Исследований** (грант 99-02-17820) и **Ведущей научной школе** (грант 00-15-96775) за финансовую поддержку.

Литература

- Антонов, 1973.* — Антонов В.А. О невозможности свободной прецессии жидкой массы, достигшей относительного равновесия // Труды АО ЛГУ. Т. 29. С. 150–152.
- Антонов, 1975.* — Антонов В.А. Фигуры равновесия // Итоги науки и техники. / ВИНТИ. Сер. Астрономия. Т. 10. С 7–60. М.: Наука.
- Антонов и др., 1989.* — Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука.
- Аппель, 1936.* — Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. Л.; М.: ОНТИ.
- Гантмахер, 1967.* — Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука.
- Гобсон, 1952.* — Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных гармоник. М.: ИЛ.
- Грушинский 1976.* — Грушинский Н.П. Теория фигуры Земли. М.: Наука.
- Елькин, 2003.* — Елькин А.В., Холшевников К.В. Определение фигур равновесия небесных тел методом Ляпунова // Труды АО СПбГУ. Т. 45. в печати
- Жарков и др., 1971.* — Жарков В.Н., Трубицин В.П., Самсоенко Л.В. Физика Земли и планет: Фигуры и внутреннее строение. М.: Наука.

- Жарков, 1983.* — Жарков В.Н. Внутреннее строение Земли и планет. М.: Наука.
- Заки и др., 1994.* — Заки С.Ф., Елькин А.В., Холшевников К.В. Форма и строение небесных тел: вслед за Ляпуновым // Астрон. журн. Т. 71, 5. С. 785–793.
- Кондратьев, 1989а.* — Кондратьев Б.П. Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. М.: Наука.
- Кондратьев, 1989б.* — Кондратьев Б.П. Грушевидные фигуры равновесия с внутренними течениями // Тезисы докл. Всесоюзной конф. Пробл. физ. и динам. звезд. систем, Ташкент, окт. 1989. С. 29–30. Ташкент: Изд-во Ташкентского ГУ.
- Корн, 1984.* — Корн Т., Корн Г. Справочник по математике. М.: Наука.
- Крат, 1950.* — Крат В.А. Фигуры равновесия небесных тел. М.: ГИТТЛ.
- Лихтенштейн, 1965.* — Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. М.: Наука.
- Ляпунов, 1959а.* — Ляпунов А.М. Исследования по теории фигур небесных тел // Собр. соч. Т. 3. С. 114–146. М.: Наука.
- Ляпунов, 1959б.* — Ляпунов А.М. Об уравнении Клеро и более общих уравнениях // Собр. соч. Т. 3. С. 147–206. М.: Наука.
- Михайлов, 1939.* — Михайлов А.А. Курс гравиметрии и теории фигуры Земли. М.: ГУГК.
- Пицетти, 1933.* — Пицетти П. Основы механической теории фигуры планет. М.; Л.: ГТТИ.
- Поляченко и Фридман, 1976.* — Поляченко В.Л., Фридман А.М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука.
- Пуанкаре, 2000.* — Пуанкаре А. Фигуры равновесия жидкой массы. Ижевск: Изд-во РХД.
- Тассуль, 1982.* — Тассуль Ж.-Л. Теория вращающихся звезд. М.: Мир.

- Фихтенгольц, 1970.* — Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука.
- Фридман, 1975.* — Фридман А.М. Равновесие и устойчивость бесстолкновительных гравитирующих систем // Итоги науки и техники. / ВИНТИ. Сер. Астрономия. Т. 10. С 61–159. М.: Наука.
- Холшевников и Курдубов, 2002.* — Холшевников К.В., Курдубов С.Л. Сходимость рядов Ляпунова для фигур Гюйгенса–Роша // Вестник С.-Петербур. ун-та. Сер. 1. Вып. 1. С. 101–109.
- Чандрасекар, 1973.* — Чандрасекар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир.
- Carleman, 1919.* — Carleman T. Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen // Math. Zeitschr. Bd. 3, Heft 1. S. 1–7.
- Cartan, 1922.* — Cartan M.E. Sur les petites oscillations d'une masse fluide // Bulletin des Sciences mathématiques. Sér. 2, 46, part 1. P. 317–369.
- Crudeli, 1910a.* — Crudeli U. Nuovo limite superiore delle velocità angolare dei fluidi omogenei, rotanti uniformamente, limitati da figura di equilibrio // Atti della Reale Accademia dei Lincei. Ser. 5. Rendiconti, classe fis., mat., nat. Vol. 19, fasc. 10, semestre 1. P. 666–668.
- Crudeli, 1910b.* — Crudeli U. Su la velocità angolare dei fluidi eterogenei, rotanti, limitati da figura di equilibrio // Atti della Reale Accademia dei Lincei. Ser. 5. Rendiconti, classe fis., mat., nat. Vol. 19, semestre 2. P. 41–43.
- Fridman and Polyachenko, 1984.* — Fridman A.M., Polyachenko V.L. Physics of gravitating system. Vol. 1, 2. New-York etc.: Springer.
- Fukushima, 2000.* — Fukushima T. Report on Astronomical Constants. Towards models and constants for sub-microarcsecond astrometry. // Proceedings of IAU Colloquium 180, Washington. P. 417–427.

- Kholshevnikov and Elkin, 2002.* — Kholshevnikov K.V., Elkin A.V. Convergence of Liapunov series for Maclaurin ellipsoids // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* Vol. 84, 1, P. 57-63.
- Meyer, 1842.* — Meyer C.O. De aequilibrii formis ellipsoidicis. *Crelle*, XXIV.
- Mohr, 1999.* — Mohr P.J., Taylor B.N. // *Journ. Phys. and Chem. Ref. Data.* Vol. 28, 6. P. 1713.
- Nicliborc, 1929.* — Nicliborc W. Über die obere Schranke der Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender gravitierender Flüssigkeiten // *Math. Zeitschr.* Bd. 30, Heft 5. S. 787-793.
- Standish, 1995.* — Standish E.M. Report of the IAU WGAS subgroup on numerical standards // *Highlights of Astronomy.* Vol 10. P. 180-185.
- Standish, 1998.* — Standish E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides DE405/LE405. Technical report, Interoffice Memorandum, 312.F-98-048.
- Wavre, 1932.* — Wavre R. Figures planétaires et géodesie. Paris.
- Zharkov et al., 1985.* — Zharkov V.H., Leontjev V.V., Kozenko A.V. Models, figures and gravitational moments of Galilean satellites of Jupiter and ice satellites of Saturn // *Icarus.* Vol. 61, 1. P. 92-100.

Учебное издание

*Николай Петрович Питъев, Владимир Борисович Титов,
Константин Владиславович Холшевников*

ФИГУРЫ РАВНОВЕСИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Учебное пособие

Зав. редакцией Г. И. Чердниченко
Обложка Е. А. Соловьевой

Лицензия ЛР N 040050 от 15.08.1996

Подписано к печати с оригинал-макета 02.07.2002.

Печать офсетная. Ф-т 60×84/16. Усл. печ. л. 6,28.

Уч.-изд. л. 6,05.

Тираж 50 экз. Заказ N

Редакция оперативной подготовки учебно-методических
и научных изданий Издательства
С.-Петербургского университета.

199034, С.-Петербург, Университетская наб., 7/9.

ЦОП типографии Издательства СПбГУ.

199034, С.-Петербург, наб. Макарова, 6.