

# Д.И.Нагирнер Лекции по космологии

## Введение

Главные события и имена в космологии. Теоретические и наблюдательные основы

Над космологическими проблемами человечество задумывалось с самого начала своего существования. О возникновении и строении Вселенной говорят многочисленные мифы различных народов. Научная космология началась с работ астрономов эпохи Возрождения: Николая Коперника (1473–1543), Иоганна Кеплера (1571–1630) и Галилео Галилея (1564–1642). Однако все они не шли дальше сферы неподвижных звезд, то есть интересовались строением Солнечной системы. Математическую основу это направление приобрело после установления закона всемирного тяготения Исааком Ньютоном (1642–1727). Космогонические теории впервые предложили Пьер Симон Лаплас (1749–1827) и Иммануил Кант (1724–1804). Такие теории продолжают развиваться вплоть до настоящего времени на основе самых современных представлений физики, но эта наука называется космогонией, а не космологией.

Намерение построить космологическую модель, то есть модель всей Вселенной, а не только Солнечной системы или Галактики, возникло сразу же у А.Эйнштейна (1917), как только им были сформулированы уравнения общей теории относительности (1916), описывающие гравитационное поле и поведение материи в нем. Он применил уравнения к однородному и изотропному распределению материи (космологический принцип) и пытался найти стационарное решение этих уравнений, чтобы избежать проблемы происхождения и начальных этапов истории Вселенной. Для этого ему пришлось дополнить уравнения так называемым космологическим слагаемым или  $\Lambda$ -членом, который описывает не притяжение, а гравитационное отталкивание. Стационарное решение получалось только для замкнутой Вселенной и к тому же, как показал А.Эддингтон, оказалось неустойчивым.

Первые нестационарные решения уравнений Эйнштейна получил российский математик, гидромеханик и метеоролог А.А.Фридман (1888–1925) для вещества без давления, равномерно распределенного в пространстве, сначала с положительной кривизной (1922), затем с отрицательной (1924). В этих же работах им рассматривались случаи положительных и отрицательных значений космологической постоянной. Сначала Эйнштейн не принял (не понял) решений Фридмана, но потом согласился с ними.

Нестационарные решения получил также бельгийский теоретик Ж.Леметр в 1927 году, не зная о работах Фридмана. Он включил в уравнения влияние излучения.

Наблюдательный базис ее составляют открытое в 1929 году Эдвином Поуэллом Хабблом (1889–1953) явление разбегания галактик от нас со скоростями, пропорциональными расстояниям до них, а также существование и свойства реликтового фонового излучения, обнаруженного в 1964 году. В последнее время было открыто, что именно космологическое слагаемое играет определяющую роль в космологии, приводя к ускоренному расширению пространства.

## Глава I. Однородные космологические модели

### § 1. Метрики однородных пространств

1. *Космологический принцип.* В космологии принимается так называемый космологический принцип, согласно которому все, что есть во Вселенной (прежде всего материя), в каждый момент времени распределено однородно и изотропно по пространству, а характеризующие Вселенную величины не зависят от места в ней. Если посмотреть вокруг, то бросается в глаза именно неоднородность распределения вещества и излучения. Но считается, что на больших масштабах принцип соблюдается. Космологические масштабы — это мега- и гигапарсеки (1 Мпк равен  $3.086 \cdot 10^{24}$  см, 1 Гпк  $3.086 \cdot 10^{27}$  см).

2. *Радиус кривизны пространства как его основная характеристика.* Основной величиной, характеризующей геометрические свойства Вселенной, является радиус кривизны  $R$  пространства, определяемый в дифференциальной геометрии. Согласно космологическому принципу кривизна пространства также одинакова везде в заданный момент, то есть радиус кривизны может зависеть только от времени.

Постоянная кривизна  $k/R^2$  может быть положительной, тогда  $k = 1$ , отрицательной при  $k = -1$  или нулевой, если  $k = 0$ .

3. *Метрика трехмерного пространства положительной кривизны.* О пространствах различной кривизны проще рассуждать по аналогии с поверхностями в трехмерном пространстве, так как мы сами трехмерные и кривизну нашего пространства воспринимать не можем. Постоянную положительную кривизну в нашем пространстве имеет сфера. Поэтому и трехмерное пространство положительной кривизны моделируем гиперсферой в четырехмерном евклидовом пространстве.

Введем четыре координаты: три координаты нашего пространства  $\vec{r} = (x, y, z)$  и дополнительную координату  $u$ . Расстояние между точками такого пространства

$$l_4^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 + (u_1 - u_2)^2. \quad (1)$$

Удобнее иметь дело с бесконечно малым расстоянием от начала координат. Квадрат дифференциала его

$$dl_4^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2. \quad (2)$$

Перепишем входящий сюда дифференциал расстояния трехмерного подпространства в трехмерных же сферических координатах:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + du^2, \quad (3)$$

где квадрат элемента длины на единичной сфере

$$d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (4)$$

Здесь  $r$ ,  $\theta$  и  $\phi$  — обычные сферические координаты: полярное расстояние, полярный угол и азимут.

Нам надо получить метрику не всего четырехмерного пространства, а метрику трехмерной гиперсферы, уравнение которой

$$\vec{r}^2 + u^2 = R^2 \text{ или } r^2 + u^2 = R^2. \quad (5)$$

Продифференцировав это уравнение, получим дифференциальное соотношение

$$\vec{r} d\vec{r} + u du = 0 \text{ или } r dr + u du = 0. \quad (6)$$

Замена дифференциала координаты  $u$  из этих соотношений

$$du = -\frac{r dr}{u}, \quad du^2 = \frac{r^2 dr^2}{u^2} = \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} \quad (7)$$

в выражении для  $dl_4^2$  будет означать переход от произвольных точек четырехмерного пространства в физическую гиперсферу. Получится

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} = \frac{R^2}{R^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\omega^2 = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\omega^2. \quad (8)$$

Сделаем подстановку  $r = R \sin \chi$ . Тогда

$$dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\omega^2). \quad (9)$$

Ясно, что  $0 \leq \chi \leq \pi$ ,  $0 \leq r \leq R$ .

4. *Метрика пространств неположительной кривизны.* Случай  $k = -1$  не допускает столь наглядной интерпретации. Пространство постоянной отрицательной кривизны можно вложить в четырехмерное пространство, но не евклидово, а Лобачевского. Его описание отличается от приведенного выше заменой некоторых плюсов на минусы. Вместо гиперсферы надо рассматривать другую гиперповерхность: верхнюю часть двуполостного гиперболоида вращения при индефинитной метрике, то есть

$$l_4^2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 - (u_1 - u_2)^2, \quad dl_4^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 - du^2. \quad (10)$$

Уравнение трехмерного пространства и дифференциал

$$r^2 - u^2 = -R^2, \quad r dr - u du = 0. \quad (11)$$

Переход в трехмерное пространство приводит к его метрике

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 - \frac{r^2 dr^2}{r^2 + R^2} = \frac{R^2 dr^2}{r^2 + R^2} + r^2 d\omega^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/R^2} + r^2 d\omega^2. \quad (12)$$

Следствием изменения знака будет замена в выражении радиуса  $r$  через радиус кривизны тригонометрической функции на гиперболическую:

$$r = R \operatorname{sh} \chi, \quad dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\omega^2). \quad (13)$$

Случай  $k = 0$  соответствует трехмерному евклидову пространству с обычной метрикой и заменой  $r = R\chi$ :

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 = R^2 (d\chi^2 + \chi^2 d\omega^2). \quad (14)$$

5. *Геометрия пространств.* Если ввести альтернативные обозначения для тригонометрического и гиперболического синуса и их предельного значения:

$$\operatorname{sn}_k \chi = \begin{cases} \sin \chi, & \text{при } k = 1, \\ \chi, & \text{при } k = 0, \\ \operatorname{sh} \chi, & \text{при } k = -1, \end{cases} \quad (15)$$

то многие соотношения можно будет записать для трех случаев единым образом. Например, формулы (9), (13) и (14) предстанут в виде

$$dl^2 = R^2(d\chi^2 + \operatorname{sn}_k^2 \chi d\omega^2). \quad (16)$$

Метрика определяет всю геометрию пространства. Например, можно найти элемент его объема. Очевидно, что  $dl$  — это длина диагонали параллелепипеда со сторонами  $Rd\chi$ ,  $R\operatorname{sn}_k \chi d\theta$  и  $R\operatorname{sn}_k \chi \sin \theta d\phi$ . Объем такого параллелепипеда, то есть произведение длин сторон, это и есть элемент объема пространства:

$$d^3r = R^3 \operatorname{sn}_k^2 \chi \sin \theta d\chi d\theta d\phi. \quad (17)$$

Возьмем две точки в пространстве с координатами  $\chi = 0$  и  $\chi = \chi_0$ . Соответствующие координаты  $r$  будут 0 и  $r_0 = R\operatorname{sn}_k \chi_0$ . Пусть в первой точке находится наблюдатель, вторую назовем пробной. Соединим эти точки лучом, исходящим от наблюдателя. Вдоль луча значения углов  $\theta$  и  $\phi$  постоянны, а элемент расстояния  $dl = Rd\chi$ , так что расстояние от наблюдателя до пробной точки  $l_0 = R\chi_0$ . Элемент площади поверхности сферы на этом расстоянии  $r_0^2 d^2\omega = R^2 \operatorname{sn}_k^2 \chi_0 \sin \theta d\theta d\phi$ . Элемент  $d^2\omega$  относится к единичной сфере, поэтому  $r_0$  — это радиус сферы, проходящей через пробную точку. В пространстве постоянной положительной кривизны радиус  $r_0$  меньше расстояния от наблюдателя до поверхности сферы  $r_0 = R \sin \chi_0 < l_0 = R\chi_0$ , а в пространстве отрицательной кривизны наоборот  $r_0 = R \operatorname{sh} \chi_0 > R\chi_0$ . В евклидовом пространстве эти величины, естественно, равны. В искривленных пространствах наблюдатель не находится в центре сферы, который вообще не помещается в реальном пространстве, а является точкой четырехмерного пространства. Площадь поверхности сферы радиуса  $r = r_0$  вычисляется сразу, так как интеграл по сферическим углам равен  $4\pi$ : она равна  $S(\chi_0) = 4\pi r_0^2 = 4\pi R^2 \operatorname{sn}_k^2 \chi_0$ . Легко находится и длина экватора этой сферы, определяемого условиями  $r = r_0$ ,  $\theta = \pi/2$ :  $l_{\text{eq}}(\chi_0) = 2\pi R \operatorname{sn}_k \chi_0$ .

При  $k = 1$  ( $\operatorname{sn}_1 \chi_0 = \sin \chi_0$ ) величины  $S(\chi_0)$  и  $l_{\text{eq}}$  с ростом  $\chi_0$  сначала растут до максимума, а затем убывают и обращаются в нуль при  $\chi_0 = \pi$ , причем объем, заключенный внутри сферы, с увеличением координаты  $\chi_0$ , как и расстояние  $l_0$ , монотонно растет:

$$V_1(\chi_0) = 4\pi \int_0^{r_0} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = 4\pi R^3 \int_0^{\chi_0} \sin^2 \chi d\chi = 2\pi R^3 \left( \chi_0 - \frac{1}{2} \sin 2\chi_0 \right). \quad (18)$$

Полный объем пространства в данном случае конечен:  $V(\pi) = 2\pi^2 R^3$ . Поэтому такое пространство называется замкнутым (или закрытым). Оно аналогично поверхности трехмерной сферы, у которой аналогом сфер являются параллели.

В пространствах с  $k = -1$  и  $k = 0$  элементы на сфере с ростом  $\chi_0$  растут неограниченно. Объем, заключенный внутри таких сфер, растет до бесконечности.

6. *Метрика четырехмерного пространства—времени.* Все рассуждения предыдущих пунктов относились к фиксированному моменту времени. Но Вселенная должна рассматриваться как пространственно-временное многообразие, то есть четырехмерное пространство. Это реальное пространство—время ничего общего не имеет с рассмотренными выше фиктивными (вспомогательными) четырехмерными пространствами. Его геометрия определяется, как и в обычной (специальной) теории относительности, выражением для квадрата элемента интервала, которое для однородного пространства и выбранной системы отсчета имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2, \quad (19)$$

где  $dl^2$  дается одной из приведенных выше формул. Наиболее удобная форма — (16) (ее частные виды — равенства (9), (13) и (14)).

Поскольку  $R$  зависит только от времени, можно сделать замену  $cdt = R(\eta)d\eta$ . (20)

Тогда метрика пространства—времени примет форму, называемую метрикой Фридмана—Робертсона—Уокера (ФРУ) (именно в таком виде ее записали два последних автора, но, конечно, она была записана и Фридманом, но совсем в других обозначениях):

$$ds^2 = R^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sn}_k^2 \chi d\omega^2]. \quad (21)$$

Безразмерные координаты  $\eta$  и  $\chi$  называются конформными координатами, первая определяет ход времени и изменение радиуса кривизны, а вторая — расстояние.

## § 2. Основные уравнения однородных космологических моделей

1. *Два основных уравнения космологии.* С принятием метрики (21) из уравнений тяготения Эйнштейна (общей теории относительности, ОТО) выводятся уравнения, определяющие эволюцию радиуса кривизны.

Система уравнений тяготения Эйнштейна записывается через четырехмерные тензоры второго ранга. В левой части стоит тензор кривизны пространства—времени и космологическое слагаемое, а в правой — тензор энергии—импульса всех компонент. В силу симметрии система содержит не 16, а только 10 независимых уравнений. Однако для метрики ФРУ получаются всего два независимых уравнения (остальные либо оказываются

тождествами, либо совпадают с одним из этих двух). Два уравнения записываются с производными от радиуса кривизны пространства  $R$  в левых частях:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + 3\frac{P}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda c^2}{3} R, \quad (22)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 - kc^2. \quad (23)$$

Здесь  $\Lambda > 0$  — космологическая постоянная,  $\rho = \rho_m + \rho_r$  — полная массовая плотность материи (в широком смысле), то есть вещества (m) и излучения (r),  $P = P_m + P_r$  — давление. Константа  $k$  может принять одно из трех значений:  $k = 1, 0, -1$ , соответственно для моделей с положительной, нулевой и отрицательной кривизной пространства. В уравнении (23) константа  $k$  появилась как следствие соотношения  $cs_k^2 \chi + k \operatorname{sn}_k^2 \chi = 1$ , где  $cs_k \chi = \operatorname{sn}'_k \chi$  — общее обозначение для тригонометрического и гиперболического косинусов, а также их предельного случая  $cs_0(\chi) = 1$ .

2. *Преобразование уравнений.* Космологические слагаемые в правых частях уравнений стоят отдельно от других слагаемых. Присоединим слагаемые с космологической постоянной в уравнениях (22)–(23) к первым слагаемым, записав их в том же виде, то есть положив

$$\frac{\Lambda c^2}{3} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho_\Lambda + 3\frac{P_\Lambda}{c^2} \right), \quad \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda. \quad (24)$$

Чтобы удовлетворить этим соотношениям, надо определить

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2. \quad (25)$$

Будем для краткости называть носитель этих величин, поскольку это не вещество и не излучение, вакуумом. В последнее время этот носитель называют темной энергией по аналогии с темным веществом (материей). С учетом определений (25) уравнения (22)–(23) запишутся короче:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho_t + 3\frac{P_t}{c^2} \right) R, \quad (26)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_t R^2 - kc^2, \quad (27)$$

где полные плотность и давление трех компонент

$$\rho_t = \rho + \rho_\Lambda = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad P_t = P + P_\Lambda = P_m + P_r + P_\Lambda. \quad (28)$$

Как явствует из уравнения (26), в создании гравитационного воздействия участвует не только плотность, но и давление, которое появляется как элемент тензора энергии-импульса. Сумма, входящая в это уравнение и обозначаемая  $\rho_g$ , называется гравитирующей или гравитационной плотностью:

$$\rho_g = \rho_t + 3\frac{P_t}{c^2}. \quad (29)$$

Отметим еще, что если формально ввести определение полной массы трех гравитационных компонент

$$M_g = \frac{4\pi}{3} \rho_g R^3, \quad (30)$$

то уравнение (26) записывается в виде, полностью совпадающем с видом ньютоновского уравнения:

$$\ddot{R} = -G \frac{M_g}{R^2}. \quad (31)$$

Для сокращения некоторых формул и последнее слагаемое в уравнении (27) присоединяют к предпоследнему, вводя так называемые плотность и давление кривизны

$$\rho_k = -\frac{3}{8\pi G} \frac{kc^2}{R^2}, \quad P_k = \frac{1}{8\pi G} \frac{kc^2}{R^2}. \quad (32)$$

Это определение позволяет записать второе уравнение еще короче (вид первого уже не упрощается, но перепишем и его):

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g R, \quad (33)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_u R^2, \quad (34)$$

где (кривизна не вносит вклада в гравитационную плотность)

$$\rho_g = \rho_u + 3\frac{P_u}{c^2}, \quad \rho_u = \rho_t + \rho_k = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \rho_k, \quad P_u = P_t + P_k = P_m + P_r + P_\Lambda + P_k. \quad (35)$$

Последнее преобразование уравнений носит совершенно формальный характер, так как кривизна это чисто математическое понятие, но все же в дальнейшем мы используем уравнения в такой компактной форме.

3. *Совместность уравнений.* Просто из вида уравнений следует, что для их совместности нужно потребовать выполнения какого-то дополнительного условия. Действительно, в первое уравнение входит давление, которое создает гравитацию вместе с плотностью. Во втором уравнении давления нет. Найдем указанное условие.

Продифференцируем уравнение (27) по времени. Получим

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho}_t R^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho_t 2R\dot{R}, \quad \ddot{R} = \frac{4\pi G}{3}\dot{\rho}_t \frac{R^2}{\dot{R}} + \frac{8\pi G}{3}\rho_t R. \quad (36)$$

Приравняем полученное выражение для второй производной от радиуса кривизны его выражению из уравнения (26). Сократив на  $4\pi GR$ , найдем

$$\frac{1}{3}\dot{\rho}_t \frac{R}{\dot{R}} + \frac{2}{3}\rho_t = -\frac{1}{3}\rho_t - \frac{P_t}{c^2}, \quad \frac{1}{3}\dot{\rho}_t \frac{R}{\dot{R}} + \rho_t + \frac{P_t}{c^2} = 0, \quad \dot{\rho}_t = -3\left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right)H, \quad (37)$$

где появилась новая переменная  $H$ , которую будем называть функцией Хаббла. Она постоянна во всем пространстве в каждый момент времени, так как равна отношению

$$H = \frac{\dot{R}}{R}. \quad (38)$$

С использованием уравнения (26) выводится и уравнение, которому подчиняется функция Хаббла:

$$\ddot{R} = \frac{d\dot{R}}{dt} = \frac{dRH}{dt} = \dot{R}H + R\dot{H} = R(H^2 + \dot{H}) = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_t + 3\frac{P_t}{c^2}\right)R, \quad \dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho_g. \quad (39)$$

4. *Физический смысл дополнительного условия.* Возьмем объем  $V$  и найдем полную энергию, то есть энергию всех компонент, заключенную в этом объеме. Так как  $\rho$  — это плотность массы, то для получения энергии ее надо умножить на  $c^2$ . Найдем дифференциал полной энергии и подставим дифференциал плотности из (37). С учетом трехмерности объема ( $dV/V = 3dR/R$ ) получится

$$d(\rho_t c^2 V) = c^2(Vd\rho_t + \rho_t dV) = -3c^2 V \left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right) \frac{dR}{R} + c^2 \rho_t dV = -c^2 V \left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right) \frac{dV}{V} + c^2 \rho_t dV = -P_t dV. \quad (40)$$

Получилось, что изменение энергии равно работе силы давления, что в термодинамике означает адиабатичность процесса. Следовательно, космологическое расширение (или сжатие, если оно наступит) можно интерпретировать как адиабатический процесс.

5. *Невзаимодействующие компоненты.* Из изложенного ясно, что для полного определения эволюции космологической модели необходимо как-то установить уравнение состояния космологической смеси. В различные эпохи уравнение, связывающее вещество и излучение, может иметь различную форму, например, в него может входить температура  $T$ , для определения которой придется исследовать физические процессы взаимодействия этих гравитирующих компонент.

Однако, на протяжении большей части эволюции Вселенной вплоть до настоящего времени космологические компоненты между собой не взаимодействуют. Кривизна и вакуум вообще ни с чем взаимодействовать не могут. Две другие компоненты, то есть вещество и излучение, также могут считаться невзаимодействующими.

К веществу относятся нейтрино. Их существует три типа (электронные, мюонные и тау-нейтрино), нейтрино и антинейтрино, всего 6 компонент. Из-за малой массы покоя нейтрино всех типов оказываются ультрарелятивистскими также почти на всем протяжении эволюции Вселенной. Таким образом, вещество можно подразделить на холодную (или пылевидную) и горячую (то есть нейтрино) составляющие:  $\rho_m = \rho_d + \rho_\nu$ .

6. *Уравнения состояния компонент.* Для каждой из этих компонент выполняется свое уравнение состояния. Энергия холодного вещества заключена в его энергии покоя, то есть в массе, а давлением можно пренебречь и считать вещество пылевидным, то есть для  $\rho_d$  давление  $P_d = 0$  ( $d$  — dust). Для равновесного (теплого) излучения и для нейтрино выполняется известное соотношение между давлением и плотностью массы, как для всяких ультрарелятивистских частиц:  $P = (c^2/3)\rho$ .

Таким образом,

$$P_d = 0, \quad P_r = \frac{c^2}{3}\rho_r, \quad P_\nu = \frac{c^2}{3}\rho_\nu, \quad P_{r\nu} = \frac{c^2}{3}\rho_{r\nu}, \quad P_\Lambda = -c^2\rho_\Lambda, \quad P_k = -\frac{c^2}{3}\rho_k. \quad (41)$$

Последнее уравнение вытекает из определений (32). Ультрарелятивистские нейтрино объединим с излучением.

7. *Эволюция плотностей компонент.* Из уравнения (37), записанного для каждой компоненты отдельно, и уравнений состояния (41) следуют выражения для производных:

$$\dot{\rho}_d = -3\rho_d H, \quad \dot{\rho}_{\nu} = -3\left(\rho_{\nu} + \frac{1}{3}\rho_{\nu}\right)H = -4\rho_{\nu}H, \quad \dot{\rho}_\Lambda = 0. \quad (42)$$

Так как функция Хаббла является производной от логарифма радиуса кривизны, то уравнения (42) легко интегрируются:

$$\rho_d = \rho_d^0 \frac{R_0^3}{R^3}, \quad \rho_{\nu} = \rho_{\nu}^0 \frac{R_0^4}{R^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0. \quad (43)$$

Здесь и в дальнейшем индексом 0 отмечаются величины, относящиеся к современной эпохе.

Для определения связи плотности кривизны с радиусом кривизны интегрирования не требуется, так как она задается определением (32):

$$\rho_k = \rho_k^0 \frac{R_0^2}{R^2}, \quad \rho_k^0 = -\frac{3}{8\pi G} \frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (44)$$

Безразмерное отношение  $a = R/R_0$  называют масштабным множителем (или фактором). Он связан с особой космологической величиной, определяемой из наблюдений, называемой красным смещением и обозначаемой  $z$ . Точное определение красного смещения будет дано в следующей главе, но уже здесь приведем указанную связь:

$$a = \frac{R}{R_0} = \frac{1}{1+z}. \quad (45)$$

Через масштабный множитель плотности выражаются проще:

$$\rho_d = \frac{\rho_d^0}{a^3}, \quad \rho_{\nu} = \frac{\rho_{\nu}^0}{a^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0, \quad \rho_k = \frac{\rho_k^0}{a^2}. \quad (46)$$

С учетом уравнений состояния (41) гравитирующая плотность равна

$$\rho_g = \rho_t + 3\frac{P_t}{c^2} = \rho_d + 2\rho_{\nu} - 2\rho_\Lambda. \quad (47)$$

8. *Критические величины.* В космологической теории вводится несколько стандартных обозначений для величин, определяющих геометрические свойства пространства, прежде всего его кривизну.

Перенесем в уравнении (27) первое слагаемое правой части в левую и вынесем множитель при плотности в этом слагаемом за скобки:

$$\frac{8\pi G}{3}R^2(\rho_c - \rho_t) = -kc^2. \quad (48)$$

Получившееся первое слагаемое в скобках — так называемая критическая плотность

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (49)$$

Знак параметра  $k$  совпадает со знаком разности  $\rho_t - \rho_c$ : они положительны, отрицательны или равны нулю соответственно для моделей с положительной, отрицательной и нулевой кривизной.

Из уравнения (48) и определений (49) и (28) вытекает, что  $\rho_c = \rho_u$ .

Другими критическими параметрами (или параметрами критичности) называют отношения

$$\Omega_d = \frac{\rho_d}{\rho_c}, \quad \Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c}, \quad \Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_c}, \quad \Omega_{\nu} = \frac{\rho_{\nu}}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \quad \Omega_t = \frac{\rho_t}{\rho_c}, \quad \Omega_u = \frac{\rho_u}{\rho_c}, \quad \Omega_k = \frac{\rho_k}{\rho_c} = -\frac{kc^2}{\dot{R}^2}. \quad (50)$$

Очевидны соотношения

$$\Omega_t = \Omega_d + \Omega_{\nu} + \Omega_\Lambda, \quad \Omega_u = \Omega_t + \Omega_k = \Omega_d + \Omega_{\nu} + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1. \quad (51)$$

Эти параметры суть доли различных составляющих в критической плотности. Через них уравнение (48) записывается в виде

$$\dot{R}^2(1 - \Omega_t) = -kc^2, \quad k = \text{sgn}(\Omega_t - 1) = \text{sgn}(\Omega_t^0 - 1), \quad (52)$$

так что при  $\Omega_t > 1$  пространство замкнуто, при  $\Omega_t < 1$  — открыто, при  $\Omega_t = 1$  — плоское.

9. *Общее решение основных уравнений в квадратурах.* В рассмотренном выше случае, когда три компоненты Вселенной: пылевидное вещество, излучение с нейтрино и вакуум, между собой не взаимодействуют, возможно получить решение космологических уравнений в квадратурах.

Перепишем соотношения (46) через современные значения параметров критичности:

$$\rho_d = \rho_c^0 \frac{\Omega_d^0}{a^3}, \quad \rho_{r\nu} = \rho_c^0 \frac{\Omega_{r\nu}^0}{a^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_c^0 \Omega_\Lambda^0, \quad \rho_k = \rho_c^0 \frac{\Omega_k^0}{a^2}, \quad \Omega_\Lambda^0 = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}, \quad \Omega_k^0 = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}. \quad (53)$$

Сюда входят современные значения критической плотности  $\rho_c^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$  и функции Хаббла  $H_0$  (то есть постоянная Хаббла). Подставим эти выражения в формулы (35) для полной плотности и (47) для гравитационной плотности через их составляющие:

$$\rho_u = \frac{\rho_c^0}{a^4} (\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4), \quad \rho_g = \frac{\rho_c^0}{a^4} (2\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a - 2\Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (54)$$

Затем подставим полную плотность в уравнение (34):

$$H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{H_0^2}{a^4} (\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (55)$$

В качестве параметров в это уравнение входят только величины, относящиеся к данному моменту. При этом нефизическую величину  $\Omega_k^0$  можно исключить, воспользовавшись соотношением (51) при  $t = t_0$ .

Разделение переменных после извлечения корня дает

$$\frac{ada}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 dt. \quad (56)$$

Пределы интегрирования в интеграле по  $a$  могут быть различными, так как в общем случае подкоренное выражение, представляющее многочлен четвертой степени, может обращаться в нуль. Если этого не происходит, то эволюция масштабного множителя определяется уравнением, неявное решение которого представляется интегралом

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 t. \quad (57)$$

Радиус кривизны  $R$  или масштабный множитель  $a$  можно находить как функции времени  $t$  или в параметрическом виде, например, как функции  $R(\eta)$  и  $t(\eta)$  от параметра  $\eta$ , связанного со временем соотношением (20) и называемого конформным временем. Уравнения, связывающие  $a$  и  $\eta$ , выглядят так:

$$\frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \frac{H_0 R_0}{c} d\eta, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \frac{H_0 R_0}{c} \eta. \quad (58)$$

С помощью формулы для гравитационной плотности (54) перепишем также уравнение (33):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{H_0^2}{a^4} (2\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a - 2\Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (59)$$

10. *Случай плоских моделей.* В случае плоских моделей в (57) и (58) надо просто подставить  $\Omega_k^0 = 0$ . Однако тогда величина  $R_0$  неопределенна и не должна входить в величины, имеющие прямой смысл. Эту трудность можно преодолеть, просто положив  $R_0 = c/H_0$ . Тогда элемент размерного метрического расстояния выразится формулой

$$dl^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\chi^2 + \chi^2 d\omega^2], \quad d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (60)$$

Метрика плоского пространства-времени тогда запишется в виде

$$ds^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\omega^2]. \quad (61)$$

Для вновь определенной метрики из (58) находим

$$\frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = d\eta, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \eta. \quad (62)$$

Так как  $\Omega_{r\nu}^0 > 0$  и  $\Omega_d^0 > 0$ , то нули у многочлена, стоящего под корнем в знаменателе подинтегральной функции, возможны только при  $\Omega_\Lambda^0 < 0$ . Но отрицательные значения космологической постоянной означали бы не отталкивание, а дополнительное притяжение, что не представляет интереса для теории. Поэтому интеграл в (62) можно написать всегда.

Рассмотрим подробнее частные случаи общих уравнений, для которых получаются достаточно простые решения.

### § 3. Однокомпонентные модели

1. *Пылевидное вещество.* Получим решение, исходя из общего решения (57) и положив в нем  $\Omega_{\text{r}\nu}^0 = \Omega_{\Lambda}^0 = 0$ . При таких параметрах выражение под корнем в нуль не обращается, так что указанным решением можно воспользоваться.

Вид интеграла зависит от знака  $\Omega_{\text{d}}^0 - 1 = -\Omega_k^0$ , совпадающего со знаком  $k$ :

$$H_0 t = \int_0^a \sqrt{\frac{a}{\Omega_{\text{d}}^0 + (1 - \Omega_{\text{d}}^0)a}} da = \begin{cases} \frac{\sqrt{a[\Omega_{\text{d}}^0 + (1 - \Omega_{\text{d}}^0)a]}}{1 - \Omega_{\text{d}}^0} - \frac{\Omega_{\text{d}}^0}{(1 - \Omega_{\text{d}}^0)^{3/2}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1 - \Omega_{\text{d}}^0}{\Omega_{\text{d}}^0} a}, & k = -1, \\ \frac{2}{3} a^{3/2}, & k = 0, \\ \frac{\Omega_{\text{d}}^0}{(\Omega_{\text{d}}^0 - 1)^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{\Omega_{\text{d}}^0 - 1}{\Omega_{\text{d}}^0} a} - \frac{\sqrt{a[\Omega_{\text{d}}^0 + (1 - \Omega_{\text{d}}^0)a]}}{\Omega_{\text{d}}^0 - 1}, & k = 1, \end{cases} \quad (63)$$

где  $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ . Формула для  $k = 0$  получается как предельный случай двух других формул при  $\Omega_{\text{d}}^0 \rightarrow 1$ . Можно записать и единую формулу, если ввести общее обозначение  $\operatorname{arsn}_k$  для функций  $\arcsin$  при  $k = 1$  и  $\operatorname{arsh}$  при  $k = -1$ :

$$H_0 t = \frac{\sqrt{[\Omega_{\text{d}}^0 + (1 - \Omega_{\text{d}}^0)a]a}}{1 - \Omega_{\text{d}}^0} - \frac{\Omega_{\text{d}}^0 \operatorname{arsn}_k \sqrt{|1 - \Omega_{\text{d}}^0|a/\Omega_{\text{d}}^0}}{(1 - \Omega_{\text{d}}^0) \sqrt{|1 - \Omega_{\text{d}}^0|}}. \quad (64)$$

Для перехода к плоской модели требуется разлагать функции по малой разности  $|1 - \Omega_{\text{d}}^0|$  до третьего порядка малости.

В частности, при  $a = 1$ , что соответствует современной эпохе, находим возраст Вселенной согласно этой модели:

$$H_0 t_0 = \int_0^1 \sqrt{\frac{a}{\Omega_{\text{d}}^0 + (1 - \Omega_{\text{d}}^0)a}} da = \begin{cases} \frac{1}{1 - \Omega_{\text{d}}^0} - \frac{\Omega_{\text{d}}^0}{(1 - \Omega_{\text{d}}^0)^{3/2}} \operatorname{arsh} \sqrt{\frac{1 - \Omega_{\text{d}}^0}{\Omega_{\text{d}}^0}}, & k = -1, \\ \frac{2}{3}, & k = 0, \\ \frac{\Omega_{\text{d}}^0}{(\Omega_{\text{d}}^0 - 1)^{3/2}} \arcsin \sqrt{\frac{\Omega_{\text{d}}^0 - 1}{\Omega_{\text{d}}^0}} - \frac{1}{\Omega_{\text{d}}^0 - 1}, & k = 1. \end{cases} \quad (65)$$

Для записи параметрического решения введем обозначение

$$R_{\text{m}} = \frac{c}{2H_0} \frac{\Omega_{\text{d}}^0}{|\Omega_{\text{d}}^0 - 1|^{3/2}} = \frac{R_0^3 H_0^2}{2c^2}. \quad (66)$$

Физический смысл постоянной  $R_{\text{m}}$  вытекает из того, что масса пыли в шаре радиусом  $R$  не зависит от времени:

$$M_{\text{d}} = \frac{4\pi}{3} \rho_{\text{d}} R^3 = \frac{4\pi}{3} \frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_{\text{m}}^2} 2^3 R_{\text{m}}^3 = \frac{c^2}{G} R_{\text{m}}. \quad (67)$$

Из этого выражения следует, что потенциальная энергия тела массой  $m$  в гравитационном поле массы  $M_{\text{d}}$  на расстоянии  $R_{\text{m}}$

$$G \frac{mM_{\text{d}}}{R_{\text{m}}} = mc^2 \quad (68)$$

равна ее энергии покоя. Заметим, что удвоенное значение этого расстояния  $R_{\text{g}} = 2R_{\text{m}}$  называется гравитационным радиусом, отвечающим объекту массой  $M_{\text{d}}$ . На расстоянии гравитационного радиуса скорость убегания от такого объекта (вторая космическая) равна скорости света.

Зависимости величин, характеризующих модель, приведены в Табл. 1 и 2.

Т а б л и ц а 1. Эволюция радиуса кривизны в модели пылевидного вещества.

$k$	Время $t$	Радиус кривизны $R$	Скорость $\dot{R}$
1	$\frac{R_{\text{m}}}{c}(\eta - \sin \eta)$	$2R_{\text{m}} \sin^2 \frac{\eta}{2}$	$c \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2}$
0	$\frac{R_{\text{m}}}{c} \frac{\eta^3}{6}$	$\frac{R_{\text{m}} \eta^2}{2} = \left( \frac{9R_{\text{m}} c^2 t^2}{2} \right)^{1/3}$	$\frac{2c}{\eta}$
-1	$\frac{R_{\text{m}}}{c}(\operatorname{sh} \eta - \eta)$	$2R_{\text{m}} \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}$	$c \operatorname{cth} \frac{\eta}{2}$



Т а б л и ц а 2. Эволюция плотности и функции Хаббла в модели пылевидного вещества.

$k$	$H$	Плотность $\rho_d$	$\Omega_d = \rho_d/\rho_c$
1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\cos(\eta/2)}{\sin^3(\eta/2)}$	$\frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_m^2} \frac{1}{\sin^6(\eta/2)}$	$\frac{1}{\cos^2(\eta/2)}$
0	$\frac{c}{R_m} \frac{4}{\eta^3} = \frac{2}{3} \frac{1}{t}$	$\frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_m^2} \frac{64}{\eta^6}$	1
-1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\text{ch}(\eta/2)}{\text{sh}^3(\eta/2)}$	$\frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_m^2} \frac{1}{\text{sh}^6(\eta/2)}$	$\frac{1}{\text{ch}^2(\eta/2)}$

Приведенные формулы получаются при решении уравнения ньютоновского вида (31), где в случае пылевидного вещества масса строго постоянна. Решение сводится к одномерной задаче двух тел.

2. *Ультрарелятивистское вещество.* Поскольку пространство Вселенной расширяется, то раньше плотность материи была значительно выше, чем сейчас. Кроме того, на ранних стадиях расширения вещество было горячим. Поэтому имеет особый смысл рассмотреть ультрарелятивистский предел. Ультрарелятивистским всегда является излучение, поэтому рассмотрим эволюцию при  $\rho_d = \rho_\Lambda = 0$  и  $P_r = \rho_r c^2/3$ .

Из общего решения для случая  $\Omega_d^0 = 0$ ,  $\Omega_\Lambda^0 = 0$ ,  $\Omega_k^0 = 1 - \Omega_r^0$  получаем связь времени с масштабным множителем. При  $\Omega_r^0 \neq 0$  можно написать единую формулу

$$H_0 t = \int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_r^0 + (1 - \Omega_r^0)a^2}} = \frac{\sqrt{\Omega_r^0 + (1 - \Omega_r^0)a^2} - \sqrt{\Omega_r^0}}{1 - \Omega_r^0}. \quad (69)$$

При изменении знака разности  $1 - \Omega_r^0$  меняются знаки числителя и знаменателя. Неявную зависимость можно превратить в явную

$$a = \sqrt{H_0 t} \sqrt{2\sqrt{\Omega_r^0} + (1 - \Omega_r^0)H_0 t}, \quad \eta = \text{arsnk} \left( a \sqrt{\frac{|1 - \Omega_d^0|}{\Omega_d^0}} \right) = \text{arsnk} \frac{R}{2R_m}. \quad (70)$$

Для  $\Omega_r^0 \rightarrow 1$  предельным переходом получается

$$H_0 t = \frac{a^2}{2}, \quad a = \sqrt{2H_0 t}. \quad (71)$$

И здесь можно написать параметрическое решение. Для этого определим

$$R_m = 2 \frac{c}{H_0} \frac{\sqrt{\Omega_r^0}}{|1 - \Omega_r^0|} = R_0 \sqrt{\frac{\sqrt{\Omega_r^0}}{|1 - \Omega_r^0|}}. \quad (72)$$

Заметим, что сохраняющейся величиной является

$$W = 4\pi\rho_r R^4. \quad (73)$$

Параметрические зависимости тех же величин, что и в Табл. 1 и 2, для излучения приведены в Табл. 3 и 4. Они получаются из решения уравнения второго порядка и его следствия:

$$\ddot{R} = -\frac{2GW}{3R^3}, \quad \frac{\dot{R}^2}{2} = \frac{GW}{3R^2} - k \frac{c^2}{2}. \quad (74)$$

Т а б л и ц а 3. Эволюция радиуса кривизны при ультрарелятивистском веществе.

$k$	Время $t$	Радиус кривизны $R$	Скорость $\dot{R}$
1	$\frac{2R_m}{c}(1 - \cos \eta)$	$2R_m \sin \eta$	$c \text{ctg} \eta$
0	$\frac{2R_m}{c} \frac{\eta^2}{2}$	$2R_m \eta = (4R_m c t)^{1/2}$	$\frac{c}{\eta}$
-1	$\frac{2R_m}{c}(\text{ch} \eta - 1)$	$2R_m \text{sh} \eta$	$c \text{cth} \eta$

Т а б л и ц а 4. Эволюция плотности и постоянной Хаббла при ультрарелятивистском веществе.

$k$	$H$	$\rho_r$	$\Omega_r = \rho_r/\rho_c$
1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\cos \eta}{\sin^2 \eta}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\sin^4 \eta}$	$\frac{1}{\cos^2 \eta}$
0	$\frac{c}{2R_m} \frac{1}{\eta^2} = \frac{1}{2t}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\eta^4}$	1
-1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\text{ch} \eta}{\text{sh}^2 \eta}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\text{sh}^4 \eta}$	$\frac{1}{\text{ch}^2 \eta}$

3. Сравнение моделей пылевидного вещества и излучения. На рис. 1 приведены графики зависимостей радиуса кривизны (а), постоянной Хаббла (б), плотности (в) и отношения ее к критической (г) от времени  $t$  при трех типах моделей для пылевидного вещества. Все величины даны в относительных единицах, то есть приводятся  $R(\eta)/R_m$ ,  $2R_m H/c$  и логарифмы  $\lg \tilde{\rho} = \lg[(8\pi G/3)(4R_m^2/c^2)\rho_d]$ ,  $\lg \Omega_d$ . Время измеряется в единицах  $R_m/c$ . Кривая зависимости  $R$  от  $t$  при  $k = 1$  — это циклоида, которую описывают точки обода колеса при его качении по прямой.

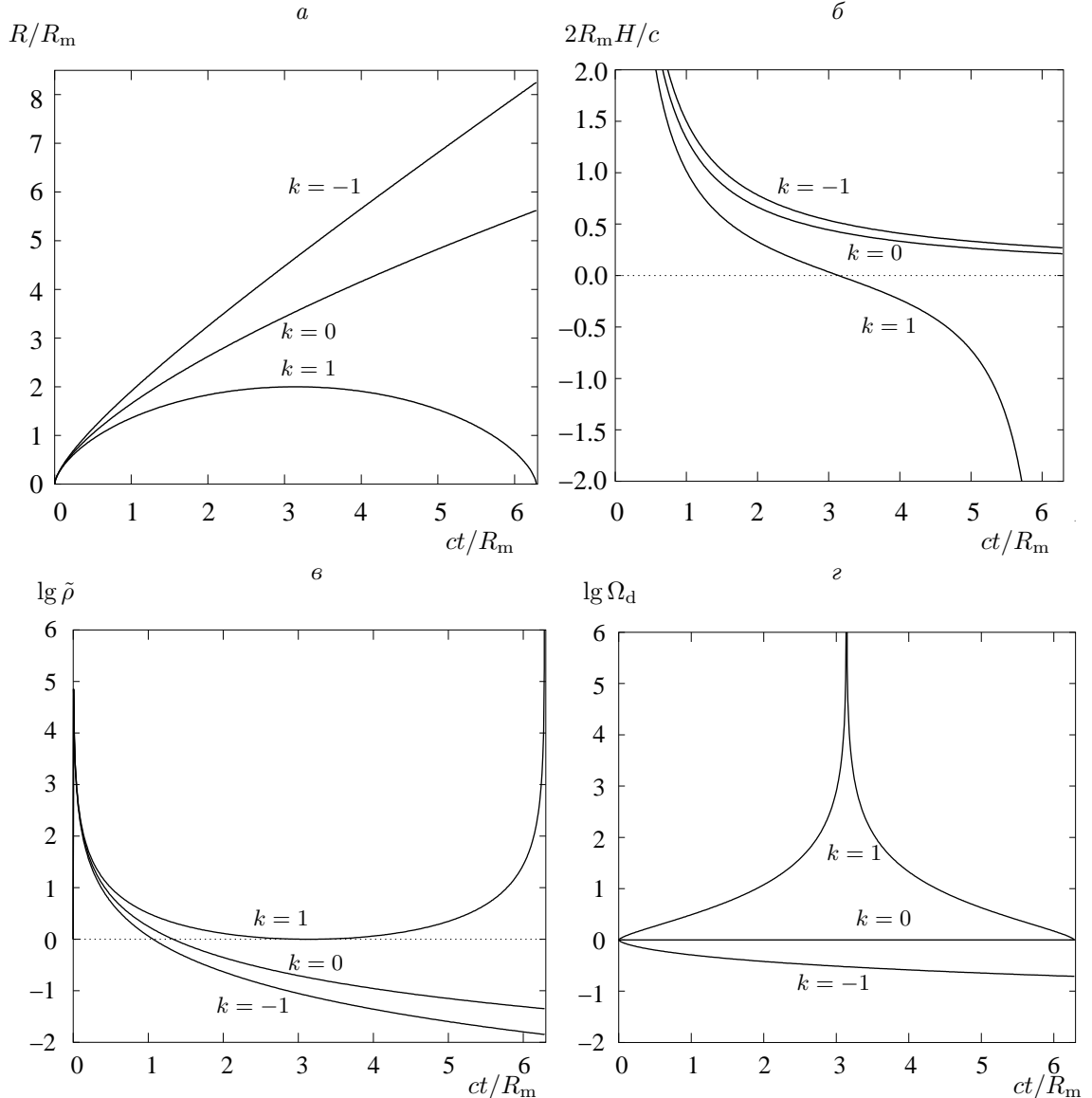


Рис. 1: Эволюция радиуса кривизны  $R$  (а), функции  $H$  (б), плотности  $\rho_d$  (в) и отношения  $\Omega_d$  (г) для моделей пылевидного вещества.

На рис. 2 приведены те же величины, что и на рис. 1, но для ультрарелятивистского вещества, то есть соответственно отношения  $R(\eta)/R_m$ ,  $2R_m H/c$  и логарифмы  $\lg \tilde{\rho} = \lg[(16\pi G/3)(4R_m^2/c^2)\rho_r]$ ,  $\lg \Omega_r$  как функции времени  $t$ , измеряемого в единицах  $2R_m/c$ . Напомним, что значения  $R_m$  для моделей с пылевидным и релятивистским веществом различаются.

Качественно решения для ультрарелятивистского и пылевидного вещества ведут себя одинаково, однако в закрытых моделях параметр  $\eta$  изменяется в разных пределах. Различаются и масштабы изменения времени.

Отметим, что закрытые модели выделяются своим поведением. Согласно этим моделям при достижении максимума радиуса кривизны постоянная Хаббла и критическая плотность обращаются в нуль ( $H$  меняет знак), а параметр  $\Omega$  в бесконечность. Кривые, относящиеся к открытым и плоским моделям, не являются периодическими и могут быть продолжены по времени сколь угодно далеко. Однако на ранних этапах расширения, то есть на малых временах  $t$ , ход изменения радиуса кривизны и плотности материи у моделей с разными значениями  $\Omega$  у обеих рассмотренных групп моделей очень близок.

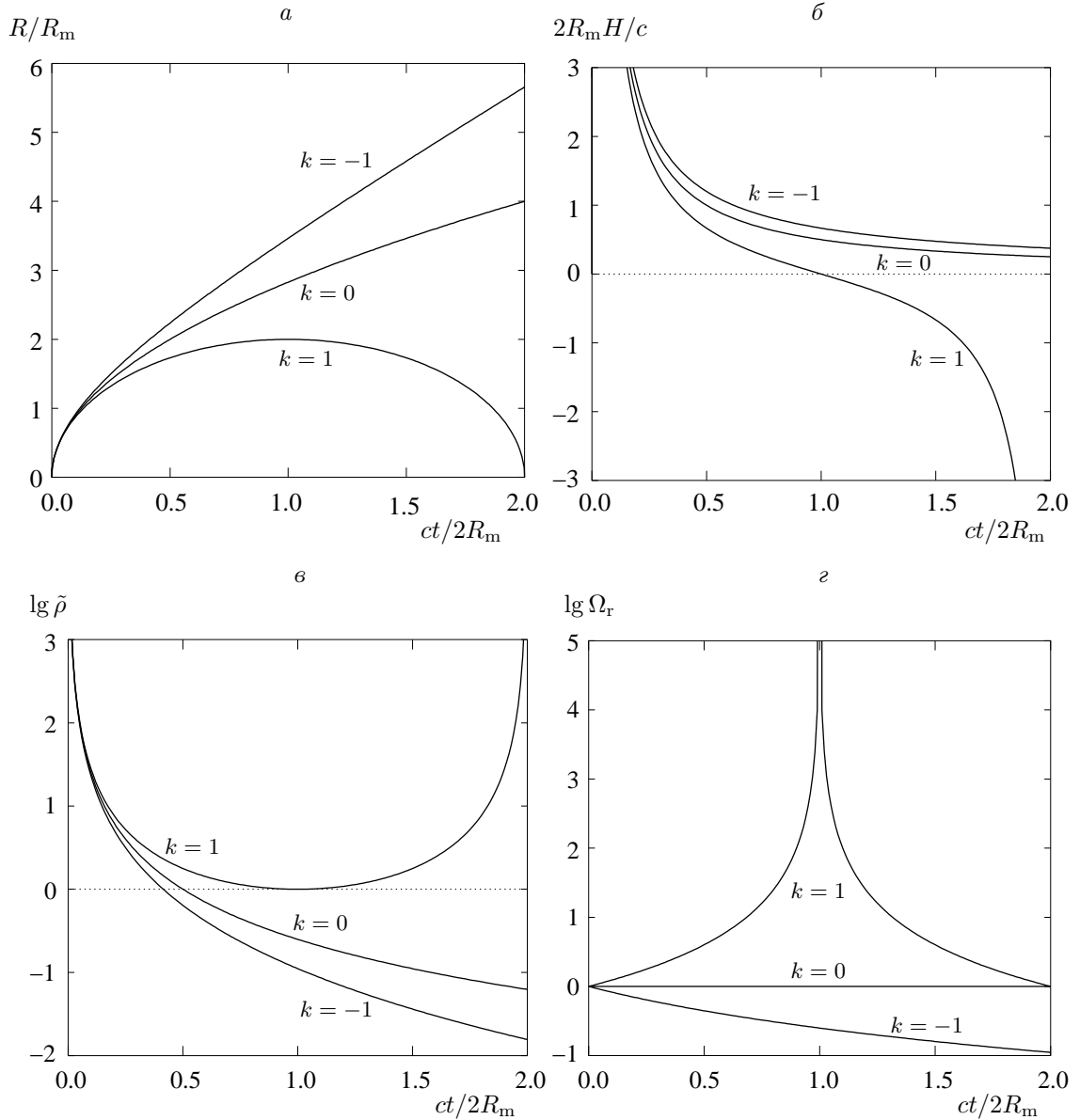


Рис. 2: Эволюция радиуса кривизны  $R$  (а), функции  $H$  (б), плотности  $\rho_r$  (в) и отношения  $\Omega_r$  (г) для моделей с излучением.

4. *Модели с космологическим слагаемым.* Как говорилось во Введении, это слагаемое первоначально было введено А. Эйнштейном для того, чтобы привести уравнения к виду, допускающему стационарные решения. При этом оно было помещено в левую часть его тензорного уравнения совершенно формально как средство противопоставить притяжению некоторое отталкивание. Потом, после открытия расширения Вселенной и тем самым ее нестационарности, А. Эйнштейн отказался от этого слагаемого, назвав его введение самой большой своей ошибкой. Действительно, компенсация достигается только при определенном значении  $R$  и вообще не

нужна. В разные периоды развития космологии космологическое слагаемое добавляли и отбрасывали, так что вопрос о нем оставался открытым.

Можно получить решения космологических уравнений, не приписывая определенного значения параметру  $\Lambda$ , а пытаясь найти его из наблюдений. В последнее время наблюдения с определенностью указывают на то, что эта постоянная отлична от 0. К этому мы еще вернемся.

Рассмотрим модель, если нет ни вещества, ни излучения, а есть только один вакуум, то есть в уравнении (22) справа присутствует одно космологическое слагаемое. Тогда это уравнение предстанет в виде

$$\ddot{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} R \text{ или } \ddot{R} = H_\Lambda^2 R, \quad H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c. \quad (75)$$

Заметим, что физический вакуум — это не просто пустота. Например, в квантовой электродинамике, описывающей процессы взаимодействия излучения с электронами, вакуум — это живая среда, реально проявляющаяся в теории и эксперименте. Его воздействием объясняется, например, так называемый лембовский сдвиг (1058 МГц), то есть увеличение энергии уровня  $2S_{1/2}$  атома водорода на 1041 МГц и уменьшение энергии уровня  $2P_{1/2}$  на 17 МГц по сравнению с их общей величиной энергии, определяемой по теорией тонкой структуры Дирака.

Общее решение уравнения (75)

$$R = R_+ e^{H_\Lambda t} + R_- e^{-H_\Lambda t}. \quad (76)$$

Такое решение позволило в конце 70-х и начале 80-х годов двадцатого века построить теорию космологической инфляции, согласно которой сразу после начала расширения происходило экспоненциальное расширение пространства, а в самом конце этого века было открыто, что и сейчас расширение происходит с ускорением.

## Глава II. Излучение в космологии

### § 1. Распространение излучения

1. *Движение излучения в пространстве и понятие горизонта.* Рассмотрим эффекты, связанные с распространением излучения в искривленном и расширяющемся пространстве.

Траектория фотона в трехмерном пространстве определяется, как и в обычной теории относительности, тем, что вдоль нее  $ds = 0$  ( $ds$  берем в виде (21)).

Пусть фотон в трехмерном пространстве летит по лучу, исходящему из точки, где находится наблюдатель. Поместим в нее начало координат. Луч задается тем, что вдоль него постоянны углы  $\theta$  и  $\phi$ , то есть  $\theta = \theta_0$ ,  $\phi = \phi_0$ , так что  $d\theta = d\phi = 0$ . Следовательно, для такого фотона

$$d\eta^2 = d\chi^2, \quad d\chi = \pm d\eta, \quad (77)$$

так что уравнения его траектории в принятых координатах

$$\theta = \theta_0, \quad \phi = \phi_0, \quad \chi = \pm \eta + \text{const}. \quad (78)$$

Знак плюс отвечает фотону, удаляющемуся от начала координат, так как с ростом времени растет и координата, а минус — движущемуся к началу.

Если фотон доходит до наблюдателя, где  $r=0$ ,  $\chi=0$ , в момент  $t_0 = t(\eta_0)$ , то распространение такого фотона определяется уравнением  $\chi = \eta_0 - \eta$ . Этот фотон был испущен в некоторый момент  $\eta_e$ , где  $0 \leq \eta_e \leq \eta_0$ , в точке пространства, имеющей координату  $\chi_e = \eta_0 - \eta_e$ . Рассуждение не изменится, если считать, что фотон излучился в другой точке на луче в направлении на наблюдателя и пришел в точку с координатой  $\chi_e$  в момент  $\eta_e$ .

Мы видим прошлое Вселенной, тем более отдаленное по времени от настоящего момента, чем более далекие области Вселенной мы наблюдаем.

Ясно, что в соотношении  $\chi_e = \eta_0 - \eta_e$  величина  $\chi_e \leq \eta_0$  и расстояние от места возникновения фотона не может отстоять от точки наблюдения сколь угодно далеко. Фотон, излученный в начальный момент  $\eta = \eta_e = 0$  в сторону наблюдателя, находящегося в точке  $\chi = 0$ , может дойти до него в момент  $t_0 = t(\eta_0)$  только с поверхности сферы, точки которой имели (в тот же начальный момент) координату  $\chi_0 = \eta_0$ . Поскольку координата  $\chi$  точек пространства при его расширении не изменяется, то в каждый момент времени  $t(\eta_0)$  существует сфера, ограничивающая область пространства, из которой доходит излучение в данную точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от точек этой сферы. Эта сфера называется в космологии горизонтом. Вся остальная часть Вселенной наблюдениям принципиально недоступна.

Вывод о существовании горизонта не зависит от вида метрики пространства, то есть от типа кривизны. Видимая в данный момент часть пространства всегда имеет конечный объем (см. подробнее ниже). Так как параметр  $\eta_0$  с течением времени увеличивается, то горизонт расширяется, аналогично горизонту на Земле с увеличением высоты наблюдателя над поверхностью Земли.

2. *Красное смещение в космологии.* Радиус кривизны, расстояние до горизонта и связанные с ними величины не могут быть непосредственно наблюдаемы. Поэтому особенный интерес представляют величины, доступные наблюдениям.

Одна из таких величин — красное смещение. Фотон, излученный в момент  $t_e = t(\eta_e)$  в точке с координатой  $\chi_e$ , согласно (78) дойдет до наблюдателя в точке  $\chi = 0$  в момент  $t_0 = t(\eta_0)$ , где

$$\eta_0 = \eta_e + \chi_e. \quad (79)$$

Свяжем с моментом  $t_e$  произвольный гребень излучаемой электромагнитной волны. Пусть следующий гребень покидает точку излучения в момент  $t_e + \tau_e$  и приходит к наблюдателю в момент  $t_0 + \tau_0$ , то есть через периоды колебаний волны, соответствующие точкам излучения и наблюдения. Эти периоды на много порядков меньше характерного времени расширения пространства. Поэтому можно считать, что периоды бесконечно малы, а радиус кривизны за время, равное периоду волны, не меняется, так что  $t_e + \tau_e = t(\eta_e + d\eta_e) = t_e + R(\eta_e)d\eta_e/c$  и  $t_0 + \tau_0 = t(\eta_0 + d\eta_0) = t_0 + R(\eta_0)d\eta_0/c$ . Так как точки излучения и наблюдения фиксированы, то  $\chi_e = \text{const}$  и согласно (79)  $d\eta_0 = d\eta_e$ . Поэтому

$$\frac{\tau_0}{\tau_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(\eta_0)}{R(\eta_e)} = \frac{R_0}{R_e} = 1 + z. \quad (80)$$

Здесь наряду с соотношением для периодов написаны соотношения для частот ( $\nu_e$  и  $\nu_0$ ) и длин волн ( $\lambda_e$  и  $\lambda_0$ ) фотона, испущенного в точке с координатой  $\chi_e$  и наблюдаемого в начале координат. Введена также величина  $z$ , называемая красным смещением. Очевидно, что  $z \geq 0$ , так как в настоящее время происходит уменьшение частоты вследствие расширения пространства. Конечно, строго говоря, в красную сторону смещается только излучение с исходным спектром, имеющим частоты, большие, чем красный конец спектра, однако термин, исторически возникший по отношению к оптическому диапазону, применяется ко всему спектру.

3. *Различные типы расстояний в космологии.* Понятие расстояния, очевидное в случае евклидовой геометрии пространства, допускает неоднозначное толкование в искривленном и расширяющемся пространстве. Приведем несколько типов расстояний, различно определяемых.

1) Самое простое понятие — это расстояние между двумя точками на одном луче зрения ( $\theta = \theta_0$ ,  $\phi = \phi_0$ ) с координатами  $\chi_1$  и  $\chi_2 > \chi_1$  в один и тот же момент времени  $t = t(\eta)$ . Его естественно назвать метрическим расстоянием, так как его выражение непосредственно следует из метрики (21):

$$l = R(\eta) \int_{\chi_1}^{\chi_2} d\chi = R(\eta)(\chi_2 - \chi_1). \quad (81)$$

Если одна точка совмещена с наблюдателем, а координата другой  $\chi$ , то метрическое расстояние точки от наблюдателя

$$l = R(\eta)\chi. \quad (82)$$

Это расстояние уже было использовано. Заметим также, что расстояние до горизонта в момент  $t = t(\eta)$  равно

$$l_{\text{Hor}} = R(\eta)\eta. \quad (83)$$

Конечен и радиус горизонта и объем пространства, которое доступно наблюдению.

Метрическое расстояние — основное, но не единственное понятие расстояния. Остальные расстояния определяются так: находится выражение для некоторой зависящей от расстояния величины в условиях расширяющегося и искривленного пространства. Это выражение приравнивается к тому выражению, которое бы имела та же величина в стационарном плоском пространстве.

2) Расстояние по видимому размеру. Пусть к наблюдателю (в точку  $r = 0$  с координатой  $\chi = 0$ , рис. 3а) приходят одновременно (в момент  $t_0$ ) два фотона, испущенных в одно и то же время  $t_e = t(\eta_e)$  из двух бесконечно близких точек с одинаковыми координатами  $\chi_e$ . Расстояния до этих точек также одинаковы. Для обоих фотонов выполняется уравнение  $\chi = \eta_0 - \eta$ . Квадрат элемента линейного расстояния между точками согласно формуле (16) при  $d\chi = 0$

$$dD_{\text{ad}}^2 = R^2(\eta) \text{sn}_k^2(\chi) d\omega^2. \quad (84)$$

При движении фотонов по лучу зрения их координаты  $\theta$  и  $\phi$  не меняются, так что не меняется видимое угловое расстояние между точками испускания  $d\omega$ , то есть его можно определять в любое время между моментами  $t_e$  и  $t_0$ . Например, это может быть угловой размер некоторого объекта. В обычном пространстве линейный размер объекта, находящегося на расстоянии  $l_{\text{ad}}$ , был бы  $dD^2 = l_{\text{ad}}^2 d\omega^2$ . Таким образом, расстояние по видимому размеру (или угловому диаметру) определяется так:

$$l_{\text{ad}} = R(\eta) \text{sn}_k(\chi) = R(\eta_0 - \chi) \text{sn}_k(\chi). \quad (85)$$

3) Расстояние по параллаксу. Пусть теперь на одинаковом расстоянии от некоторой точки расположены две другие точки. Им можно приписать одинаковые координаты  $\chi$ . Отрезок между этими точками принимается за

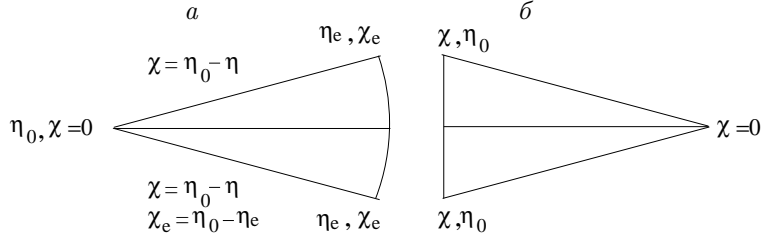


Рис. 3: Расстояния а) по угловому размеру, б) по параллаксу.

удвоенный базис (рис. 3б). Средняя линия между линиями, соединяющими точки с началом, перпендикулярна базису. Угол между средней линией и направлениями на концы базиса называется параллаксом исходной точки. Например, суточный параллакс точки (или объекта) — это угол, под которым из этой точки виден базис — радиус Земли, а годичный — радиус земной орбиты.

Пусть из начала координат одновременно исходят два фотона, принимаемые на концах двойного базиса. Пусть фотоны зарегистрированы в момент  $t_0 = t(\eta_0)$ . Рассуждая так же, как и выше, найдем, что

$$l_{pl} = R(\eta_0) \operatorname{sn}_k(\chi) = R_0 \operatorname{sn}_k(\chi). \quad (86)$$

Это просто радиус сферы, на которую расходятся вышедшие из одной точки фотоны.

4) Расстояние по числу фотонов. Параллаксом определяется телесный угол, в который фотоны испускаются точечным источником. Поэтому параллактическое расстояние определяет площадь сферы, точки которой удалены на одно и то же расстояние от точки испускания и проходящей через точку наблюдения. Если число фотонов, испускаемых некоторым изотропным источником в единицу времени, равно  $N_{ph}$ , то количество фотонов, приходящих на единицу поверхности в единицу времени к наблюдателю, будет (время источника и время наблюдателя текут по-разному, так что и их единицы различны)

$$\tilde{N}_{nb} = \frac{N_{nb}}{4\pi l_{pl}^2 [R_0/R]} = \frac{N_{nb}}{4\pi l_{nb}^2}. \quad (87)$$

Множитель в квадратных скобках в знаменателе первой дроби учитывает различие хода времени наблюдателя и источника  $dt_0/dt$ , что согласно соотношению (20) равно отношению соответствующих значений радиуса кривизны. Таким образом, расстояние по числу фотонов

$$l_{nb} = l_{pl} \sqrt{\frac{R_0}{R}}. \quad (88)$$

5) Расстояние по болометрической яркости или фотометрическое. При распространении в расширяющемся пространстве все фотоны изменяют свои частоты: частоты принимаемых фотонов в  $R(\eta_0)/R(\eta)$  раз меньше, чем у исходных. Поэтому регистрируемая в точке наблюдения яркость объекта, то есть часть его полной (болометрической) энергии, дошедшая до наблюдателя, окажется уменьшенной в  $(dt_0/dt)^2$  раз, так что соответствующее расстояние

$$l_{bb} = l_{nb} \sqrt{\frac{R_0}{R}}. \quad (89)$$

Все масштабы в трехмерном пространстве в определенный момент времени пропорциональны радиусу кривизны в тот же момент.

Каждое из введенных здесь расстояний изменяется в соответствии с величиной, по которой оно определяется. Поскольку эти величины изменяются по-разному, соответствующие расстояния также различаются. Легко заметить, что они связаны равенствами

$$l_{bb} = l_{nb} \sqrt{\frac{R_0}{R}} = l_{pl} \frac{R_0}{R} = l_{ad} \left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = R_0 \frac{R_0}{R} \operatorname{sn}_k(\chi). \quad (90)$$

В этой цепочке равенств каждое следующее расстояние меньше предыдущего. Так как отношение  $R_0/R = 1 + z$ , то все введенные расстояния можно выразить через красное смещение.

Отдельного обсуждения требует расстояние по видимому размеру. Очевидно, что при  $\chi = 0$  второй, а при  $\chi = \eta_0$  первый множители обращаются в нуль, то есть в месте наблюдения, как и все расстояния, это расстояние равно нулю. Но  $l_{ad} = 0$  и на горизонте. Так как в промежуточных точках оно положительно, должен существовать максимум этого расстояния. Расстояние сначала увеличивается, а после максимума уменьшается. Парадоксальное на первый взгляд обстоятельство, следующее из приведенных рассуждений, означает, что

угловой размер объектов одинакового линейного размера с удалением от наблюдателя сначала уменьшается, а затем начинает увеличиваться. Понять это можно, исходя из аналогии с передвижением дуги большого круга одного линейного размера вдоль меридиана на сфере. Действительно, пусть дуга размером  $2R\phi_0$  (с небольшим  $\phi_0$ ) передвигается по сфере радиуса  $R$  вдоль меридиана. Тогда, как нетрудно вывести, она при расположении ее середины в точке  $(R \sin \theta_0, 0, R \cos \theta_0)$  с полюса будет видна под углом

$$\Theta_{\text{ad}} = 2 \arcsin \frac{\sin \phi_0}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_0 \cos^2 \phi_0}}. \quad (91)$$

При  $\theta_0 = 0$  этот угол равен  $\pi$ , затем он уменьшается, при  $\theta_0 = \pi/2$  достигает минимума  $2\phi_0$ , а потом снова растет до исходного значения. Причина здесь заключается в том, что к полюсам меридианы сближаются.

Смена первоначального уменьшения угла, под которым виден объект одного линейного размера, ростом в космологии объясняется тем, что отдаленным областям пространства соответствуют более ранние эпохи расширения Вселенной, когда ее масштабы были меньше, так что лучи, между которыми заключен угол, располагались ближе друг к другу, аналогично меридианам у полюсов.

Не все расстояния используются одинаково часто. Наиболее употребительны помещенные здесь под номерами 2), 3) и 5) наряду с метрическим расстоянием, определенным равенством (81).

## § 2. Наблюдаемое расширение Вселенной

1. *Три формулировки соотношений Хаббла.* Как уже говорилось выше, в 1929 году Э. Хаббл опубликовал свое открытие, заключающееся в том, что скорости внегалактических туманностей, на самом деле являющихся галактиками, пропорциональны расстоянию до них, то есть

$$v = H_0 l. \quad (92)$$

Фактически, измерялись красные смещения линий в спектрах этих галактик. Наряду с собственными наблюдениями на 2.5-метровом телескопе обсерватории Маунт Вилсон Хаббл использовал измерения  $z$  других наблюдателей. Наибольшее значение красного смещения в его данных было  $z = 0.004$ . Красные смещения линий Хаббл перевел в скорости, как это обычно делается до сих пор по отношению, например, к звездным спектрам, исходя из соотношения

$$\frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{v}{c} = \tilde{v}. \quad (93)$$

Отсюда с учетом определения (80) следует, что

$$\frac{v}{c} = \tilde{v} = z. \quad (94)$$

Принятые во внимание Хабблом галактики имели скорости, не превосходящие 1200 км/с.

Конечно, из приведенных соотношений вытекает, что

$$z = \frac{H_0}{c} l. \quad (95)$$

Расстояния до галактик Хаббл определил в несколько этапов. До ближайших галактик расстояния Хаббл удалось найти, обнаружив в них несколько цефеид. В этих же ближайших галактиках были определены светимости других, более ярких объектов — шаровых скоплений, которые видны также в галактиках близкого к нам скопления Девы. Относительные расстояния до далеких (по понятиям тех времен) скоплений Хаббл определял, считая, что пятое по яркости галактики в скоплении имеют одинаковую светимость. Тем самым удалось построить шкалу расстояний. В результате было найдено, что  $H_0 \approx 500$  км/(с Мпк), где 1 Мпк (мегапарсек) =  $3.086 \cdot 10^{24}$  см.

Сам Хаббл и все космологи сразу же интерпретировали скорость в соотношении (92) как скорость разбегания галактик. Это следовало из толкования красного смещения как следствия эффекта Доплера.

Таким образом, имеется три формулировки закона Хаббла. Две из них независимы, третья — их следствие.

Заметим, что Хаббл завысил значение постоянной  $H_0$ . Он принял за звезды объекты гораздо большей светимости, которые впоследствии были обнаружены методами радиоастрономии и получили название областей III (ионизованного водорода). Завышение светимости привело к занижению расстояния и тем самым к завышению  $H_0$ . Только в 50-е годы ошибка была обнаружена и исправлена А. Сэндиджем.

2. *Интерпретация связи скорости с расстоянием.* Проще всего объясняется соотношение (92). В произвольный момент это соотношение следует записать так:

$$v = Hl. \quad (96)$$

Скорость интерпретируем как изменение со временем метрического расстояния, формула для которого (82) была приведена выше. Дифференцируем ее по времени. При этом координата  $\chi$  жестко скреплена с объектом и не меняется со временем. Получается

$$\dot{l} = \dot{R}(\eta)\chi. \quad (97)$$

Исключив из двух равенств координату  $\chi$  и вспомнив определение функции Хаббла (38), получим (96).

Скорость, вычисленная как произведение  $Hl$  согласно формуле (96), начиная с некоторого расстояния превосходит скорость света. Расстояние, на котором она равна скорости света, называется хаббловским расстоянием. В произвольный момент и в настоящую эпоху это расстояние

$$l_H = \frac{c}{H}, \quad l_H^0 = \frac{c}{H_0}. \quad (98)$$

Через него современный закон Хаббла записывается в виде

$$v = c \frac{l}{l_H^0}. \quad (99)$$

Что касается сверхсветовых скоростей — это скорости расширения пространства, а не скорости движения тел в пространстве. Поэтому нет ничего страшного в сверхсветовых скоростях этого расширения и нет противоречия с теорией относительности. Никакие сигналы с такими скоростями при этом не передаются.

В отличие от точного соотношения (96) два других являются приближенными.

3. *Связь скорости с красным смещением.* В отличие от своего следствия (96) равенство (95) не является точным. Действительно, будем исходить из той же формулы (96), связывающей скорость расширения с расстоянием до сопутствующего тела. Для упрощения выкладки для всех величин кроме красного смещения, относящихся к моменту наблюдения  $t_0 = t(\eta_0)$ , будем использовать обозначения с ноликом, а для относящихся к моменту выхода фотона  $t_e = t(\eta_e)$  из источника используем индекс  $e$ . Без индекса обозначаются переменные, по которым ведется дифференцирование и интегрирование (для красного смещения приходится ставить штрих). Соответственно имеем ряд переменных со следующими связями:

$$\chi = \eta_0 - \eta, \quad \chi_e = \eta_0 - \eta_e, \quad d\chi = -d\eta, \quad d\eta = c \frac{dt}{R(\eta)} = c \frac{dR}{R} \frac{dt}{dR}. \quad (100)$$

Интеграл, который входит в формулу (81), определяющую расстояние  $l$ , не зависит от времени. Его можно преобразовать следующим образом:

$$\chi_e = \int_0^{\chi_e} d\chi = \int_{\eta_e}^{\eta_0} d\eta = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(\eta(t))} = c \int_{R_e}^{R_0} \frac{dR}{R\dot{R}} = c \int_{R_e}^{R_0} \frac{dR}{HR^2} = \frac{c}{R_0} \int_{R_0}^{R_e} \frac{d(R_0/R)}{H} = \frac{c}{R_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (101)$$

Здесь  $\eta(t)$  — функция, обратная по отношению к  $t(\eta)$ . Использовано также соотношение (80) между радиусами кривизны и красным смещением. В результате получаем связь скорости с красным смещением

$$v = \dot{R}_0 \int_0^{\chi_0} d\chi = cH_0 \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (102)$$

Подставив эту связь в формулу (96), найдем соотношение между расстоянием и  $z$ :

$$l = c \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (103)$$

Вычисление интеграла надо производить после принятия конкретной модели.

4. *Интерпретация соотношения (102).* Во многих руководствах по космологии, не говоря уже о популярных изданиях, равенство (95) связывают с продольным эффектом Доплера, так как этот эффект всем известен. Согласно этому эффекту частота фотона при излучении его удаляющимся со скоростью  $v$  источником уменьшается на множитель

$$1 + z = \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}}, \quad (104)$$

откуда

$$\tilde{v} = \frac{v}{c} = z \frac{2 + z}{2 + 2z + z^2}. \quad (105)$$



Как показывает вывод равенства (102), в космологии дело обстоит по-другому. Действительно, эффект Доплера описывает изменение частоты при движении излучающего источника в пространстве-времени Минковского с евклидовым трехмерным пространством. Частота фотона (или волны) изменяется одномоментно, непосредственно при излучении, затем фотон движется без изменения частоты. Космологические же модели соответствуют расширяющемуся пространству, так что частота фотона уменьшается в каждой точке его пути от источника до наблюдателя. Поэтому классический эффект Доплера зависит только от относительной скорости источника и наблюдателя, а космологическое красное смещение — от расстояния, пройденного фотоном, а через него и от скорости удаления источника.

Различие формул (102) и (105) проявляется в следующем. Во-первых, согласно формуле эффекта Доплера скорость не может превосходить скорость света, а в космологии это осуществляется. Во-вторых, формула (105) универсальна, то есть скорость и красное смещение связаны однозначно. Соотношение же (102), как говорят, модельно зависимо, так как для вычисления интеграла необходимо знать функцию  $H(t(z))$ , которая определяется только после принятия определенной космологической модели. Летящий фотон относительно каждой точки, в которой он в данный момент находится, летит со скоростью света, а точка удаляется от наблюдателя, при этом скорость ее удаления определяется моделью. Конечно, при желании и это явление можно назвать каким-то обобщенным или кумулятивным эффектом Доплера (хотя непонятно, как можно эту кумулятивность продемонстрировать), но не классическим.

Однако если  $z$  мало и зависимость  $H$  от  $z$  можно пренебречь, то соотношение (102) переходит в равенство (93), которое при малых  $z$  тождественно равенству (105), а формула (103) совпадает с исходным законом (95), так что в приближении малых (по космологическим масштабам) расстояний закон (95) выполняется и интерпретация красного смещения как эффекта Доплера возможна.

## Глава III. Наиболее адекватная (Стандартная) космологическая модель

### § 1. Проблема выбора модели

1. *О космологических тестах.* Для выбора модели, наиболее близкой к реальной Вселенной, необходимо работать и применять методы, которые называются космологическими тестами. Отметим некоторые возможные варианты.

Казалось бы выбрать наиболее подходящую модель довольно просто. Надо для сферы, точки которой находятся на некотором расстоянии  $l$  от наблюдателя, измерить длину ее окружности  $2\pi r$  или ее площадь  $4\pi r^2$  и сравнить результаты с теми, которые справедливы для плоского пространства  $2\pi l$  и  $4\pi l^2$ . Если окажется, что  $l > r$ , значит пространство замкнутое, если  $l < r$  — открытое, ну а если  $l = r$ , то плоское. Именно измерения длин на поверхности Земли методом триангуляции позволили в XVII–XIX веках окончательно убедиться в том, что Земля очень близка к шару, и уточнить ее форму и размеры.

Однако, такой способ не дает никаких результатов по отношению к космосу, так как радиус кривизны, даже если он конечен, настолько велик, что пространство с большой степенью точности можно считать плоским. Ведь даже земная поверхность долгое время человечеству представлялась плоской. Для выяснения геометрии космического пространства приходится привлекать не столь прямые (геометрические) методы.

Другой прямой метод заключается в измерении плотности массы и сравнении ее с критической плотностью.

Долгое время астрономы, да и вообще человечество, думали, что основная масса Вселенной заключена в звездах, так как массы планет, спутников, комет и других тел Солнечной системы, а следовательно, и подобных тел в звездных системах, значительно меньше. Уже в XX веке выяснилось, что кроме звезд в Галактике имеется диффузное вещество, образующее светлые и темные туманности, газовые и пылевые. Однако, все это вещество не может объяснить кривые вращения нашей Галактики и других галактик. Скорости вращения должны были бы быстро уменьшаться с приближением к краям галактик, чего не наблюдается. Это истолковывается так, что в периферийных областях галактик имеется несветящаяся, темная материя (dark matter) и тем самым скрытая масса. Массу всех этих составляющих также надо учитывать.

Массы близких галактик определяют по кинематике звезд, основываясь на моделях звездной динамики. По ним устанавливаются средние значения для разных типов галактик. Затем рассчитывают общую массу видимых галактик и среднюю плотность их массы.

Если принимать во внимание только видимые части галактик, то есть светящееся вещество, то получается  $\Omega_{\text{vis}}^0 = 0.012$ . Добавление темного вещества, обеспечивающего правильные кривые вращения, увеличивает критический параметр до  $\Omega_{\text{gal}}^0 = 0.04 \div 0.05$ .

Следующий шаг — оценка масс скоплений галактик. Если допустить, что скопления галактик являются гравитационно связанными и для них выполняется теорема вириала, то оказывается, что масса скоплений также превышает массу составляющих его галактик. Добавление этой вириальной массы приводит к значению  $\Omega_{\text{cls}}^0 = 0.25$ . Очевидно, до замкнутой или даже плоской модели все это не дотягивает.

В настоящее время принято, что барионная составляющая Вселенной, то есть фактически нуклоны, вносит в плотность массы  $\rho_{\text{b}}^0 = 2 \cdot 10^{-31}$  г/см<sup>3</sup>, что соответствует плотности числа нуклонов  $\rho_{\text{b}}^0/m_{\text{n}} = 1.2 \cdot 10^{-7}$  1/см<sup>3</sup> и  $\Omega_{\text{b}} = 0.025$ . (Напомним, что барионами называются адроны с полуцелым спином: нуклоны, гипероны и так

называемые резонансы. Адроны — общее название семейства частиц, участвующих в сильном взаимодействии. Наряду с барионами это семейство содержит пи-мезоны.)

В связи с вопросами о кривых вращения галактик и устойчивости их скоплений, а также замкнутости или открытости Вселенной возникает проблема скрытой массы, то есть природы темного вещества, которое не светится и мы его не видим. Обсуждались многие возможности. Это могла бы быть барионная материя в виде многочисленных слабых и недоступных наблюдениям нейтронных звезд и потухших звезд (коричневых или бурых карликов), тел типа планет и др. Такая возможность отвергается, так как не наблюдается микролинзирование на таких телах. Это могли бы быть нейтрино с ненулевой массой, однако их масса, даже если она не равна 0, столь мала, что почти не влияет на среднюю плотность. Предполагаются также особые элементарные частицы (аксионы, нейтралино, фотино и др.), пока не наблюдавшиеся ни в лаборатории, ни в космосе, или первичные черные дыры малых масс. Проблема остается нерешенной, ей посвящается много работ физиков и астрофизиков. Попытки обнаружить присутствие темного вещества в пределах Солнечной системы результатов не дали.

2. *Классические тесты.* К ним относится прежде всего тест видимая звездная величина - красное смещение.

Пусть галактика имеет координату  $\chi$  по отношению к нам и светимость (то есть полную мощность излучения)  $L$ . Мы ее наблюдаем в момент  $t_0 = t(\eta_0)$ . Тогда площадь сферы, на которую растекается излучение этой галактики, равна  $4\pi R_0^2 \text{sn}_k^2(\chi)$ . Энергия излучения, испускаемого источником, в данном случае галактикой, как указывалось выше, ослабляется за счет уменьшения энергий (частот) всех фотонов в результате красного смещения в  $1+z$  раз и на тот же множитель за счет того, что отдельные фотоны реже приходят к наблюдателю, так как время наблюдателя и время источника текут по-разному.

Таким образом, видимая полная светимость галактики с единицы площади неба

$$\tilde{L} = \frac{L}{4\pi R_0^2 \text{sn}_k^2(\chi)(1+z)^2}. \quad (106)$$

Эта величина и есть видимая болометрическая яркость, о которой говорилось выше.

Наблюдая далекие галактики и измеряя их видимые звездные величины, а затем переводя их в светимости (хотя бы относительные), а также определяя их красные смещения, строят наблюдаемую зависимость. Рассчитав эту зависимость согласно выбранной модели и сравнив ее с наблюдаемой, можно оценить пригодность модели.

Однако для этого опять надо знать настоящую светимость галактики, то есть выбрать стандартную свечу. На практике в качестве стандартной свечи выбирались либо вторая, либо пятая по яркости галактика в скоплении. На этом пути оказываются значительные трудности. Одна из них — это неопределенности в теории, описывающей эволюцию галактик и, в частности, эволюцию их светимости. Другая трудность заключается в том, что при выборе стандартной свечи в удаленном скоплении галактик легко ошибиться. Сама идея, что галактики определенного номера по порядку светимости светят одинаково, не имеет глубокого основания.

Согласно двум исследованиям этого теста либо  $\Omega_0 = 2 \pm 2$ , либо  $\Omega_0 = 0.66 \pm 1.36$ . Улучшить результаты удалось в последние годы, но не по галактикам, о чем скажем ниже.

Второй классический тест заключается в измерении угловых диаметров источников в зависимости от их красных смещений.

Если источники имеют одинаковый размер  $D$ , то их видимый угловой диаметр

$$\vartheta = \frac{D}{l_{\text{ад}}}, \quad (107)$$

где расстояние  $l_{\text{ад}}$  дается формулой (85). И эту зависимость можно рассчитать, например, пользуясь связью между расстояниями (89).

В качестве источников одного размера брали ядра богатых скоплений галактик. Этот тест мог бы предоставить независимую возможность выбрать модель, причем с использованием более удаленных объектов: не галактик, а их скоплений. Однако и здесь возникают трудности, аналогичные уже упомянутым, и улучшить результат не удается.

3. *Современная диаграмма Хаббла.* В последнее время в связи с технологическим прогрессом появилась возможность наблюдать более слабые, а следовательно, более далекие объекты, чем ранее. В качестве стандартной свечи были выбраны сверхновые звезды типа Ia. Эти звезды вспыхивают в двойных системах, состоящих из белого карлика и обычной звезды. На белый карлик натекает вещество звезды и, когда его масса вместе с натекающим веществом превосходит предел Чандрасекара, происходит взрыв. Из-за близости исходной при взрыве массы кривые блеска и, что более важно, светимости в максимуме блеска сверхновой очень близки. Точнее, светимость в максимуме и скорость спада блеска довольно жестко связаны. Даже если пропускается момент максимума, скорость спада светимости определяется надежно. Следовательно, оказывается возможным довольно уверенно оценить светимость в максимуме и построить абсолютную кривую блеска. Светимость этих сверхновых не зависит от возраста галактики. Впрочем, работы по уточнению деталей взрывов и кривых блеска продолжаются.

Привлечение новой стандартной свечи позволило не только приблизиться к определению геометрии пространства, но и обнаружило новое обстоятельство.

На самых больших расстояниях, которые были доступны наблюдениям на 2-метровом зеркальном космическом телескопе им. Хаббла (около сотни сверхновых в галактиках с красными смещениями  $z \sim 1 \div 2$ ), наблюдается отклонение от моделей при  $\Lambda = 0$ . Наблюдения указывают на то, что эта постоянная отлична от 0. Две группы наблюдателей в 1998-1999 годах пришли к одинаковым заключениям.

Современная диаграмма Хаббла представлена на рис. 4а. По осям отложены  $\lg z$  и величина  $D_{\text{bb}} = 44.832 + 5 \lg(2H_0 q_0^2 l_{\text{bb}}/c)$ , где  $l_{\text{bb}}$  — расстояние по болометрической светимости. Величина  $D_{\text{bb}}$  равна разности наблюдаемой и абсолютной болометрических звездных величин, применяемых в астрономии.

Три кривые построены для моделей, содержащих пылевидное вещество и то, что мы называем вакуумом, с различными значениями  $\Omega_{\text{d}}^0$  и  $\Omega_{\Lambda}^0 = c^2 \Lambda / 3H_0^2$ . Нижняя и верхняя кривые соответствуют плоскому пространству, а средняя — открытому, причем средняя и нижняя построены без учета влияния вакуума, то есть для  $\Omega_{\Lambda}^0 = 0$  и, соответственно,  $\Omega_{\text{d}}^0 = 0.20$  и  $1.00$  (модель чисто пылевидного вещества). При расчете верхней кривой принято, что  $\Omega_{\text{d}}^0 = 0.24$ ,  $\Omega_{\Lambda}^0 = 0.76$ .

На рис. 4б диаграмма дана в увеличенном и нормализованном по отношению к средней кривой виде. Там же указаны точки, соответствующие наблюдениям, и средние ошибки (усы или error boxes). В самой правой части диаграммы наблюдаемые точки, полученные по сверхновым, поднимаются над двумя нижними кривыми и больше соответствуют верхней кривой, что дает основания к выводу о большом влиянии космологического слагаемого и, следовательно, вакуума.

Напомним, что построенная Э. Хабблом в 1929 году первоначальная диаграмма составляет самую левую и нижнюю часть современной диаграммы до  $z \approx 0.004$  ( $\lg z \approx -2.7$ ) и не поместилась на рисунке. К 1936 году диаграмма была продолжена до  $z = 0.1$ .

Дальнейшие уточнения привели к построению Стандартной космологической модели, то есть принимаемой в качестве наиболее адекватной реальной Вселенной.

## § 2. Стандартная космологическая модель

1. *Плоская трехкомпонентная модель.* Современная космология стала наукой, основанной на данных наблюдений, которые теперь имеют достаточную точность для построения модели, наиболее адекватной настоящей Вселенной.

Самым существенным является обстоятельство, что пространство весьма близко к плоскому, поэтому принимается, что  $k = 0$ . В этом случае радиус кривизны бесконечно большой и не должен входить в выражения для величин, имеющих физический смысл. Поэтому, как это часто делается, за современное его значение примем хаббловское расстояние:  $R_0 = l_{\text{H}}^0 = c/H_0$ . Тогда метрика переписывается в виде (61)

$$ds^2 = (l_{\text{H}}^0)^2 a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\omega^2]. \quad (108)$$

Вселенная содержит четыре гравитирующие компоненты: пылевая  $\text{d}$ , включающая барионное и темное вещество, излучение  $\text{r}$  и нейтрино  $\nu$ , которые мы объединяем в одну  $\text{r}\nu$ , и темная энергия  $\Lambda$ , которую иногда для краткости будем называть вакуумом.

2. *Параметры модели.* Один параметр уже указан:  $k = 0$ . Следовательно,  $\Omega_k = 0$ ,  $\Omega_{\text{t}} = \Omega_{\text{d}} + \Omega_{\text{r}\nu} + \Omega_{\Lambda} = 1$ .

Самой точно известной величиной в космологии является температура теплового реликтового фона  $T_{\text{r}}^0 = 2.7277 \pm 0.002$  К.

Значение постоянной Хаббла известно менее точно. В последнее время интервал возможных значений  $H_0$  сузился, считается, что она известна с погрешностью несколько %:  $H_0 = 70 \pm 3$  км/с/Мпк. Поставлена задача в недалеком будущем довести точность определения этой постоянной до 1 %.

Среднее и наиболее приемлемое значение постоянной  $H_0 \approx 70$  км/с/Мпк =  $2.268 \cdot 10^{-18}$  1/с, для которого и будут производиться все оценки. Все остальные величины будут приводиться для этого значения  $H_0$ .

Современные критическая плотность и хаббловское расстояние составляют

$$\rho_{\text{c}}^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 9.2 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3. \quad (109)$$

$$l_{\text{H}}^0 = \frac{c}{H_0} = 1.32 \cdot 10^{28} \text{ см} = 14.2 \text{ Г св. лет} = 4.28 \text{ Гпк.}$$

Следующий параметр, известный примерно с такой же относительной точностью, — это значение доли вакуума  $\Omega_{\Lambda}^0 \approx 0.72$ .

3. *Плотности четырех космологических компонент и их доли в критической плотности.* Единственной космической компонентой, плотность которой известна с большой точностью, является излучение. Современному значению температуры отвечает согласно закону Стефана—Больцмана плотность энергии  $4.187 \cdot 10^{-13}$  эрг/см<sup>3</sup> и массовая плотность  $\rho_{\text{r}}^0 = 4.659 \cdot 10^{-34}$  г/см<sup>3</sup>. Современная доля излучения весьма мала, а именно

$$\Omega_{\text{r}}^0 = \rho_{\text{r}}^0 / \rho_{\text{c}}^0 = 5.06 \cdot 10^{-5}. \quad (110)$$

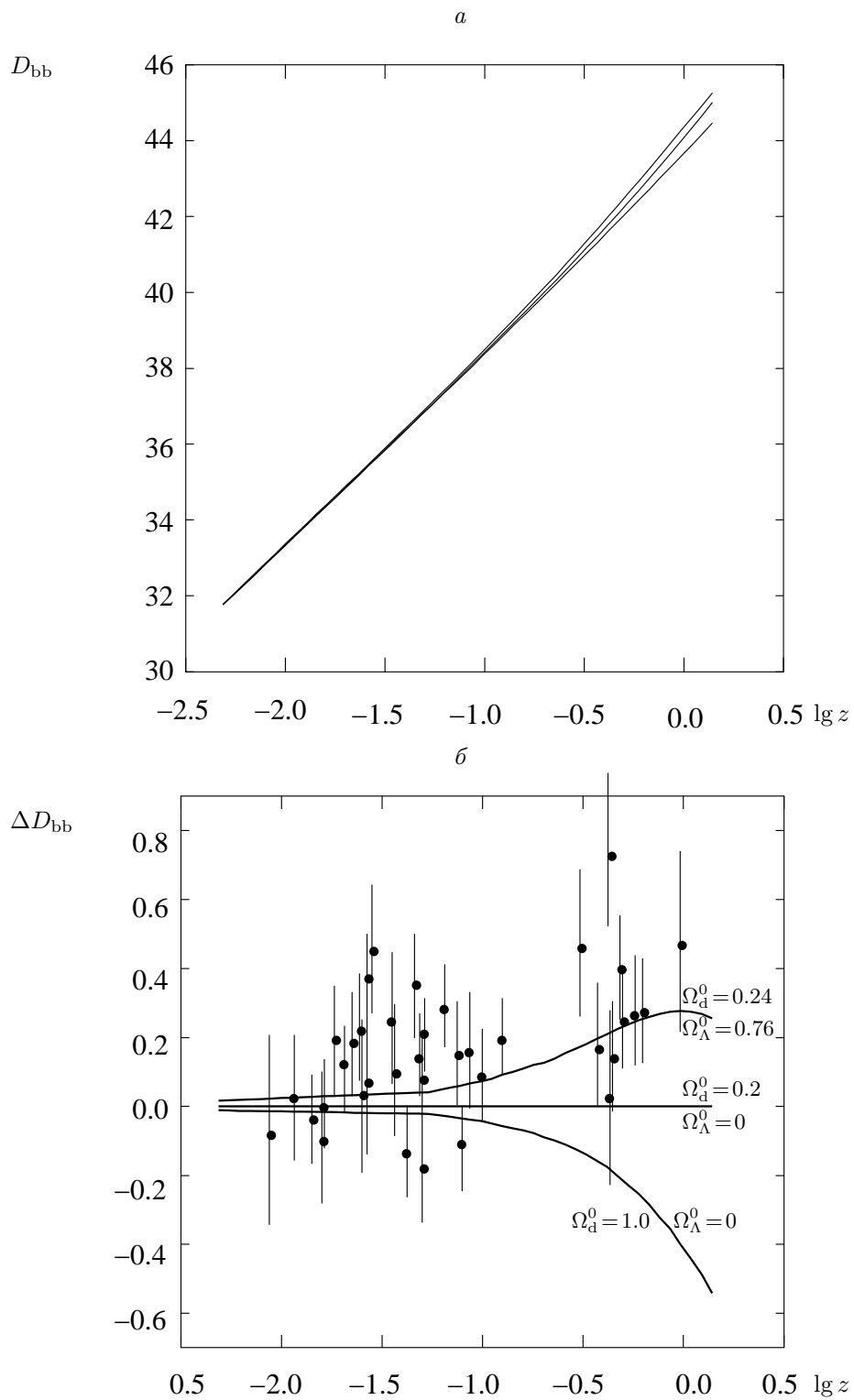


Рис. 4: Диаграмма Хаббла по современным данным.

Немного больше приходится на 6 типов нейтрино. Плотность их массы (всех типов вместе) и доля в критической плотности (значение современной массовой плотности нейтрино будет выведено ниже)

$$6\rho_\nu^0 = 6.35 \cdot 10^{-34} \frac{\Gamma}{\text{см}^3}, \quad \Omega_\nu^0 = 6 \frac{\rho_\nu^0}{\rho_c^0} = 6.90 \cdot 10^{-5}. \quad (111)$$

Ввиду одинаковой зависимости от температуры плотностей излучения и безмассовых нейтрино, как уже говорилось, их объединяют. Совместный вклад излучения и таких нейтрино в критическую плотность:

$$\rho_{\text{r}\nu}^0 = \rho_{\text{r}}^0 + 6\rho_\nu^0 = 1.10 \cdot 10^{-33} \frac{\Gamma}{\text{см}^3}, \quad \Omega_{\text{r}\nu}^0 = \Omega_{\text{r}}^0 + \Omega_\nu^0 = 1.2 \cdot 10^{-4}. \quad (112)$$

Доле вакуума отвечает массовая плотность

$$\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda^0 \rho_c^0 = 6.63 \cdot 10^{-30} \Gamma/\text{см}^3. \quad (113)$$

На долю пылевидного вещества остается

$$\Omega_{\text{d}}^0 = 1 - \Omega_{\text{r}\nu}^0 - \Omega_\Lambda^0 = 0.27988 \approx 0.28, \quad (114)$$

так что его плотность

$$\rho_{\text{d}}^0 = (1 - \Omega_{\text{r}}^0 - \Omega_\Lambda^0) \rho_c^0 \approx 2.58 \cdot 10^{-30} \Gamma/\text{см}^3. \quad (115)$$

По плотностям можно рассчитать, какому числу атомов водорода (протонов) в одном кубическом метре сейчас они соответствуют. Получается, что критической плотности отвечает число 5.5, плотности вакуума около 4, плотности пылевого вещества 1.5, а плотности барионов всего 0.14. Эти значения во много раз меньше тех, которые характерны для астрономических объектов: на Земле при нормальных условиях  $2.7 \cdot 10^{19}$  (число Лошмидта), в атмосфере Солнца на его поверхности  $\approx 10^{12}$ , в планетарных туманностях  $10^4$ , в разреженной межзвездной среде  $\approx 1$ , но все это в одном кубическом сантиметре, а не метре. Из этих чисел следует, что большую часть космического пространства занимают пустоты, где плотность материи почти нулевая.

4. *Основные уравнения.* Связь времени и временной координаты (с использованием соотношения  $cdt = I_{\text{H}}^0(a(\eta)d\eta)$  с масштабным множителем  $a$  получается из (62):

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{\text{r}\nu}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 t, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{\text{r}\nu}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \eta. \quad (116)$$

Если ввести обозначения ( $\Omega_{\text{r}\nu}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 + \Omega_\Lambda^0 = \Omega_{\text{t}} = 1$ )

$$H_\Lambda = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda^0}, \quad x_0 = \left( \frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_{\text{r}\nu}^0} \right)^{1/4}, \quad \beta = \frac{\Omega_{\text{d}}^0}{(\Omega_{\text{r}\nu}^0)^{3/4} (\Omega_\Lambda^0)^{1/4}}, \quad \eta_* = (\Omega_{\text{r}\nu}^0 \Omega_\Lambda^0)^{-1/4}, \quad (117)$$

и сделать замену переменной  $a = x/x_0$ , то уравнение (55) перейдет в

$$H = \frac{\dot{x}}{x} = H_\Lambda \frac{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}{x^2}, \quad (118)$$

а связи между переменными примут вид

$$H_\Lambda t = I_1(x, \beta), \quad \eta = \eta_* I_0(x, \beta), \quad (119)$$

где интеграл

$$I_j(x, \beta) = \int_0^x \frac{x^j dx}{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}. \quad (120)$$

Параметр интегралов с переменным верхним пределом  $\beta = 265.69$ . Значения других постоянных  $H_\Lambda = 59.397 \text{ км/с/Мпк} = 1.9249 \cdot 10^{-18} \text{ 1/с}$ ,  $x_0 = 8.8088$ ,  $\eta_* = 10.381$ . Два интеграла (119) вычисляются численно.

Возраст Вселенной согласно Стандартной модели с принятыми значениями параметров составляет  $t_0 = I_1(x_0, \beta)/H_\Lambda = 4.33 \cdot 10^{17} \text{ с} = 13.72 \text{ Г лет}$ .

5. *Роли компонент в различные эпохи.* Легко оценить значения красного смещения, при которых оказываются равными плотности различных космических компонент, а также различные соответствующие слагаемые в уравнении (33), то есть силы притяжения и отталкивания. Из соотношений (46) следует

$$\frac{\rho_{\text{r}}}{\rho_{\text{d}}} = (1+z) \frac{\rho_{\text{r}}^0}{\rho_{\text{d}}^0}, \quad \frac{\rho_{\text{d}}}{\rho_\Lambda} = (1+z)^3 \frac{\rho_{\text{d}}^0}{\rho_\Lambda^0}, \quad \frac{\rho_{\text{r}}}{\rho_\Lambda} = (1+z)^4 \frac{\rho_{\text{r}}^0}{\rho_\Lambda^0}. \quad (121)$$

Обозначим значения красных смещений, при которых эти отношения равны единице:

$$1 + z_{d,r} = \frac{\rho_d^0}{\rho_r^0}, \quad 1 + z_{d,\Lambda} = \left(\frac{\rho_\Lambda^0}{\rho_d^0}\right)^{1/3}, \quad 1 + z_{r,\Lambda} = \left(\frac{\rho_\Lambda^0}{\rho_r^0}\right)^{1/4}. \quad (122)$$

В выражение для гравитирующей плотности (47) входят (с противоположными знаками) удвоенные значения плотности излучения и вакуума  $\rho_g = \rho_d + 2\rho_r - 2\rho_\Lambda$ . Поэтому доли сил, вызываемых этими составляющими, по отношению к силе притяжения вещества будут в два раза больше долей плотности. Соответствующие красные смещения (отмечаемые звездочками)

$$1 + z_{d,r}^* = \frac{1 + z_{d,r}}{2}, \quad 1 + z_{d,\Lambda}^* = 2^{1/3}(1 + z_{d,\Lambda}). \quad (123)$$

Плотности вакуума и излучения становятся равными одновременно с соответствующими им силами, именно при

$$z_{r,\Lambda} = \left(\frac{\rho_\Lambda^0}{\rho_r^0}\right)^{1/4} - 1. \quad (124)$$

Из приведенных формул вытекают оценки, помещенные в таблицу 5. Приведены красные смещения, времена от начала расширения по простейшей модели Эйнштейна—де Ситтера (индекс ES), при которой  $t_{ES} = t_{ES}^0(1 + z)^{-3/2}$ ,  $t_{ES}^0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H_0}$ , и по Стандартной модели. Времена даны в долях возраста Вселенной, рассчитанного по тем же моделям, и в миллиардах лет. В последнем столбце приведены значения конформного времени  $\eta$ . Времена по двум моделям различаются, но имеют один порядок.

Т а б л и ц а 5. Моменты равенства плотностей и сил при  $H_0 = 70$  км/с Мпк

Момент	$z$	$t_{ES}/t_{ES}^0$	$t_{ES}$	$t/t_0$	$t$	$\eta$
$\rho_d = \rho_r$	5530	$2.43 \cdot 10^{-6}$	$2.26 \cdot 10^{-5}$	$1.35 \cdot 10^{-6}$	$1.85 \cdot 10^{-5}$	0.0151
$\rho_d = \rho_\nu$	4060	$3.87 \cdot 10^{-6}$	$3.60 \cdot 10^{-5}$	$2.41 \cdot 10^{-6}$	$3.31 \cdot 10^{-5}$	0.0200
$\rho_d = 2\rho_r$	2760	$6.88 \cdot 10^{-6}$	$6.41 \cdot 10^{-5}$	$4.90 \cdot 10^{-6}$	$6.72 \cdot 10^{-5}$	0.0280
$\rho_d = \rho_{r\nu}$	2340	$8.83 \cdot 10^{-6}$	$8.22 \cdot 10^{-5}$	$6.64 \cdot 10^{-6}$	$9.11 \cdot 10^{-5}$	0.0324
$\rho_d = 2\rho_\nu$	2030	$1.09 \cdot 10^{-5}$	$1.02 \cdot 10^{-4}$	$8.59 \cdot 10^{-6}$	$1.18 \cdot 10^{-4}$	0.0365
$\rho_d = 2\rho_{r\nu}$	1170	$2.50 \cdot 10^{-5}$	$2.33 \cdot 10^{-4}$	$2.27 \cdot 10^{-5}$	$3.11 \cdot 10^{-4}$	0.0572
$\rho_r = \rho_\Lambda$	9.92	0.0277	0.258	0.0353	0.484	1.07
$\rho_\nu = \rho_\Lambda$	9.11	0.0311	0.290	0.0397	0.544	1, 11
$\rho_{r\nu} = \rho_\Lambda$	7.81	0.0383	0.356	0.0488	0.669	1.20
$\rho_d = 2\rho_\Lambda$	0.7263	0.4409	4.106	0.5261	7.219	2.7138
$\rho_g = 0$	0.7260	0.4410	4.107	0.5263	7.221	2.7141
$\rho_d = \rho_\Lambda$	0.370	0.623	5.81	0.704	9.66	2.98

Времена  $t_{ES}$  и  $t$  приведены в гигагодах. Эпохи, когда  $\rho_d = 2\rho_\Lambda$  и  $\rho_g = 0$ , почти совпадают (различия в четвертом знаке), так как плотности излучения и нейтрино тогда малы.

Данные таблицы четко делятся на три группы. У первой, связанной с моментами, когда сравниваются величины пыли с величинами излучения и нейтрино, красные смещения имеют порядок тысяч. У второй группы, в которой темная энергия сравнивается с теми же ультрарелятивистскими компонентами,  $z$  порядка нескольких единиц. Наконец, в третьей группе с  $z$ , близкими к половине, сравниваются пыль и вакуум. Это разделение отражает границы, на которых главная роль переходит от одной компоненты к другой. Конец первой группы знаменует переход от ультрарелятивистских компонент к пыли, а начало третьей — к доминирующему влиянию темной энергии.

6. *Расстояния, скорости, ускорения: в прошлом, современные и в будущем.* В плоской модели  $sn_0(\chi) = \chi$ , так что расстояние по параллаксу и радиус сферы совпадают с метрическим расстоянием:  $l_{pl} = r = l$ . В Стандартной модели с выражением для  $l/l_H^0$  совпадает и выражение для безразмерной скорости расширения  $v/c$ . Действительно, в произвольный момент

$$\frac{v}{c} = \frac{\dot{l}}{c} = \frac{H}{c} l = \frac{l}{l_H}. \quad (125)$$

Метрическое расстояние от современного наблюдателя до места с координатой  $\chi$  в Стандартной модели определяется формулой, следующей из (96) и (119):

$$l^0 = R(\eta_0)\chi = R_0\chi = l_H^0(\eta_0 - \eta) = l_H^0\eta_*[I_0(x_0, \beta) - I_0(x, \beta)]. \quad (126)$$

Равенства (90) переписываются в виде

$$l_{\text{bb}}^0 = l_{\text{nb}}^0 \sqrt{1+z} = l_{\text{pl}}^0 (1+z) = l_{\text{ad}}^0 (1+z)^2 = R_0 \chi (1+z) = l^0 (1+z). \quad (127)$$

В дальнейшем говорим, в основном, о современных значениях и используем безразмерные расстояния, измеряя их в хаббловском по схеме  $\tilde{l} = l^0/l_{\text{H}}^0$ . Таким образом, все расстояния и  $v/c$  выражаются через метрическое:

$$\tilde{l}_{\text{pl}} = \frac{v}{c} = \tilde{l} = \eta_* [I_0(x_0, \beta) - I_0(x, \beta)], \quad \tilde{l}_{\text{ad}} = \tilde{l}a, \quad \tilde{l}_{\text{nb}} = \frac{\tilde{l}}{\sqrt{a}}, \quad \tilde{l}_{\text{bb}} = \frac{\tilde{l}}{a}, \quad a = \frac{x}{x_0} = \frac{1}{1+z}. \quad (128)$$

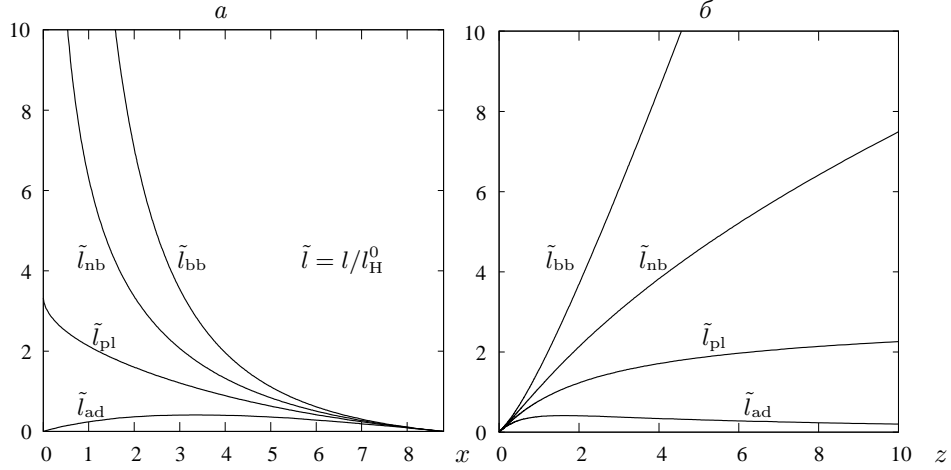


Рис. 5: Расстояния в зависимости от  $x$  и  $z$ .

На рис. 5 помещены графики расстояний в зависимости от параметра  $x$  (5а) и красного смещения  $z$  (5б).

Отметим два момента, связанных с расстояниями. Первый момент, когда расстояние по видимому размеру принимает максимальное значение ( $z = 1.6302$ ), а второй — когда метрическое расстояние оказывается равным хаббловскому ( $z = 1.4233$ ).

Ускорение космологического расширения находится с помощью уравнения (33):

$$\dot{v} = \ddot{l} = \frac{d^2}{dt^2} l_{\text{H}}^0 a \chi = l_{\text{H}}^0 \ddot{a} \chi = \frac{\ddot{a}}{a} l = \frac{\ddot{R}}{R} l = -\frac{4\pi G}{3} \rho_{\text{g}} l = H_{\Lambda}^2 \frac{x^4 - \beta x/2 - 1}{x^4} l. \quad (129)$$

Как уже говорилось, в гравитационной плотности  $\rho_{\text{g}} = \rho_{\text{d}} + 2\rho_{\text{r}} - 2\rho_{\Lambda}$  плотности  $\rho_{\text{d}}$  и  $\rho_{\text{r}}$  с ростом возраста Вселенной убывают, а  $\rho_{\Lambda} = \rho_{\Lambda}^0$ . Поэтому в числителе последней дроби в (129) роль первого слагаемого со временем возрастает. В настоящее время ( $x = x_0$ ) гравитационная плотность отрицательна:  $\rho_{\text{g}}^0 = \rho_{\text{d}}^0 + 2\rho_{\text{r}}^0 - 2\rho_{\Lambda}^0 = -1.07 \cdot 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>, так что расширение происходит с ускорением. Но ускорение на современном хаббловском расстоянии (скорость равна скорости света) составляет всего лишь

$$\dot{v}_{\text{H}}^0 = -\frac{4\pi G}{3} \rho_{\text{g}}^0 l_{\text{H}}^0 = \frac{H_0 c}{2} (2\Omega_{\Lambda}^0 - \Omega_{\text{d}}^0 - 2\Omega_{\text{r}\nu}^0) = 3.94 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2 \approx 4 \text{ \AA/с}^2. \quad (130)$$

В далеком будущем при  $t \rightarrow \infty$

$$a = \frac{1}{1+z} \sim \left( \frac{\Omega_{\text{d}}^0}{4\Omega_{\Lambda}^0} \right)^{1/3} e^{H_{\Lambda} t} = 0.460 e^{H_{\Lambda} t}, \quad z \rightarrow -1, \quad x \sim 4.05 e^{H_{\Lambda} t}, \quad \eta \sim \eta_{\infty} - 2.56 e^{-H_{\Lambda} t}, \quad \eta_{\infty} = 4.45. \quad (131)$$

Таким образом, масштаб Вселенной будет увеличиваться экспоненциально, то есть осуществится вторая инфляция, о которой скажем подробнее дальше. Однако, согласно (131) реально экспоненциальное расширение начнется лишь при  $t \sim t_{\Lambda} = 1/H_{\Lambda}$ . Масштаб времени  $1/H_0 = 4.41 \cdot 10^{17}$  с = 13.97 Гига лет,  $t_{\Lambda} = 1/H_{\Lambda} = 5.195 \cdot 10^{17}$  с = 16.46 Гига лет. Определим также расстояние  $l_{\Lambda} = c/H_{\Lambda} = l_{\text{H}}^0 / \sqrt{\Omega_{\Lambda}^0} = 1.557 \cdot 10^{28}$  см = 5.047 Гпк.

Скорость расширения пространства на хаббловском расстоянии по определению равна скорости света. Скорость изменения самого хаббловского расстояния находится с использованием уравнения (39):

$$\dot{l}_{\text{H}} = \frac{d}{dt} \frac{c}{H} = -\frac{c}{H^2} \dot{H} = \frac{c}{H^2} \left( H^2 + \frac{4\pi G}{3} \rho_{\text{g}} \right) = c \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_{\text{g}}}{\rho_{\text{c}}} \right) = \frac{c}{2} \frac{4 + 3\beta x}{1 + \beta x + x^4}. \quad (132)$$

Из формулы следует, что в начале расширения эта скорость близка к двум световым, она уменьшается, а в отдаленном будущем устремится к нулю.

Ускорение на хаббловском расстоянии с течением времени возрастает, но остается конечным:

$$\dot{v}_H = -\frac{4\pi G}{3}\rho_g l_H = -\frac{4\pi G}{3}\rho_g \frac{c}{H} = H_\Lambda c \frac{x^4 - \beta x/2 - 1}{x^2 \sqrt{1 + \beta x + x^4}} \rightarrow H_\Lambda c = 5.77 \text{ \AA}/c^2. \quad (133)$$

Ускорение самого расстояния отрицательно:

$$\ddot{l}_H = -\frac{c H_\Lambda}{2} \frac{\beta + 16x^3 + 9\beta x^4}{x(1 + \beta x + x^4)^{3/2}} \sim -c H_\Lambda \frac{9}{2} \frac{\beta}{x^3}. \quad (134)$$

### § 3. Состояние материи во Вселенной в разные эпохи

1. *Реликтовое излучение.* Несмотря на открытия квазаров, пульсаров и других интересных объектов, представления о формах вещества в современную эпоху в науке до конца последнего столетия коренным образом не изменились. Между тем, как оказалось, основной формой излучения в смысле, о котором скажем ниже, является не то излучение, которое испускают видимые объекты, а тепловое радиоизлучение с температурой около 3 К, называемое по-русски реликтовым излучением (РИ), а по-английски космическим микроволновым фоновым (cosmic microwave background radiation — CMBR).

РИ было открыто случайно (serendipitously, то есть его открытие не планировалось) в 1964 году двумя американскими радиоастрономами Арно Пензиасом и Робертом Вилсоном. К 1972 году свойства РИ были подтверждены наблюдениями более 15 групп наблюдателей на длинах волн от 0.27 до 73.5 см. В 1975 году наблюдения были продолжены до области длин волн около 0.1 мм, которая лежит ниже частоты максимума РИ  $\nu_{\max} = 1.6 \cdot 10^{11}$  1/с, что соответствует длине волны 1.87 мм.

Это излучение действительно заполняет все пространство и идет равномерно со всех сторон. Оно имеет чисто чернотельный спектр, то есть описывается функцией Планка с температурой  $T_0 = 2.7277 \pm 0.002$  К и подчиняется всем его законам. В соответствии с законом смещения Вина располагается ее максимум, в 1 см<sup>3</sup> находится  $0.244(T_0 k_B / c\hbar)^3 = 411$  реликтовых фотонов с общей энергией  $(8\pi^5 k_B / 15h^3 c^3) T_0^4 = 4.187 \cdot 10^{-13}$  эрг (или 0.25 эВ) и массой  $\rho_r^0 = 4.659 \cdot 10^{-34}$  г.

Поскольку современный спектр РИ с огромной точностью чисто чернотельный, этот спектр должен был быть когда-то сформирован. Согласно теории горячей Вселенной на ранних стадиях эволюции все компоненты Вселенной взаимодействовали между собой и находились в состоянии термодинамического равновесия (ТДР) с единой температурой. В определенный период излучение оторвалось от вещества, то есть перестало с ним взаимодействовать и стало распространяться свободно.

За счет расширения пространства концентрация фотонов убывает пропорционально  $a^{-3}$ , то есть  $n_r = n_r^0 / a^3$ , а плотность массы — пропорционально  $a^{-4}$ , то есть  $\rho_r = \rho_r^0 / a^4$  (вторая формула в (46)). В настоящую эпоху эти величины определяются формулами

$$n_r^0 = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu_0^2 d\nu_0}{e^{h\nu_0/(k_B T_0)} - 1} = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{k_B}{ch}\right)^3 T_0^3, \quad \rho_r^0 = \frac{8\pi h}{c^5} \int_0^\infty \frac{\nu_0^3 d\nu_0}{e^{h\nu_0/(k_B T_0)} - 1} = \frac{a_{SB}}{c^2} T_0^4, \quad (135)$$

где  $\zeta(3) = 1.202$  — значение дзета-функции, а  $a_{SB} = \pi^2 k_B^4 / (15c^3 \hbar^3) = 7.5657 \cdot 10^{-15}$  эрг/(см<sup>3</sup>К<sup>4</sup>) — постоянная Стефана. Согласно формуле красного смещения  $\nu_0 = a\nu$ , так что

$$n_r^0 = \frac{8\pi}{c^3} a^3 \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{e^{ah\nu/(k_B T_0)} - 1} = a^3 n_r, \quad \rho_r^0 = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} = 16\pi\zeta(3) \left(\frac{k_B}{ch}\right)^3 T^3, \quad T = \frac{T_0}{a}. \quad (136)$$

Таким образом, в течение всего периода расширения пространства излучение оставалось чернотельным, а его температура уменьшалась так же, как и частота. Тот же вывод следует и из рассмотрения плотности массы.

По значениям температуры можно построить схему развития состояния материи во Вселенной. Эту схему можно разбить на несколько стадий.

2. *Стадии истории горячей Вселенной.* Перечислим эти стадии в ретроспективном порядке.

1) Современная стадия. Она характеризуется низкой температурой основной составляющей излучения — реликтового — от нескольких градусов до 3 ÷ 4 тысяч градусов. В этот период вещество нейтрально, прозрачно для РИ, и они расширяются независимо.

2) Стадия частичной ионизации.

3) Стадия полной ионизации. При температурах, превышающих  $\sim 10^4$  К, водород почти полностью ионизован, а при  $4 \cdot 10^3$  К — почти полностью нейтрален. Соответствующие значения красного смещения  $z = 3600$  и  $z = 1500$ . Последнее значение  $z$  называется эпохой рекомбинации. При  $T > 50000$  К ( $z > 6000$ ) полностью ионизован гелий. Космологическая рекомбинация оказывается затянутой по времени и ее температурные границы более широки, чем у звезд.



4) Эра радиационно доминированной плазмы (РДП). Границы этой стадии широки: она начинается с температур, соответствующих энергии покоя электрона, когда еще возможны рождения пар электрон-позитрон, а заканчивается перед эпохой рекомбинации.

5) Лептонная стадия (лептоны — частицы, не участвующие в сильном взаимодействии). Температура еще более высокая, вплоть до соответствующей массе покоя пи-мезонов.

6) Адронная стадия. Здесь происходят рождения и аннигиляции нуклонов, электронов и позитронов, мезонов, нейтрино и других частиц. При  $z = 5 \cdot 10^{10}$  плотность вещества достигает ядерной  $2.8 \cdot 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>.

7) Эпоха квантовой хромодинамики (КХД). Доминирует сильное взаимодействие.

8) Эпоха электро-слабого объединения. Здесь энергии достаточны для того, чтобы не различать лептоны.

9) Эпоха великого объединения — всех квантовых взаимодействий. Лептоны и другие частицы приобретают энергии, характерные для сильного взаимодействия.

10) Эпоха сверхобъединения. Объединяются все четыре типа мировых взаимодействий: электромагнитное, слабое, сильное и гравитационное.

Названия эпох по видам объединений объясняется тем, что константы связи физических взаимодействий слабо, но зависят от энергий взаимодействующих частиц и при энергиях, характерных для указанных эпох, уравниваются.

Границами между стадиями являются характерные значения температуры  $T$  (и энергии  $k_B T$ ). Некоторые из них получаются как комбинации размерных величин, играющих существенную роль в каждой из стадий. Соответствующие значения  $t$  и  $z$  вычисляются согласно модели. Ориентировочные их значения приведены в табл. 5.

Граница между стадиями 4) и 5) определяется энергией покоя электрона  $mc^2 = 0.511$  МэВ. Ей соответствует температура  $6 \cdot 10^9$  К. Между 5) и 6) основная величина — энергия покоя протона, в 1838 раз большая электронной:  $0.1$  ГэВ =  $10^{12}$  К. Далее, между 6) и 7) пограничная энергия, при которой становятся возможными реакции в ускорителях, выбивающие кварки из сталкивающихся протонов, составляет  $10$  ГэВ, а между 7) и 8) —  $1000$  ГэВ, когда происходит сближение констант электромагнитного и слабого взаимодействий. Эти энергии соответствуют температурам —  $5 \cdot 10^{13}$  и  $3 \cdot 10^{15}$  К. Стадия 9) начинается на значительно больших энергиях —  $10^{14}$  ГэВ. Наконец стадии 10) отвечают фантастические значения величин, называемые планковскими. Они получаются комбинациями, включающими постоянную тяготения: энергия  $E_{Pl} = \sqrt{c^5 \hbar / G} = 1.956 \cdot 10^{16}$  эрг =  $1.956 \cdot 10^{11}$  Дж =  $1.221 \cdot 10^{19}$  ГэВ, соответствующая массе  $m_{Pl} = 2.177 \cdot 10^{-5}$  г, температура  $T_{Pl} = 1.417 \cdot 10^{32}$  К, длина  $l_{Pl} = \sqrt{G \hbar / c^3} = 1.616 \cdot 10^{-33}$  см, время  $t_{Pl} = 5.390 \cdot 10^{-44}$  с. Планковская энергия равна 543 киловаттчасам, и такой энергией обладает элементарная частица!

Т а б л и ц а 6. Эпохи эволюции горячей Вселенной

$T$ (К)	$\rho_c \left( \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$	$k_B T$	$z$	$t$ (с)	№	Эпохи
2.7	$8.7 \cdot 10^{-30}$	$4 \cdot 10^{-16}$ эрг	0	$3 \cdot 10^{17}$	1.	Современная
$4 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^{-20}$	$5.5 \cdot 10^{-13}$ эрг	1500	$5 \cdot 10^{12}$	2.	Частич. иониз.
$4 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^{-12}$ эрг	15000	$1.7 \cdot 10^{11}$	3.	Полная иониз.
$7 \cdot 10^4$	$2 \cdot 10^{-16}$	$10^{-11}$ эрг	25000	$4.6 \cdot 10^{10}$	4.	РДП
$6 \cdot 10^9$	$1.1 \cdot 10^4$	511 кэВ	$2 \cdot 10^9$	10	5.	Лептонная
$10^{12}$	$8 \cdot 10^{13}$	0.1 ГэВ	$4 \cdot 10^{11}$	$10^{-3}$	6.	Адронная
$5 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^{20}$	260 ГэВ	$2 \cdot 10^{13}$	$10^{-7}$	7.	КХД
$3 \cdot 10^{15}$	$5 \cdot 10^{27}$	$10^3$ ГэВ	$1 \cdot 10^{14}$	$10^{-11}$	8.	Электр.-слаб.
$10^{29}$	$5 \cdot 10^{79}$	$10^{16}$ ГэВ	$4 \cdot 10^{27}$	$10^{-37}$	9.	Великое объедин.
$10^{32}$	$5 \cdot 10^{93}$	$10^{19}$ ГэВ	$4 \cdot 10^{31}$	$10^{-43}$	10.	Сверхобъедин.

3. *Физические процессы в различные периоды.* Теория физических процессов в ранней Вселенной тесно связана с физикой элементарных частиц и физикой высоких энергий. Эти три ветви физической науки развивались и развиваются параллельно.

Во все периоды расширения от самого начала до 4) включительно совокупность частиц и излучения находилась в состоянии ТДР. В период 10) (теория сверхобъединения еще не создана), ближайший к Большому Взрыву, все частицы имеют настолько большие энергии, что фактически не различаются. Все они участвуют во взаимных превращениях, причем не существенно, гравитон это или фотон, фермион или бозон. Первоначально все они имеют массу покоя, равную нулю, и подчиняются высокой степени симметрии. Постепенно, для

некоторых из них условие симметрии нарушается, происходит, как говорят, спонтанное нарушение симметрии. Частицы приобретают массу и обособляются.

Первыми отрываются от общего взаимодействия частицы, связанные с гравитацией (гравитоны), с переходом к стадии 9). Они перестают участвовать в общем обмене. Выжившая их часть отрывается от остальных и в дальнейшем распространяется свободно. Остаются все “квантовомеханические” частицы.

Большинство элементарных частиц существуют парами частица-античастица (в это число не входят фотон, нейтральный пи-мезон и некоторые другие). Кроме того, согласно теории должно существовать множество тяжелых (в обычных условиях, то есть с большой массой покоя) частиц: фотино, гравитино, нейтралино, хиггсино и др.

По-видимому, уже на этой стадии, при энергиях порядка  $10^{15}$  ГэВ, проявляется некоторая положительная разность между числом протонов и антипротонов, что впоследствии приводит к асимметрии нашего мира относительно вещества и антивещества. Доля этой нескомпенсированной части может быть всего  $10^{-9}$  от общего числа нуклонов в ту эпоху.

Характерная энергия эпохи квантовой хромодинамики  $\approx 10^{14}$  ГэВ. Чтобы разогнать заряженную частицу до таких энергий, имея в виду, что на наибольшем современном ускорителе длиной в 2 мили получают энергии в 50 ГэВ, нужно было бы построить линейный ускоритель длиной в 2 пк, то есть в 6.5 световых лет. Это расстояние больше, чем до ближайшей звезды — 1.3 пк. Поэтому единственная лаборатория для исследования таких частиц — Вселенная в ее горячей стадии. Дело осложняется тем, что такие частицы в большом количестве были давно, а потом почти полностью исчезли, так что для их обнаружения сейчас нужно затрачивать очень большие средства. Тем не менее физики и астрофизики надеются найти их реликтовые количества.

В течение этой эпохи, согласно теории того же названия, кварки, имеющие дробный заряд ( $1/3$  и  $2/3$ ), объединяются в частицы с целым зарядом.

Постепенно, в течение стадий 8), 7) и 6), обособляются все новые частицы, сначала адроны, потом лептоны, обнаруживаются их характерные признаки. Многие из них перестают существовать в заметных количествах.

С понижением температуры вымирают и другие частицы. В течение стадии 6), адронной, сначала исчезают пи-мезоны, в конце аннигилируют протоны и антипротоны, нейтроны и антинейтроны. Если бы числа протонов и антипротонов, а также других частиц и античастиц были абсолютно одинаковы, то сейчас привычного для нас вещества не было бы совсем. Все частицы аннигилировали бы и создали мощное поле излучения.

Лептонная эпоха 5) содержит события, связанные с легкими частицами. При энергии  $10^{-2}$  ГэВ аннигилируют мю-мезоны, при  $10^{-3}$  ГэВ от вещества отрываются нейтрино и антинейтрино, которые в дальнейшем летят свободно, не взаимодействуя ни с чем. Зарегистрировать их очень трудно и пока не удается. К исходу стадии 5) аннигилируют электроны и позитроны, их энергия превращается в энергию фотонов, как и энергия аннигилировавших ранее протонов и антипротонов. Термодинамические соображения показывают, что температура реликтового излучения за счет произошедшей аннигиляции частиц и античастиц должна быть выше, чем температура реликтовых нейтрино, оторвавшихся от остального вещества раньше (сейчас примерно 2 К). На этой же стадии, при температурах  $T = 10^{11} \div 10^9$  К, происходит первичный нуклеосинтез, который обсудим в следующей главе.

В конце стадии 4) излучение также отрывается от вещества, и плотность его становится ниже плотности вещества. А с эпохи рекомбинации излучение распространяется свободно, так как вещество прозрачно для этого излучения. Наступает время, когда излученные фотоны становятся доступны наблюдениям в неизменном виде, подвергаясь только красному смещению. До этого все они испытывали взаимодействие с веществом посредством, в основном, томсоновского рассеяния, а также тормозных процессов. Фотоны изменяли свои импульсы, а значит направление и (в меньшей степени) энергию, так что информация, которую они несли, в значительной мере замыкалась. Этим взаимодействием определяется тот физический горизонт, о котором упоминалось в связи с геометрическим горизонтом. Сфера радиусом, равным расстоянию до физического горизонта, называется также сферой последнего рассеяния.

Все же некоторые сведения о Вселенной до эпохи рекомбинации могут быть получены из данных о первичном нуклеосинтезе, из флуктуаций РИ, из реликтовых нейтрино и гравитационных волн. Первые два источника уже дали такие сведения (см. ниже), произведены также первые регистрации гравволн.

Тогда же начинают образовываться атомы водорода. Незадолго до этого развиваются неоднородности, приводящие в дальнейшем к образованию галактик и их скоплений.

4. *Эволюция космологических нейтрино.* В некоторый момент расширения Вселенной нейтрино перестают взаимодействовать с другими частицами и между собой и распространяются свободно. Хотя процесс их перехода к свободному полету занимает какой-то период времени, примем, что это произошло мгновенно. Разные типы нейтрино отделяются в разные периоды, но для простоты объединим их все.

Температура отделения нейтрино  $T_\nu^*$  достаточно высока, так что все компоненты вещества были ультрарелятивистскими и их энтропии были пропорциональны третьей степени температуры. Нас интересуют электроны, позитроны, нейтрино и фотоны. Энтропии трех газов фермионов в момент отделения нейтрино были одинаковы,

а энтропия фотонного (бозонного) газа отличалась множителем. Указанные энтропии в объеме  $V_*$  тогда были

$$S_{e^\pm}^* = S_\nu^* = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3, \quad S_\Gamma^* = \frac{4}{3} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3. \quad (137)$$

Космологическое расширение происходит как адиабатический процесс, при котором энтропия определенного объема не меняется. Следовательно, температура всех ультрарелятивистских газов изменяется обратно пропорционально масштабному множителю.

После отделения нейтрино разлетались свободно, а электроны и позитроны продолжали взаимодействовать. Когда температура стала существенно ниже  $6 \cdot 10^9$  К, все позитроны аннигилировали с электронами, и аннигилировавшие пары передали свою энергию, включая энергию покоя, фотонному газу. В результате этого и энтропия электрон-позитронных пар перешла к фотонам. Фотоны продолжали взаимодействовать с оставшимися электронами и газ фотонов пришел к равновесному состоянию, повысив свою температуру, которая впоследствии уменьшалась в соответствии с общим расширением пространства. Энтропия после повышения сохранялась:

$$S_\Gamma = \left( \frac{4}{3} + 2 \frac{7}{6} \right) a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3 = \frac{11}{3} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3 = \frac{4}{3} a_{\text{SB}} V T^3. \quad (138)$$

Энтропия нейтринного газа не изменялась, а вследствие космологического расширения объемы в моменты, которым соответствуют значения масштабного множителя  $a_\nu^*$  и  $a$ , связаны соотношением  $V_*(a_\nu^*)^3 = V a^3$ , так что

$$S_\nu = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V_* (T_\nu^*)^3 = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V_* \left( \frac{a}{a_\nu^*} \right)^3 T_\nu^3 = \frac{7}{6} a_{\text{SB}} V T_\nu^3. \quad (139)$$

Подставив в (138) произведение  $V_*(T_\nu^*)^3$  из (139), получим связь между температурами фотонного и нейтринного газов после аннигиляции электрон-позитронных пар:

$$\frac{11}{3} a_{\text{SB}} V T_\nu^3 = \frac{4}{3} a_{\text{SB}} V T^3, \quad T^3 = \frac{11}{4} T_\nu^3, \quad T_\nu = \sqrt[3]{\frac{4}{11}} T = 0.7138 T. \quad (140)$$

Температура безмассовых нейтрино строго пропорциональна температуре излучения и одинаково с ней зависит от масштабного множителя:  $T_\nu = T_\nu^0/a$ . Современная температура безмассовых нейтрино  $T_\nu^0 = \sqrt[3]{\frac{4}{11}} T_0 = 1.95$  К.

#### § 4. Эволюция красного смещения и видимой светимости

1. *Зависимость красного смещения от эпохи.* Как говорилось выше, масштабный множитель  $a$ , а следовательно и красное смещение  $1 + z = 1/a$  привязаны к эпохе наблюдения. Поэтому значение  $z$  для каждого достаточно удаленного объекта должно изменяться с увеличением возраста Вселенной. Изменениям подвержены и наблюдаемые светимости объектов. На это обратил внимание А. Сэндидж. Позднее А. Лоеб (по-видимому, независимо) предложил определять изменения красного смещения  $z$  квазаров по наблюдениям  $L_\alpha$ -леса на 10-метровом телескопе Кеск. Он же перевел эти изменения в изменения скоростей излучающих объектов. Все такие изменения стали называть эффектом Сэндиджа–Лоеба.

Формулы, описывающие указанный эффект, справедливы для любой космологической модели. Поскольку в этом параграфе существенна зависимость радиуса кривизны от времени, будем писать  $R(t)$ , не изменяя обозначения.

Красное смещение линий в спектре некоторого объекта, расположенного в месте, которое соответствует времени  $t_0 = t(\eta_0)$  от начала расширения при закрепленной эпохе в месте наблюдения  $t_0 = t(\eta_0)$ , как известно, определяется формулой  $1 + z_0 = R(t_0)/R(t_0)$ . Тогда  $z_0$  однозначно связано со временем  $t_0$ , а если объект совпадает с местом наблюдения, то  $z_0 = 0$ . Для полного определения  $z_0$  следовало бы указывать оба времени в качестве аргументов, то есть писать  $z(t_0, t_0)$ , однако по традиции этого не делается, так как подразумевается, что эпоха  $t_0$  закреплена. В прошлом по отношению к ней значения  $z_0 > 0$ , в будущем  $-1 < z_0 < 0$ . В этом параграфе примем более подробное обозначение.

Если прошло сколько-то времени, возраст Вселенной увеличился и эпоха, к которой привязываются красные смещения, перешла в момент  $t'_0 = t(\eta'_0)$  (штрихи не означают производных), то и объект, так сказать, переместился в момент  $t'_0 = t(\eta'_0)$  без изменения своей пространственной координаты  $\chi_0$ . Связь моментов испускания излучения и его принятия наблюдателем в терминах конформных координат при этом не изменяется, а разность конформных времен эпох наблюдателя и объекта сохраняется:

$$\chi_0 = \eta'_0 - \eta'_0 = \eta_0 - \eta, \quad \eta'_0 - \eta_0 = \eta'_0 - \eta_0. \quad (141)$$

В частности, будут равны и бесконечно малые смещения:  $d\eta_0 = d\eta_0$ . Из соотношения  $cdt = R(t)d\eta$  и такого же в эпоху  $t_0$  получается соотношение между дифференциалами времен и производная от одного по другому:

$$dt_0 = \frac{R(t_0)}{c} d\eta_0 = \frac{R(t_0)}{c} d\eta_0 = \frac{R(t_0)}{c} \frac{c}{R(t_0)} dt_0 = \frac{R(t_0)}{R(t_0)} dt_0, \quad \frac{dt_0}{dt_0} = \frac{R(t_0)}{R(t_0)} = \frac{1}{1 + z_0}. \quad (142)$$

Последнее соотношение между ходом времени объекта и наблюдателя уже было использовано в пункте 3 параграфа 1 Главы II при переходе от расстояния по параллаксу к расстоянию по числу фотонов.

Чтобы обнаружить изменения  $z_O$ , надо измерить смещения линий в спектре одного и того же объекта (с одним и тем же значением координаты  $\chi_O$ ) в моменты, разделенные некоторым промежутком времени. Желательно, чтобы такой промежуток был значительно меньше, чем сами времена, тогда приращения величин можно заменить их дифференциалами (бесконечно малыми) и будет достаточно найти производные изменяющихся величин. С помощью (142) находим

$$\frac{dR(t_O)}{dt_O} = \frac{dR(t_O)}{dt_O} \frac{dt_O}{dt_0} = \dot{R}(t_0) \frac{R(t_O)}{R(t_0)}, \quad \frac{dR(t_0)}{dt_0} = \dot{R}(t_0). \quad (143)$$

Отсюда получаем

$$\frac{dz_O}{dt_0} = \frac{d(1+z_O)}{dt_0} = \frac{d}{dt_0} \frac{R(t_0)}{R(t_O)} = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} - \frac{R(t_0)}{R^2(t_0)} \dot{R}(t_0) \frac{R(t_0)}{R(t_0)} = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \frac{R(t_0)}{R(t_0)} - \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} = H_0(1+z_O) - H_0. \quad (144)$$

Зависимость  $H$  от  $z$  получится, если в показателе интеграла в 55) вместо  $a$  подставить  $1/(1+z)$ .

2. *Эволюция видимой светимости объектов.* Изменение красного смещения должно приводить к изменению наблюдаемой светимости объектов. Скорость изменения фотометрического расстояния в современную эпоху, как вытекает из равенств (127) (его крайних частей  $l_{bb}^0 = l^0(1+z)$ ) и (144), равна

$$\frac{dl_{bb}^0}{dt_0} = i^0(1+z) + l^0 \frac{dz}{dt_0} = H_0 l^0(1+z) + l^0 [H_0(1+z) - H] = \left(2H_0 - \frac{H}{1+z}\right) l_{bb}^0. \quad (145)$$

Тогда

$$i_{bb}^0 = -2 \frac{L_O}{4\pi(l_{bb}^0)^3} \frac{dl_{bb}^0}{dt_0} = -2 \frac{L_{bb}^0}{l_{bb}^0} \frac{dl_{bb}^0}{dt_0} = -2L_{bb}^0 \left(2H_0 - \frac{H}{1+z}\right), \quad \frac{1}{H_0} \frac{d \ln L_{bb}^0}{dt_0} = -2 \left(2 - \frac{1}{1+z} \frac{H}{H_0}\right). \quad (146)$$

Найдем изменение  $z$  в зависимости от изменяющегося возраста Вселенной согласно Стандартной модели.

На рис. 6 (для краткости производная  $dz/dt_0$  обозначена  $\dot{z}$ , индекс  $O$  опущен) отражены зависимости  $\dot{z}/H_0$  и отношения  $\dot{z}/[H_0(1+z)]$  от (современного) красного смещения  $z$ . Сначала скорость  $\dot{z}$  положительна, то есть  $z$  возрастают. В нуль производная  $\dot{z}$  обращается при  $z = 2.34$ . Между двумя нулями в точке  $z = 1.06$  располагается максимум, равный 0.280. Красные смещения более далеких объектов ( $z > 2.34$ ) уменьшаются, причем скорость уменьшения с удалением быстро растет. У отношения эти закономерности выражены слабее. Нули  $\dot{z}$  и  $\dot{z}/(1+z)$  совпадают, а максимум этой величины, естественно меньше, он равен 0.148 и достигается при меньшем  $z = 0.726$ .

На том же рисунке помещен график обезразмеренной производной логарифма видимой светимости как функции  $z$ . При  $z = 0$  эта производная равна  $-2$ , что отражает уменьшение телесного угла источника в самом начале его удаления от наблюдателя. При небольших  $z$  скорость уменьшения слегка растет, при  $z = 0.726$  имеет (отрицательный) максимум, затем уменьшается и при  $z = 13.2$  обращается в нуль. Наблюдаемая яркость далеких объектов с красным смещением  $z > 13.2$  должна возрастать и тем сильнее, чем объект дальше, хотя неясно, что это за объекты, так как такие красные смещения соответствуют времени от начала расширения, меньшему 326 миллионов лет, что составляет долю 0.0238 от современного возраста Вселенной.

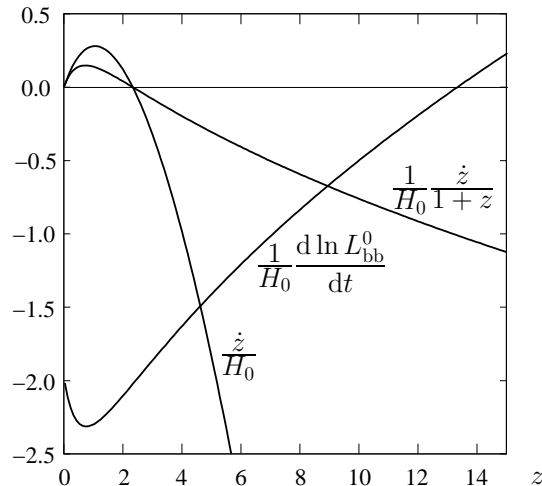


Рис. 6: Изменения красного смещения и светимости как функции от  $z$ .

Измерять изменения всех этих величин, как и предлагал Лоеб, удобнее всего при наблюдениях  $L_\alpha$ -леса, то есть смещения линий поглощения  $L_\alpha$ , возникающих при прохождении через облака галактик, расположенных на пути излучения более далеких квазаров. Облака эти могут передвигаться с некоторыми скоростями. Их лучевая компонента может влиять на наблюдаемые смещения линий. Однако, хотя в измерения изменений положений линий войдет изменение скоростей облаков, но весьма маловероятно, что их скорости за время между наблюдениями изменятся сколько-нибудь заметно.

Несмотря на важность эффекта с точки зрения проверки теории, реальная возможность его обнаружения современными приборами требует слишком большого промежутка времени между наблюдениями, сравнимого с сотнями лет (до порядка тысячи). Так как  $\lambda(t_0)/\lambda(t) = 1 + z(t, t_0)$ , то  $d\lambda_0/\lambda_0 = dz/(1+z)$  и

$$dt_0 = \frac{1}{H_0} \frac{dz/(1+z)}{\dot{z}/[H_0(1+z)]}. \quad (147)$$

Например, если принять, что точность измерения относительного смещения линий  $d\lambda/\lambda = dz/(1+z) = 10^{-6}$ , то при  $z = 4$ , как видно из рисунка,  $\dot{z}/[H_0(1+z)] \approx -0.2$  и  $dt_0 \sim 14 \cdot 10^9 \cdot 10^{-6}/0.2 = 3 \cdot 10^3$  лет — промежуток времени, незначительный по космологическим масштабам, но слишком большой для человечества. При больших  $z$  точность измерения положений линий меньше, так что приходится надеяться на происходящий технологический прогресс.

В космологической литературе оценивалась возможность детектирования смещения линий из-за космологического расширения в спектрах различных объектов в разных диапазонах и при разных космологических моделях. После введения в строй телескопов с ультрабольшими размерами зеркал (40–60 м), планируемого на двадцатые годы 21 века, как утверждается, можно будет измерить такое смещение, если наблюдать тысячи часов с разрывом в несколько десятилетий.

3. *Независимые константы и переменные.* Так как красное смещение и масштабный множитель изменяются с увеличением возраста Вселенной, возникает необходимость найти переменные, свободные от этого эффекта. Частично эта проблема уже обсуждалась, в частности, было установлено, что конформное время  $\eta$  может служить такой переменной. Независимой является и координата  $\chi$ . Здесь выявим другие переменные, обладающие тем же свойством в рамках Стандартной модели.

Сначала напомним постоянные величины. Это прежде всего современная космологическая постоянная  $\Lambda = 1.24 \cdot 10^{-56} \text{1/см}^2$  и связанная с ней массовая плотность темной энергии (вакуума)  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = 6.63 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$ .

Другой постоянной величиной является масса пыли, заключенная в сфере радиусом, равным радиусу кривизны:  $M_d = \frac{4\pi}{3} \rho_d R^3$ . Написанная формула, справедливая при неплоских моделях, не подходит для плоской, лежащей в основе Стандартной модели, так как радиус кривизны в ней бесконечен. Выход из этого затруднения был указан в последнем (с номером 11) пункте § 2 Главы I: в качестве современного значения радиуса кривизны можно взять современное же хаббловское расстояние. Тогда

$$M_d = \frac{4\pi}{3} \rho_d^0 R_0^3 = \frac{4\pi}{3} \Omega_d^0 \rho_c^0 \frac{c^3}{H_0^3} = 2.49 \cdot 10^{55} \text{ г}. \quad (148)$$

Наконец, третьей основной постоянной величиной служит константа, связанная с излучением и нейтрино:  $W = 4\pi \rho_{\nu} R^4$ . Тот же подход, что и по отношению к пыли, приводит к значению

$$W = 4\pi \rho_{\nu}^0 R_0^4 = 4\pi \Omega_{\nu}^0 \rho_c^0 \frac{c^4}{H_0^4} = 4.22 \cdot 10^{80} \text{ г} \cdot \text{см}. \quad (149)$$

Через три основных постоянных выражаются константы, входящие в формулы, определяющие строение Вселенной согласно Стандартной модели. Это следующие величины:

$$H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c = 59.4 \frac{\text{км}}{\text{с Мпк}} = 1.925 \cdot 10^{-18} \frac{1}{\text{с}}, \beta = \frac{3M_d}{W^{3/4} (4\pi \rho_\Lambda)^{1/4}} = 265.69, \eta_* = \left( \frac{9}{2} \frac{c^2}{GW\Lambda} \right)^{1/4} = 10.38. \quad (150)$$

Независимой от эпохи является и переменная, использованная в тех же формулах, а именно, переменная  $x$ . Она пропорциональна радиусу кривизны:

$$x = x_R R(t), \quad x_R = \left( \frac{4\pi \rho_\Lambda}{W} \right)^{1/4} = 6.67 \cdot 10^{-28} \frac{1}{\text{см}}. \quad (151)$$

Отсюда находится и выражение для параметра  $x_0$ , который связывает независимую переменную  $x$  с масштабным множителем:

$$x_0 = x_R R_0 = \left( \frac{4\pi \rho_\Lambda}{W} \right)^{1/4} \frac{c}{H_0} = 8.8088. \quad (152)$$

Независимость от эпохи переменных  $x$  и  $\eta$  следует и из уравнений (119). Первое связывает  $x$  с реальным временем, а второе с конформным.

Наконец, через независимые переменные можно записать и метрику:

$$ds^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\omega^2]. \quad (153)$$

Здесь в квадратных скобках все переменные независимы, а множитель

$$\frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) = \frac{c^2}{H_0^2} \frac{x^2}{x_0^2} = \frac{c^2}{H_0^2} \frac{x^2}{\frac{c^2}{H_0^2} (4\pi\rho_\Lambda/W)^{1/2}} = \frac{x^2}{\sqrt{4\pi\rho_\Lambda/W}}. \quad (154)$$

Окончательно,

$$ds^2 = \frac{x^2}{x_R^2} [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\omega^2]. \quad (155)$$

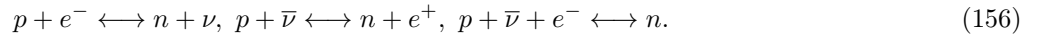
## Глава IV. Образование химических элементов и крупномасштабной структуры Вселенной

### § 1. Первичный нуклеосинтез

Химические элементы с порядковыми номерами, большими 2, образуются, в основном, в звездах в ходе термоядерных реакций. Процесс же образования самых распространенных в природе элементов — водорода и гелия — начинается до возникновения звезд.

После аннигиляции протонов и антипротонов вещество становится обычным по ассортименту элементарных частиц. Однако состояние его еще очень специфично. Не только нейтральные атомы, но даже ядра (кроме протона) при температурах, превышающих десять миллиардов кельвинов, не могут существовать, они разбиваются окружающими частицами. Основными частицами в таком веществе являются электроны, протоны, нейтроны, фотоны, нейтрино и антинейтрино.

Равновесие между протонами и нейтронами устанавливается за счет реакций слабого взаимодействия



При температуре  $T \gg 10^{10}$  К ( $E \gg 0.8$  МэВ) числа протонов и нейтронов приблизительно равны. При меньших температурах доля протонов возрастает, так как равновесное отношение их концентраций  $n_N/n_P = \exp(-Q/k_B T)$ , где  $Q = 1.293$  МэВ, а  $Q/c^2$  — разность масс нейтрона и протона. По мере расширения и охлаждения Вселенной активность реакций (156) падает, равновесие нарушается и отношение  $n_N/n_P$  стабилизируется, немного уменьшившись за счет распада нейтронов (реакции идут справа налево). Доля нейтронов остается на уровне 0.15.

При уменьшении температуры ниже десяти миллиардов кельвинов ( $E < 0.8$  МэВ) начинают образовываться простейшие ядра. В дальнейшем все нейтроны соединяются с протонами. В результате образуются ядра  ${}^4\text{He}$ , небольшие доли  ${}^3\text{He}$ , дейтерия и лития. Более сложные ядра также образуются, но в количествах, меньших на несколько порядков. Эти процессы заканчиваются через  $\approx 300$  с после начала расширения. После этого температура уже недостаточна для протекания ядерных реакций.

Так как почти все нейтроны попали в ядра изотопа гелия  ${}^4\text{He}$ , причем каждый нейтрон там соединился с протоном, то на гелий пошла доля  $2 \cdot 0.15 = 0.3$  от всего вещества. Точнее говоря, эта доля заключена между 0.26 и 0.32. Остальное, в основном, протоны и небольшая добавка дейтерия.

Впоследствии дейтерий идет на образование гелия, так что остается его очень мало. Количество оставшегося дейтерия зависит от плотности и, следовательно, жестко связано с плотностью в современную эпоху.

На рис. 7 представлены относительные (по отношению к водороду) содержания первичных гелия  $Y_p = {}^4\text{He}/\text{H}$  (индекс p означает primordial), дейтерия вместе с более легким изотопом гелия ( $\text{D} + {}^3\text{He}$ )/H и лития  ${}^7\text{Li}/\text{H}$ , рассчитанные в зависимости от современных значений плотности вещества и отношения чисел нуклонов и фотонов  $\eta_{10} = 10^{10}\eta$ ,  $\eta = n_{\text{nc}}/n_{\text{ph}}$  (точнее, от  $\lg \eta_{10}$ ). Все величины даны с указанием доверительных интервалов в два стандартных отклонения. Две вертикальные прямые показывают границы допустимых значений аргумента  $\eta_{10}$ , согласующихся с данными наблюдений.

### § 2. Теория Джинса

1. *Основные уравнения теории Джинса.* Впервые вопрос о поведении возмущений стационарного однородного вещества в создаваемом им гравитационном поле (самогравитация) рассмотрел Джинс в 1902 году. Он исходил из системы уравнений нерелятивистской газодинамики, а именно, уравнений неразрывности, движения

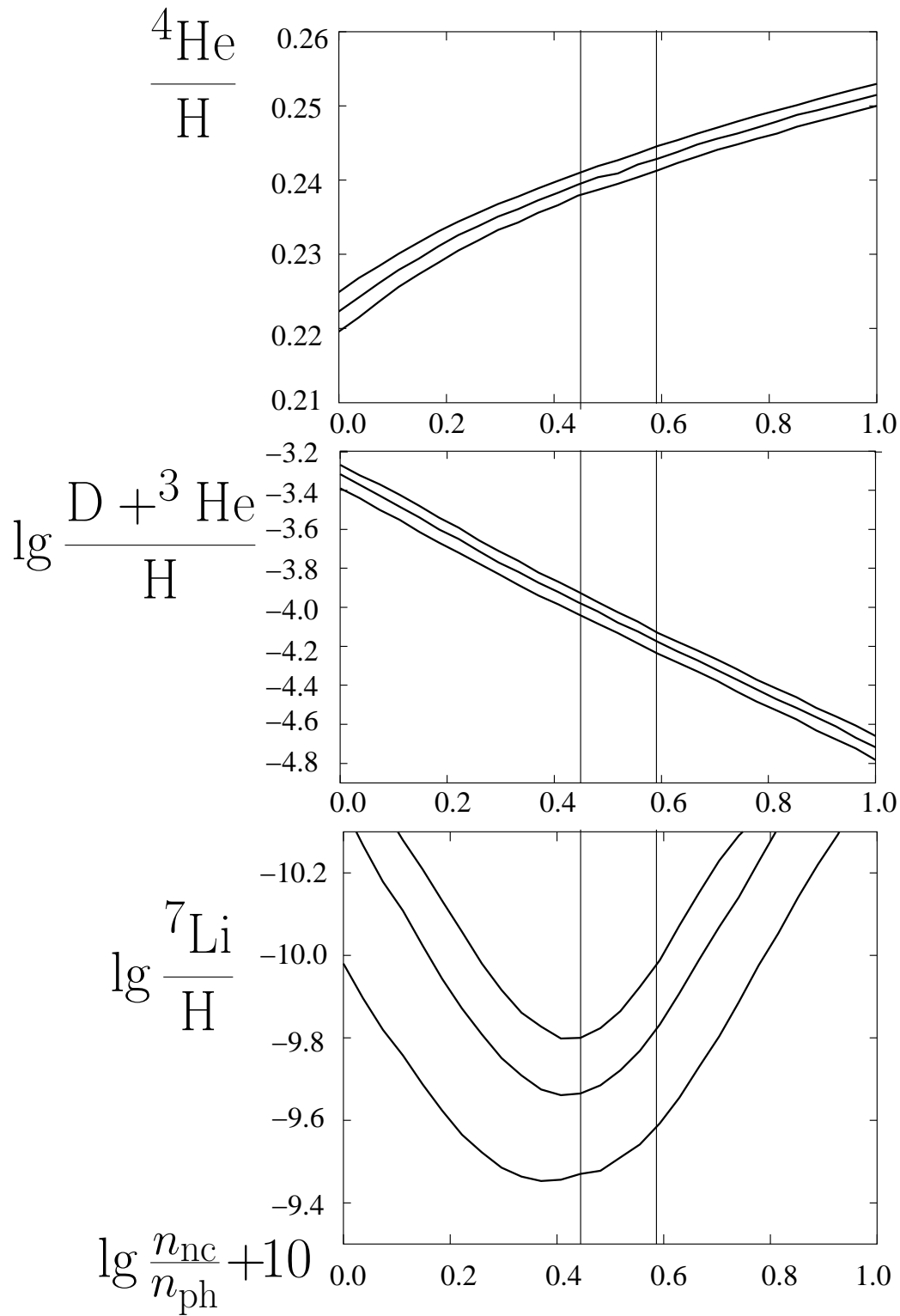


Рис. 7: Содержания первичных гелия, дейтерия и лития в зависимости от значения  $\eta_{10}$ .

и Пуассона. Добавим к этим уравнениям условие сохранения энтропии и напишем получившуюся систему в форме, приведенной в книге Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (157)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \varphi = 0, \quad (158)$$

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho, \quad (159)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) S = 0. \quad (160)$$

Здесь использованы обычные обозначения:  $\rho$  — плотность вещества,  $\vec{v}$  — его скорость,  $P$  — давление,  $\varphi$  — гравитационный потенциал,  $G$  — постоянная тяготения,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $S$  — энтропия единицы массы. Градиенты и дивергенции берутся по координатам, составляющим радиус-вектор  $\vec{r}$ ,  $t$  — время. Вакуум Джинс учитывать не мог.

Стационарными (невозмущенными) решениями уравнений (157)–(160) принимались

$$\rho = \rho_o = \text{const}, \quad S = S_o = \text{const}, \quad \vec{v} = 0, \quad \varphi = \varphi_o = \text{const}, \quad P = P_o = P(\rho_o, S_o). \quad (161)$$

Здесь и далее индекс  $o$  относится к невозмущенным величинам.

Сразу же отметим притворение в рассуждениях Джинса. Он считал, что гравитационный потенциал  $\varphi_o$  постоянен, то есть не зависит от координат, что может быть принято в уравнении движения (158), но не согласуется с уравнением Пуассона (159).

Примем, что возмущения всех величин имеют гармонический характер, то есть

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_o + \rho_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (162)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (163)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_o + \varphi_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (164)$$

$$S(\vec{r}, t) = S_o + S_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (165)$$

Такое представление равносильно разложению произвольных возмущений в интегралы Фурье и выбору моды с одним волновым числом. Волновой вектор будем считать закрепленным.

Комплексный вид возмущений не приводит ни к каким трудностям. Можно считать, что физический смысл имеют вещественные части решений, как это делается в электродинамике при рассмотрении распространения монохроматических или плоских волн.

Поскольку давление является функцией плотности и энтропии, разложим его согласно формуле Тейлора первого порядка:

$$P = P_o + \frac{\partial P}{\partial \rho}(\rho - \rho_o) + \frac{\partial P}{\partial S}(S - S_o) = P_o + [c_s^2 \rho_1(t) + b^2 S_1(t)] e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (166)$$

Здесь  $c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\bigg|_S}$  — скорость звука. Присутствие обозначения  $S$  у знака частной производной указывает на то, что эта производная вычисляется при постоянной энтропии. Какие переменные закреплены в равенстве (166), очевидно.

2. *Линейное приближение.* Подставим равенства (162)–(166) в уравнения (157)–(160) и ограничимся слагаемыми только первого порядка по возмущениям. Уравнения для возмущений получаются, конечно, линейными, точкой обозначается производная по времени:

$$\dot{\rho}_1 + i\rho_o \vec{v}_1 \vec{k} = 0, \quad (167)$$

$$\dot{\vec{v}}_1 + i\vec{k} \left( \varphi_1 + c_s^2 \frac{\rho_1}{\rho_o} + b^2 \frac{S_1}{\rho_o} \right) = 0, \quad (168)$$

$$-k^2 \varphi_1 = 4\pi G \rho_1, \quad (169)$$

$$\dot{S}_1 = 0. \quad (170)$$

Наиболее просто интегрируется последнее уравнение:  $S_1 = S_1^0 = \text{const}$ .

Предположим далее, что возмущения всех величин от времени зависят одинаково, а именно — экспоненциально:

$$\rho_1(t) = \rho_1^* e^{\omega t}, \quad \vec{v}_1(t) = \vec{v}_1^* e^{\omega t}, \quad \varphi_1(t) = \varphi_1^* e^{\omega t}, \quad S_1(t) = S_1^* e^{\omega t}. \quad (171)$$



При подстановке этих формул в уравнения (167)–(170) производные по времени заменяются на  $\omega$ , экспоненциальный множитель сокращается и уравнения принимают форму:

$$\omega\rho_1^* + i\vec{k}\vec{v}_1^*\rho_o = 0, \quad (172)$$

$$\omega\vec{v}_1^* + i\vec{k}\left(\varphi_1^* + c_s^2\frac{\rho_1^*}{\rho_o} + b^2\frac{S_1^*}{\rho_o}\right) = 0, \quad (173)$$

$$-k^2\varphi_1^* = 4\pi G\rho_1^*, \quad (174)$$

$$\omega S_1^* = 0. \quad (175)$$

Последнее уравнение написано в общей форме, хотя его решение уже известно. Однако, такая запись позволяет разграничить случаи, когда  $S_1^*$  равно и не равно нулю. Рассмотрим эти случаи отдельно.

3. *Случай*  $S_1^* = 0$ . Возмущения являются адиабатическими, так как энтропия не изменяется. Все остальные возмущения могут зависеть от времени, то есть  $\omega \neq 0$ . Из уравнения (173) следует, что амплитуда возмущения скорости параллельна волновому вектору, так что можно положить

$$\vec{v}_1^* = v_1^*\frac{\vec{k}}{k}. \quad (176)$$

Обозначим для краткости  $\delta = \frac{\rho_1^*}{\rho_o}$ . Система (172)–(174) перейдет в

$$\omega\delta + ikv_1^* = 0, \quad (177)$$

$$ikc_s^2\delta + \omega v_1^* + ik\varphi_1^* = 0, \quad (178)$$

$$4\pi G\rho_o\delta + k^2\varphi_1^* = 0. \quad (179)$$

Это система трех линейных алгебраических уравнений. Так как она однородна, для существования ее нетривиального (ненулевого) решения необходимо обращение в нуль определителя системы, то есть

$$\det \begin{vmatrix} \omega & ik & 0 \\ ikc_s^2 & \omega & ik \\ 4\pi G\rho_o & 0 & k^2 \end{vmatrix} = \omega^2k^2 - 4\pi G\rho_o k^2 + c_s^2k^4 = 0. \quad (180)$$

Сокращая на  $k^2$ , находим, что решение существует при выполнении равенства

$$\omega^2 = 4\pi G\rho_o - k^2c_s^2. \quad (181)$$

Характер решения зависит от знака правой части. Рассмотрим два случая.

1)  $4\pi G\rho_o > k^2c_s^2$ . Это может быть, когда  $k < k_J$ , где

$$k_J = \frac{\sqrt{4\pi G\rho_o}}{c_s}. \quad (182)$$

Тогда показатель  $\omega$  вещественен и имеет два значения

$$\omega = \pm\sqrt{4\pi G\rho_o - k^2c_s^2}. \quad (183)$$

Отрицательный показатель означает экспоненциальное убывание возмущений, а положительный — экспоненциальный рост со временем до тех пор, пока возмущения становятся не малыми и теория, следовательно, неприменимой. При отрицательности показателя его модуль называется декрементом, положительный показатель называют инкрементом.

При заданном значении вещественного показателя  $\omega$  амплитуды возмущений могут быть комплексными. Физический смысл имеют вещественные части этих комплексных выражений:

$$\rho_1 = \Re\left(\rho_1^*e^{\omega t + i\vec{k}\vec{r}}\right) = |\rho_1^*| \cos(\vec{k}\vec{r} + \arg(\rho_1^*))e^{\omega t}, \quad \varphi_1 = -\frac{4\pi G}{k^2}\rho_1, \quad (184)$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\omega}{k}\frac{\vec{k}}{k}|\delta| \cos\left(\vec{k}\vec{r} + \arg(\rho_1^*) + \frac{\pi}{2}\right)e^{\omega t} = -\frac{\omega}{k}\frac{\vec{k}}{k}|\delta| \sin\left(\vec{k}\vec{r} + \arg(\rho_1^*)\right)e^{\omega t}. \quad (185)$$

Амплитуда  $|\rho_1^*|$  и фаза  $\arg(\rho_1^*)$  могут быть произвольными (амплитуда ограничена), так что при каждом  $\omega$  существует два решения, а всего — с отрицательным и положительным  $\omega$  — четыре. Все такие возмущения имеют характер стоячих волн. Возмущения потенциала имеют ту же фазу, что и возмущения плотности, а фаза возмущений скорости отличается на  $\pi/2$ .

2)  $4\pi G\rho_o < k^2 c_s^2$ . Этот случай осуществляется при  $k > k_J$ . Показатель  $\omega$  — чисто мнимое число, обозначим его в соответствии с принятым в электродинамике соглашением

$$\omega = -i\omega_*, \quad \omega_* = \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G\rho_o} > 0. \quad (186)$$

Тогда возмущения примут вид плоских волн:

$$\rho_1 = \rho_1^* e^{-i\omega_* t + i\vec{k}\vec{r}}, \quad \vec{v}_1 = \frac{\omega_* \vec{k}}{k} \frac{\rho_1}{\rho_o}, \quad \varphi_1 = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_1. \quad (187)$$

Здесь амплитуда  $\rho_1^*$  может быть комплексной, что обеспечивает наличие двух линейно независимых решений уравнений. Для их выявления необходимо взять вещественную часть решений (187):

$$\rho_1 = |\rho_1^*| \cos\left(\omega_* t - \vec{k}\vec{r} - \arg(\rho_1^*)\right), \quad \vec{v}_1 = \frac{\omega_* \vec{k}}{k} \frac{\rho_1}{\rho_o}, \quad \varphi_1 = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_1. \quad (188)$$

Изменение знака  $\omega_*$  равносильно изменению направления вектора  $\vec{k}$  и фазы волны на противоположные.

В пределе больших волновых чисел  $k \gg k_J$  (малых длин волн) оказывается  $\omega_* = c_s k$ . Возмущения (188) обращаются в звуковые волны с фазовой скоростью  $c_s$ .

Таким образом, в первом случае, при волновых числах  $k < k_J$ , происходит либо сжатие, либо рост возмущений, а во втором, когда эти числа больше  $k_J$  возмущения колеблются.

Заметим, что фазу  $\arg(\rho_1^*)$  при фиксированном  $\vec{k}$  можно устранить изменением начала отсчета времени, однако этого нельзя сделать для всех  $\vec{k}$  сразу.

4. *Случай энтропийных возмущений.* Если  $S_1^* \neq 0$ , то  $\omega = 0$ , то есть все возмущения не зависят от времени. Уравнения (173)–(174) переходят в

$$\vec{v}_1^* \vec{k} = 0, \quad \varphi_1^* + c_s^2 \delta + b^2 \frac{S_1^*}{\rho_o} = 0, \quad \varphi_1^* = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_1^* = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_o \delta. \quad (189)$$

Здесь опять возможны два подслучая.

1)  $v_1^* = 0$ . Тогда

$$\delta = -\frac{S_1^*}{\rho_o} \frac{b^2}{c_s^2 - 4\pi G\rho_o/k^2}, \quad \rho_1^* = S_1^* \frac{b^2}{c_s^2} \frac{1}{k_J^2/k^2 - 1}. \quad (190)$$

Если при этом  $k \gg k_J$ , то

$$c_s^2 \rho_1^* + b^2 S_1^* = 0 \quad \text{или} \quad \rho_1^* = -S_1^* \frac{b^2}{c_s^2}. \quad (191)$$

Как видно из формулы (166), при выполнении такого условия давление остается постоянным:  $P = P_0$ .

2)  $v_1^* \neq 0$ . Тогда вектор скорости  $\vec{v}_1 = \vec{v}_1^* e^{i\vec{k}\vec{r}}$  перпендикулярен волновому вектору:  $\vec{v}_1 \perp \vec{k}$ . Дивергенция скорости

$$\vec{\nabla} \vec{v}_1 = i\vec{k}\vec{v}_1 = 0, \quad (192)$$

в то же время ее ротор нулю не равен:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}_1 = i\vec{v}_1 \times \vec{k} \neq 0, \quad (193)$$

поэтому такие возмущения называются вихревыми. Так как имеется две перпендикулярных вектору  $\vec{k}$  компоненты скорости, существует два линейно независимых вихревых возмущения.

5. *Типы возмущений и критерий Джинса.* Итак, существуют следующие типы возмущений и их развития: по два набора линейно независимых растущих и убывающих со временем возмущений, а также два колеблющихся, всего шесть адиабатических возмущений, одно энтропийное возмущение с неизменяющейся скоростью и два вихревых — всего три типа. Общее число — девять независимых возмущений пяти типов.

Граничное значение  $k_J$ , определяемое формулой (182) и разделяющее два подслучая, рассмотренных в пункте 3, называется волновым числом Джинса. Ему соответствуют длина волны Джинса

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_o}} \quad (194)$$

и джинсовская масса

$$M_J = \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 \rho_o = \left(\frac{c_s}{2}\right)^3 \left(\frac{\pi}{G}\right)^{3/2} \rho_o^{-1/2} = \mathcal{B} \frac{c_s^3}{\sqrt{\rho_o}}, \quad \mathcal{B} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{G}\right)^{3/2} = 4.0368 \cdot 10^{10} \text{ г}^3 / \text{см}^9. \quad (195)$$

Длина волны характеризует тот размер области, который является критичным по отношению к характеру поведения возмущений. Критерий Джинса по отношению к массе звучит так: если масса больше джинсовской, возмущения растут или склопываются, при массе, меньшей джинсовской, — колеблются.

Нерассмотренный случай  $k = k_J$  исключался во всех пунктах. При таком значении волнового числа обращается в нуль частота  $\omega$  и обращаются в бесконечность амплитуды возмущений при тождественном обращении  $\omega$  в нуль. Поэтому случай  $k = k_J$ , когда  $4\pi G\rho_0 = c_s^2 k^2$ , рассмотрим отдельно. Начнем с исходных уравнений для возмущений (167)–(170) при этом условии и заменим в третьем из них  $4\pi G$  на  $c_s^2 k^2 / \rho_0$ . Тогда  $\varphi_1 = -c_s^2 \rho_1 / \rho_0$ , второе уравнение после подстановки в него  $\varphi_1$  упрощается (согласно четвертому  $S_1 = S_1^*$ ) и уравнения интегрируются:

$$\dot{v}_1 = -i\vec{k}b^2 \frac{S_1^*}{\rho_0}, \quad \dot{v}_1 = -i\vec{k}b^2 \frac{S_1^*}{\rho_0} t, \quad \rho_1 = -k^2 b^2 S_1^* \frac{t^2}{2} = -4\pi G \rho_0 \frac{b^2}{c_s^2} S_1^* \frac{t^2}{2}. \quad (196)$$

Таким образом, в этом предельном случае волнового числа возмущения энтропийные и растут неограниченно при  $t \rightarrow \infty$  (конечно, до тех пор, пока возмущения остаются малыми), но не экспоненциально, а степенным образом: возмущение скорости линейно, а плотности квадратично.

6. *Критические массы Джинса.* Оценим величины критической массы Джинса в различные эпохи расширения Вселенной. В этом пункте, как и раньше, ноликом отмечаются значения величин в современную эпоху, в частности,  $T = T_0(1+z)$ ,  $\rho = \rho_0(1+z)^3$ , где  $z$  — космологическое красное смещение.

1) Эра радиационно доминированной плазмы (РДП). Основные величины, в частности давление  $P = P_r$  и плотность  $\rho = \rho_r$ , определяются излучением:

$$\rho_r = \frac{a_{\text{SB}}}{c^2} T^4, \quad P_r = \frac{c^2 \rho_r}{3}. \quad (197)$$

Скорость звука при этом

$$c_s^2 = \frac{\partial P_r}{\partial \rho_r} = \frac{\partial}{\partial \rho_r} \frac{1}{3} c^2 \rho_r = \frac{c^2}{3}, \quad c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}, \quad (198)$$

так что

$$M_J = \mathcal{B} \frac{c_s^3}{\sqrt{\rho_r}} = \frac{\mathcal{B} c^4}{\sqrt{27} \sqrt{a_{\text{SB}} T_0^2 (1+z)^2}} \approx \frac{10^{58}}{(1+z)^2} = \frac{5 \cdot 10^{24}}{(1+z)^2} M_\odot, \quad (199)$$

где  $M_\odot = 2 \cdot 10^{33} z$  — масса Солнца. Красное смещение в течение эры РДП изменяется от  $\approx 25000$  до  $2 \cdot 10^9$ , так что  $M_J = 8 \cdot 10^{15} M_\odot \div 1.25 \cdot 10^6 M_\odot$ . Верхняя граница соответствует массе богатого скопления галактик, нижняя — ядру нашей Галактики.

2) Эпоха пылевидного вещества. Как отмечалось в первом разделе, давление вещества не вносит вклада в плотность энергии и массы, однако в эпохи, близкие к эре РДП, давление существенно в других вопросах. Вещество можно считать идеальным газом с давлением, плотностью массы и энтропией на единицу массы

$$P = \frac{N}{V} k_B T, \quad \rho = m_H \frac{N}{V}, \quad S = \frac{k_B}{m_H} \left[ \frac{5}{2} - \ln \left( \frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi m_H k_B T)^{3/2}} \right) \right]. \quad (200)$$

Здесь  $N$  — полное число частиц в объеме  $V$ ,  $m_H$  — масса атома водорода (протона). Поскольку процесс космологического расширения адиабатический, энтропия должна быть постоянной, то есть постоянно  $N$  и произведение  $s = VT^{3/2} = s(S)$ , являющееся функцией от энтропии. Выражение давления через плотность и  $s$  представляет уравнение адиабаты

$$P = \frac{\rho}{m_H} k_B \left( \frac{s}{V} \right)^{2/3} = \frac{\rho}{m_H} k_B \left( \frac{s\rho}{m_H N} \right)^{2/3} = \mathcal{A}(S) \rho^{5/3}, \quad \mathcal{A}(S) = \frac{k_B}{m_H^{5/3}} \left( \frac{s(S)}{N} \right)^{2/3}. \quad (201)$$

Коэффициент  $\mathcal{A}(S)$  называется энтропийной константой.

Скорость звука согласно формуле после равенства (166) получается

$$c_s^2 = \frac{5}{3} \mathcal{A}(S) \rho^{2/3} = \frac{5}{3} \frac{P}{\rho} = \frac{5}{3} \frac{k_B T}{m_H}, \quad c_s = \sqrt{\frac{5}{3} \frac{k_B T}{m_H}}. \quad (202)$$

Таким образом, масса Джинса

$$M_J = \frac{1}{8} \left( \frac{5\pi}{3} \frac{k_B T}{G m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho^{1/2}} = \frac{1}{8} \left( \frac{5\pi}{3} \frac{k_B T_0}{G m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho_0^{1/2}}, \quad (203)$$

где  $\rho_0$  — современная плотность пылевидного вещества. Согласно наиболее адекватной космологической модели  $\Omega_d^0 = 0.28$ ,  $\rho_0 = \Omega_d^0 \rho_c^0 = 0.28 \cdot 8 \cdot 10^{-30} = 2.24 \cdot 10^{-30} z / \text{см}^3$ , так что

$$M_J = 2 \cdot 10^{38} z = 10^5 M_\odot. \quad (204)$$

Это характерная масса шарового скопления звезд.

В теории образования крупномасштабной структуры задается спектр начальных возмущений плотности и тем самым спектр масс отдельных объектов.

### § 3. Возмущения космологического вещества

1. *Невозмущенное состояние при космологическом расширении.* Откажемся от постоянства невозмущенных решений и примем, что плотность, скорость, потенциал и давление в невозмущенном состоянии зависят от времени, подчиняясь космологическому расширению. Возьмем эти величины в форме

$$\rho = \rho_o(t), \quad \vec{v}_o = H(t)\vec{r}, \quad \varphi_o = \frac{2\pi G}{3}\rho_g^o(t)r^2, \quad P = P_o = 0, \quad \rho_g^o = \rho_o - \frac{c^2}{4\pi G}\Lambda. \quad (205)$$

Равенство нулю давления означает, что излучение во внимание не принимается, а вещество считается пылевидным (индекс d не пишем). В то же время космологическое слагаемое учитывается. Без космологического слагаемого теория была развита В. Боннором (1957).

Убедимся, что так выбранные величины действительно соответствуют космологическим решениям. Для этого подставим (205) в уравнения вида (157)–(158), переписав их с учетом вакуума:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0, \quad (206)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\varphi = 0, \quad (207)$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho_g, \quad \rho_g = \rho + 3\frac{P}{c^2} - \frac{c^2}{4\pi G}\Lambda. \quad (208)$$

Здесь принято, что энтропия не изменяется. Из (206) и (207) получим соответственно

$$\dot{\rho}_o + \vec{\nabla}(\rho_o H\vec{r}) = \dot{\rho}_o + \rho_o H\vec{\nabla}(\vec{r}) = \dot{\rho}_o + \rho_o H3 = 0 \quad \text{или} \quad \dot{\rho}_o = -3\rho_o H, \quad (209)$$

$$\dot{\vec{v}}_o + H^2(\vec{r}\vec{\nabla})\vec{r} + \frac{1}{\rho_o}0 + \frac{2\pi G}{3}\rho_g^o 2\vec{r} = 0 \quad \text{или} \quad \dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho_g^o. \quad (210)$$

Уравнение (209) совпадает с соотношением (37) при  $P = 0$ . Равенство (210) следует из уравнения (39).

Проверим уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi_o = \frac{2\pi G}{3}\rho_g^o(t)\Delta r^2 = 4\pi G\rho_g^o(t). \quad (211)$$

При преобразовании уравнений (210) и (211) были использованы тождества  $(\vec{r}\vec{\nabla})\vec{r} = \vec{r}$  и  $\Delta r^2 = 6$ .

Проделанные выкладки показывают, что простейшую космологическую модель можно было бы построить, исходя из ньютоновской гидродинамики и уравнения Пуассона.

2. *Возмущения в эйлеровых и лагранжевых координатах.* Возмущения плотности, скорости и потенциала возьмем в том же виде, что и в теории Джинса (162)–(164), но будем считать, что пространственный масштаб со временем меняется: все расстояния пропорциональны радиусу кривизны:

$$\vec{r} = R(t)\vec{x}. \quad (212)$$

Поэтому производные по координатам надо вычислять с учетом изменения их со временем. Строго говоря, для искривленного пространства это не такая простая процедура. В ньютоновском приближении  $\vec{r}$  — это эйлеровы, а  $\vec{x}$  — лагранжевы координаты. Следовало бы пересчитать величины (205) и производные в уравнениях (206)–(208) к лагранжевым координатам, что сделать очень просто. Закон стационарного расширения от этого не изменится.

Далее представим снова возмущения в гармоническом виде через лагранжевы координаты, то есть будем их считать пропорциональными экспоненте от  $i\vec{x}\vec{x}$ . Однако вместо использования лагранжевых координат, ограничиваясь ньютоновским приближением, оставим реальные (измеряемые) расстояния  $\vec{r}$  как бы неизменными, а зависимость от времени перенесем на волновой вектор, считая, что его длина обратно пропорциональна  $R(t)$ , то есть положим

$$\vec{k}(t) = \frac{\vec{\varkappa}}{R(t)}, \quad \vec{\varkappa} = \text{const}, \quad \dot{\vec{k}} = -\vec{k}H, \quad \vec{\varkappa}\vec{x} = \vec{k}\vec{r}, \quad \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\vec{\varkappa}}{\varkappa}. \quad (213)$$

Нетрудно убедиться, что такой прием в данном случае равносильно использованию лагранжевых координат, но позволяет не пересчитывать производные в уравнениях.

Итак, распишем наши возмущенные величины, для простоты приняв, что возмущение скорости параллельно волновому вектору, то есть это продольные волны:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_o(t) + \rho_1(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (214)$$

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_o(t) + v_1(t)\frac{\vec{\alpha}}{\alpha}e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (215)$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_o(t) + \varphi_1(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}. \quad (216)$$

Подчеркнем еще раз, что хотя экспонента написана в виде  $e^{i\vec{k}\vec{r}}$ , однако надо не забывать, что  $\vec{k}$  зависит от времени.

Несмотря на то, что в невозмущенном состоянии пылевое вещество не оказывает давления, возмущение давления вслед за изложенным в книге [1] примем во внимание. При этом изменениями энтропии пренебрежем, так что давление возьмем в виде  $P = c_s^2 \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}}$ . Введем еще обозначение для отношения  $\delta(t) = \frac{\rho_1(t)}{\rho_o(t)}$ , несколько отличающееся от прежнего.

3. *Уравнения для возмущений.* Подстановка разложений (214)–(216) в уравнения (157)–(159) приводит к уравнениям для возмущений. Получим их, приведя выкладки. Для слагаемых уравнения неразрывности получаем

$$\dot{\rho} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_o + \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}}) = \dot{\rho}_o + \dot{\rho}_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} - \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k}\vec{r}H, \quad \rho_1 = \rho_o \delta, \quad \dot{\rho}_1 = \dot{\rho}_o \delta + \rho_o \dot{\delta}, \quad (217)$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) &= \vec{\nabla} \left( \rho_o \vec{v}_o + \rho_1 \vec{v}_o e^{i\vec{k}\vec{r}} + \rho_o v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) = \vec{\nabla} \left( \rho_o H \vec{r} + \rho_1 H \vec{r} e^{i\vec{k}\vec{r}} + \rho_o v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) = \\ &= 3\rho_o H + 3\rho_1 H e^{i\vec{k}\vec{r}} + \left( \rho_1 H \vec{r} + \rho_o v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} \right) e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k}. \end{aligned} \quad (218)$$

Учитывая уравнение для невозмущенной плотности, находим

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) &= -3\rho_o H + (-3\rho_o H \delta + \rho_o \dot{\delta}) e^{i\vec{k}\vec{r}} - \rho_o \delta e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k}\vec{r}H + 3\rho_o H + 3\rho_o \delta H e^{i\vec{k}\vec{r}} + \\ &+ \left( \rho_o \delta H \vec{r} + \rho_o v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} \right) e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k} = 0, \quad \text{так что } \dot{\delta} = -ikv_1. \end{aligned} \quad (219)$$

Уравнение для возмущения скорости из уравнения движения выводится аналогично. Его слагаемые

$$\dot{\vec{v}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{v}_o + v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) = - \left( H^2 + \frac{4\pi G}{3} \rho_g^o \right) \vec{r} + \dot{v}_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} - v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} i(\vec{k}\vec{r})H, \quad (220)$$

$$(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{v}_o \vec{\nabla})\vec{v}_o + v_1 \left[ e^{i\vec{k}\vec{r}} \left( \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} \vec{\nabla} \right) \vec{v}_o + (\vec{v}_o \vec{\nabla}) \left( \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) \right] = H^2 \vec{r} + v_1 H e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} + H v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} i(\vec{k}\vec{r}), \quad (221)$$

$$\vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla} \left( \varphi_o + \varphi_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) = \frac{2\pi G}{3} \rho_g^o 2\vec{r} + \varphi_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k}, \quad \vec{\nabla}P = \vec{\nabla} \left( P_o + c_s^2 \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} \right) = c_s^2 \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k}. \quad (222)$$

Подстановка всего этого в левую часть уравнения (158) дает

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla}P + \vec{\nabla}\varphi &= - \left( H^2 + \frac{4\pi G}{3} \rho_g^o \right) \vec{r} + \dot{v}_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} - v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} i(\vec{k}\vec{r})H + H^2 \vec{r} + v_1 H e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} + \\ &+ H v_1 \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} i(\vec{k}\vec{r}) + c_s^2 \delta e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k} + \frac{4\pi G}{3} \rho_g^o \vec{r} + \varphi_1 e^{i\vec{k}\vec{r}} i\vec{k} = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha} e^{i\vec{k}\vec{r}} (\dot{v}_1 + v_1 H + c_s^2 ik\delta + \varphi_1 ik) = 0. \end{aligned} \quad (223)$$

Из уравнения Пуассона находим

$$\Delta\varphi = \Delta(\varphi_o + \varphi_1 e^{i\vec{k}\vec{r}}) = 4\pi G \rho_g^o - \varphi_1 k^2 e^{i\vec{k}\vec{r}} = 4\pi G \rho_g^o + e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{P_1}{c^2} + 4\pi G \rho_1 e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad (224)$$

$$\varphi_1 = - \frac{4\pi G}{k^2} \left( \rho_1 + 3 \frac{c_s^2}{c^2} \rho_1 \right) = - \frac{4\pi G \rho_o}{k^2} \delta \left( 1 + 3 \frac{c_s^2}{c^2} \right). \quad (225)$$

Отношением скорости звука к скорости света можно пренебречь. Окончательно, уравнение движения сводится к

$$\dot{v}_1 + v_1 H = \frac{i}{k} (4\pi G \rho_o - c_s^2 k^2) \delta. \quad (226)$$

Из двух уравнений (219) и (226) исключим скорость

$$v_1 = \frac{i}{k} \dot{\delta} = \frac{i}{\alpha} R(t) \dot{\delta}, \quad \dot{v}_1 = \frac{i}{k} \ddot{\delta} + \frac{i}{\alpha} \dot{R} \dot{\delta} = \frac{i}{k} \ddot{\delta} + \frac{i}{k} H \dot{\delta} \quad (227)$$

и получим одно уравнение второго порядка для  $\delta$ :

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - (4\pi G\rho_0 - c_s^2 k^2)\delta = 0. \quad (228)$$

Коэффициенты уравнения содержат  $\rho_0$ ,  $H$  и  $c_s$ , то есть зависят от выбранной космологической модели и от уравнения состояния вещества.

4. *Критерий устойчивости в частном случае.* Для прояснения принципиального вопроса, насколько близки критерии устойчивости Джинса и рассматриваемый в этом разделе, в книге [1] предложены два упрощения. Во-первых, принято уравнение состояния вида  $P \propto \rho^{4/3}$ . Тогда скорость звука  $c_s = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2} \propto \rho^{1/6}$ . Во-вторых, принята плоская модель пылевидного вещества, при которой выполняются зависимости

$$\rho_0 = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2}, \quad R = R_* t^{2/3}, \quad k = k_* t^{-2/3}, \quad H = \frac{2}{3} \frac{1}{t}, \quad c_s = c_* t^{-1/3}. \quad (229)$$

Тогда уравнение (228) приводится к виду уравнения Эйлера

$$t^2 \ddot{\delta} + \frac{4}{3} t \dot{\delta} - \left(\frac{2}{3} - c_*^2 k_*^2\right) \delta = 0, \quad (230)$$

которое подстановкой  $t = e^u$  сводится к уравнению с постоянными коэффициентами. Решением уравнения (230) являются степенные функции:

$$\delta = \delta_* t^n, \quad v_1 = v_1^0 t^{n-1/3}, \quad n = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - c_*^2 k_*^2}. \quad (231)$$

Вещественным показатель  $n$  является при  $k_* < k_{\text{cr}}^*$  и  $k < k_{\text{cr}}$ , где

$$k_{\text{cr}}^* = \frac{5}{6} \frac{1}{c_*}, \quad k_{\text{cr}} = k_{\text{cr}}^* t^{-2/3} = \frac{5}{6} \frac{1}{c_*} t^{-2/3}. \quad (232)$$

Соответствующая критическая длина волны

$$\lambda_{\text{cr}} = \frac{2\pi}{k_{\text{cr}}} = \frac{6}{5} 2\pi c_* t^{2/3} = \frac{6}{5} 2\pi c_s t. \quad (233)$$

Длина волны Джинса в рассматриваемом случае согласно формуле (194)

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} = c_* t^{-1/3} \sqrt{\frac{\pi 6\pi G t^2}{G}} = c_* t^{-1/3} t \pi \sqrt{6} = \sqrt{\frac{3}{2}} 2\pi c_* t^{2/3} = \sqrt{\frac{3}{2}} 2\pi c_s t. \quad (234)$$

Величины  $\lambda_{\text{cr}}$  и  $\lambda_J$  различаются только численными коэффициентами, причем эти коэффициенты очень близки:  $\frac{6}{5} = 1.2$ , а  $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1.224745$ . Таким образом, неточная теория Джинса дает в рассмотренном случае почти то же, что и точная теория: относительное различие критических размеров составляет 2%.

5. *Большие  $\lambda$ .* Заметим, что в пределе больших длин волн, то есть малых волновых чисел  $k$ , уравнение (228) переходит в

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_0\delta = 0. \quad (235)$$

Его решения могут быть найдены в аналитической форме, а именно в квадратурах. Действительно, одним из его решений является  $\delta = H$ . Это следует из соотношения (210), дифференцируя которое по времени, находим

$$\ddot{H} = -\frac{4\pi G}{3} \dot{\rho}_0 - 2H\dot{H} = 4\pi G\rho_0 H - 2H\dot{H}. \quad (236)$$

Второе решение, линейно не зависящее от первого, находим методом вариации постоянной и получаем

$$\delta \propto H \int_0^t \frac{dt}{\dot{R}^2} = H \int_0^{R(t)} \frac{dR}{\dot{R}^3}. \quad (237)$$

Входящая сюда производная от радиуса кривизны находится из уравнения (23). Она же определяет неявную зависимость радиуса кривизны от времени, которая была найдена выше и представлена формулой (119).

Функции  $\delta = H$  и (237) представляют фундаментальную систему решений однородного уравнения (235), поведение которой обсудим ниже.

## § 4. Теория блинов Зельдовича

1. *Способ описания возмущений.* В линейной теории возмущений предполагается, что возмущенные величины мало отличаются от невозмущенных и уравнения (157)–(159) линеаризуются по возмущениям. Однако, плотность в возмущенных областях, каковыми являются объемы, занимаемые галактиками и скоплениями галактик, во много раз превосходит среднюю плотность вещества во Вселенной. Поэтому линейная теория недостаточна. В то же время нелинейные уравнения долго с трудом поддавались решению, тем более аналитическими методами.

Я. Б. Зельдович предложил подход, позволивший получить качественные результаты аналитически, не накладывая ограничений на величину возмущений. Он предположил, что возмущения происходят в координатах частиц вещества, то есть возмущенные декартовы координаты следует искать в виде

$$x = R(t)x_1 + \delta_x(t, x_1), \quad y = R(t)x_2, \quad z = R(t)x_3, \quad (238)$$

где  $R(t)$  — невозмущенный радиус кривизны, зависящий от времени,  $\delta_x$  — возмущение абсциссы,  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  — вектор новых пространственных координат, которых при возмущении необходимо три, в то время как в однородном пространстве достаточно было одной. Напомним: в Стандартной модели полагают  $r = R(t) \operatorname{sn}_k(\chi)$ , что возможно, так как расширение пространства происходит во всех направлениях одинаково и угловые переменные не меняются. Три координаты  $x_1, x_2, x_3$  могут принимать любые значения, положительные и отрицательные.

Физический смысл координат  $\vec{x}$  в том, что они стоят множителями при определяющей ход расширения величине  $R(t)$ , то есть в данный момент времени фиксированные их значения связываются с определенной точкой пространства и при отсутствии возмущений декартовы координаты точки пропорциональны  $R(t)$ , а координаты  $\vec{x}$  не меняются. Их можно считать лагранжевыми координатами в отличие от эйлеровых декартовых координат  $\vec{r}$ .

Возмущение координат приводит к возмущениям других величин. Теория основана на тех же ньютоновских уравнениях гидродинамики (206)–(208), но давление не учитывается совсем, то есть возмущается пылевидное вещество. Прежде чем пытаться решать уравнения, сделаем замену переменных, а именно, вместо эйлеровых декартовых координат используем лагранжевы координаты.

2. *Преобразование координат.* Время при замене координат (238) не изменяется. Однако производные по времени при эйлеровых и лагранжевых координатах различаются. Действительно, закрепление эйлеровых координат означает, что закреплена определенная точка в пространстве и время относится к ней. Точка же с закрепленными лагранжевыми координатами движется, ее эйлеровы координаты изменяются согласно уравнениям (238). Поэтому удобно ввести два времени, совпадающие между собой, но относящиеся к разным наборам координат и имеющие разные обозначения.

Таким образом, для выполнения преобразования координат к уравнениям, связывающим эйлеровы  $\vec{r}$  и лагранжевы  $\vec{x}$  координаты, добавим еще одно уравнение, связывающее времена, соответствующие старым  $t$  и новым  $t'$  координатам. Таким образом, полная замена переменных выглядит так:

$$x = R(t')x_1 + \delta_x(t', x_1), \quad y = R(t')x_2, \quad z = R(t')x_3, \quad t = t'. \quad (239)$$

Здесь координаты  $\vec{r}$  не зависят от времени  $t$ , но зависят от времени  $t'$ , а координаты  $\vec{x}$  не изменяются со временем  $t'$ , как будто прикрепленные к “частице”, вовлеченной в расширение пространства, но зависят от времени  $t$ .

Пересчитаем производные от старых переменных к новым. Для краткости производную по времени отмечаем по-прежнему точкой, а производную по координате  $x_1$  — штрихом.

Сначала продифференцируем равенства (239) по времени  $t$ :

$$0 = R(t') \frac{\partial x_1}{\partial t} + x_1 \dot{R}(t') + \dot{\delta}_x(t', x_1) + \delta'_x(t', x_1) \frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad 0 = R(t') \frac{\partial x_2}{\partial t} + x_2 \dot{R}(t'), \quad 0 = R(t') \frac{\partial x_3}{\partial t} + x_3 \dot{R}(t'). \quad (240)$$

Отсюда находим

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = -\frac{\dot{R}(t')x_1 + \dot{\delta}_x(t', x_1)}{R(t') + \delta'_x(t', x_1)}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial t} = -H(t')x_2, \quad \frac{\partial x_3}{\partial t} = -H(t')x_3. \quad (241)$$

С помощью этих равенств выражаем производную по старому времени через новые (лагранжевы) координаты и время

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\dot{R}(t')x_1 + \dot{\delta}_x(t', x_1)}{R(t') + \delta'_x(t', x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} - H(t')x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - H(t')x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (242)$$

Производные по координатам связаны проще. Дифференцируя равенства (239) соответственно по  $x, y$  и  $z$ , находим

$$1 = [R(t') + \delta'_x(t', x_1)] \frac{\partial x_1}{\partial x}, \quad 1 = R(t') \frac{\partial x_2}{\partial y}, \quad 1 = R(t') \frac{\partial x_3}{\partial z}, \quad (243)$$

и таким образом

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R(t') + \delta'_x(t', x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{R(t')} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{R(t')} \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (244)$$

Производные от эйлеровых координат по времени  $t'$  являются компонентами скорости:

$$v_1 = \frac{dx}{dt'} = \dot{R}(t')x_1 + \dot{\delta}_x(t', x_1), \quad v_2 = \frac{dy}{dt'} = \dot{R}(t')x_2, \quad v_3 = \frac{dz}{dt'} = \dot{R}(t')x_3. \quad (245)$$

3. *Преобразование уравнений.* Хотя производные по времени в двух системах различаются, само время в обеих системах, как уже говорилось, течет одинаково. Поэтому после пересчета производных для времени сохраним прежнее обозначение.

Запишем в новых переменных уравнение неразрывности (206). Его составляющие будут следующими.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \dot{\rho} - \frac{\dot{R}x_1 + \dot{\delta}_x}{R + \delta'_x} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - Hx_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} - Hx_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3}, \quad \rho \vec{\nabla} \vec{v} = \rho \left( \frac{\dot{R} + \dot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} + 2H \right), \quad (246)$$

$$(\vec{\nabla} \rho) \vec{v} = \left( \frac{1}{R + \delta'_x} \frac{\partial \rho}{\partial x_1}, \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial x_2}, \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) (\dot{R}x_1 + \dot{\delta}_x, \dot{R}x_2, \dot{R}x_3) = \frac{\dot{R}x_1 + \dot{\delta}_x}{R + \delta'_x} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} + Hx_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + Hx_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3}. \quad (247)$$

В результате уравнение неразрывности примет простой вид:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{R} + \dot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} + 2H = 0. \quad (248)$$

Уравнение (248) легко проинтегрировать и получить связь плотности с радиусом кривизны и возмущением

$$\rho = \frac{R_1^3}{R^2} \frac{\rho_1}{R + \delta'_x}. \quad (249)$$

Здесь  $R_1$  и  $\rho_1$  — значения радиуса кривизны и плотности в момент, когда  $\delta'_x = 0$ . Если возмущения нет, то невозмущенная плотность

$$\rho_0 = \frac{R_1^3}{R^3} \rho_1, \quad (250)$$

так что

$$\delta \rho = \rho - \rho_0 = -\frac{R_1^3}{R^3} \frac{\delta'_x}{R + \delta'_x} \rho_1, \quad \delta = \frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{\delta'_x}{R}. \quad (251)$$

Займемся уравнением движения (207). Выпишем его слагаемые.

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = (\ddot{R}x_1 + \ddot{\delta}_x, \ddot{R}x_2, \ddot{R}x_3) - \left( (\dot{R} + \dot{\delta}_x) \frac{\dot{R}x_1 + \dot{\delta}_x}{R + \delta'_x}, \dot{R} \frac{\dot{R}}{R}, \dot{R} \frac{\dot{R}}{R} \right), \quad (252)$$

$$(\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} = \left( \frac{\dot{R}x_1 + \dot{\delta}_x}{R + \delta'_x} \frac{\partial}{\partial x_1} + H \frac{\partial}{\partial x_2} + H \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (\dot{R}x_1 + \dot{\delta}_x, \dot{R}x_2, \dot{R}x_3) = \left( (\dot{R} + \dot{\delta}_x) \frac{\dot{R}x_1 + \dot{\delta}_x}{R + \delta'_x}, H \dot{R}, H \dot{R} \right). \quad (253)$$

После подстановки получим

$$\vec{\nabla} \varphi = -\dot{\vec{v}} = -\ddot{R} \vec{x} - \ddot{\delta}_x (1, 0, 0). \quad (254)$$

Подставим полученное соотношение (254) в уравнение Пуассона (208). Получится

$$\Delta \varphi = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \varphi) = - \left( \frac{1}{R + \delta'_x} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (\ddot{R}x_1 + \ddot{\delta}_x, \ddot{R}x_2, \ddot{R}x_3) = -\frac{\ddot{R} + \ddot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} - 2 \frac{\ddot{R}}{R} = 4\pi G(\rho - 2\rho_\Lambda). \quad (255)$$

4. *Уравнение для относительного возмущения плотности.* Умножим уравнение (255) на знаменатель  $R + \delta'_x$ . Получится

$$-3\ddot{R} - \ddot{\delta}'_x - 2 \frac{\ddot{R}}{R} \delta'_x = 4\pi G \rho (R + \delta'_x) - 8\pi G \rho_\Lambda (R + \delta'_x). \quad (256)$$

Теперь воспользуемся уравнением стандартной космологической модели (23) (при  $P = 0$  и с заменой  $\rho$  на  $\rho_0$ ) и соотношениями (249) и (250). Тогда найдем, что

$$4\pi G R \left( \frac{R_1^3}{R^3} \rho_1 - 2\rho_\Lambda \right) - \ddot{\delta}'_x + \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{R_1^3}{R^3} \rho_1 - 2\rho_\Lambda \right) \delta'_x = 4\pi G \frac{R_1^3}{R^2} \rho_1 - 8\pi G \rho_\Lambda (R + \delta'_x). \quad (257)$$



После сокращений получится сравнительно простое линейное соотношение

$$\ddot{\delta}'_x = \frac{8\pi G}{3} (\rho_o + \rho_\Lambda) \delta'_x. \quad (258)$$

Сделаем замену искомой функции согласно второму соотношению в (251):

$$-\ddot{R}\delta - 2\dot{R}\dot{\delta} - R\ddot{\delta} = \frac{8\pi G}{3} (\rho_o + \rho_\Lambda) R\delta. \quad (259)$$

Снова воспользовавшись уравнениями (23) и (22) при тех же заменах, найдем

$$\frac{4\pi G}{3} (\rho_o - 2\rho_\Lambda)\delta - 2H\dot{\delta} - \ddot{\delta} = -\frac{8\pi G}{3} (\rho_o + \rho_\Lambda)\delta \quad (260)$$

или после сокращений

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G\rho_o\delta. \quad (261)$$

Уравнение совпадает по виду с уравнением (235).

Таким образом, нелинейная теория Зельдовича приводит точно к такому же уравнению для возмущения плотности, что и линейная теория при отсутствии давления. Воспользуемся решениями этого уравнения, полученными в пункте 5 § 3.

5. *Решения в параметрической форме.* Запишем сначала решение для космологической модели. Сделаем замену переменной интегрирования и введем обозначения

$$a = \frac{y}{y_0}, \quad y_0 = \left( \frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_d^0} \right)^{1/3}, \quad A = \frac{\Omega_k^0}{(\Omega_d^0)^{2/3} (\Omega_\Lambda^0)^{1/3}}, \quad \zeta_* = \frac{1}{(\Omega_\Lambda^0)^{1/6} (\Omega_d^0)^{1/3}}, \quad J_\nu(y, A) = \int_0^y \frac{y^\nu dy}{\sqrt{1 + Ay + y^3}}. \quad (262)$$

Уравнения модели без ультрарелятивистских компонент

$$\frac{ada}{\sqrt{\Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \frac{\sqrt{ada}}{\sqrt{\Omega_d^0 + \Omega_k^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^3}} = H_0 dt = \frac{H_0 R_0}{c} a d\eta, \quad (263)$$

в этих обозначениях дадут решения

$$J_{1/2}(y, A) = H_\Lambda t, \quad \zeta_* J_{-1/2}(y, A) = \frac{H_0 R_0}{c} \eta. \quad (264)$$

Легко проверить, что решения (261) с точностью до множителей можно записать в следующем виде:

$$\delta_1(t) = \delta_2(t) J_{3/2}(y, A), \quad \delta_2(t) = \frac{\sqrt{1 + Ay + y^3}}{y^{3/2}}. \quad (265)$$

Таким образом, решения получены в параметрической форме, причем возмущения и время выражаются через элементарные функции и семейство безразмерных интегралов, зависящих от одного безразмерного аргумента и одного параметра. Вообще говоря, приведенные интегралы  $J$  выражаются через неполные эллиптические интегралы, однако эти выражения довольно сложны и не помогают при вычислениях.

6. *Явное аналитическое решение.* Для важного случая плоской модели, когда  $A = 0$ , оказывается возможным найти явное решение и выразить его через стандартные специальные функции. Неявную зависимость времени от  $R$  можно обратить и найти явное выражение

$$y = \sinh^{2/3} \left( \frac{3}{2} H_\Lambda t \right), \quad R(t) = R_0 \left( \frac{8\pi G \rho_o}{3H_\Lambda^2} \right)^{1/3} y. \quad (266)$$

Для возмущений получается

$$\delta_2(t) = \frac{\sqrt{1 + y^3}}{y^{3/2}}, \quad \delta_1(t) = \delta_2(t) J_{3/2}(y, 0). \quad (267)$$

Первая мода  $\delta_1(t)$  представляется через гипергеометрические функции:

$$\delta_1(t) = \begin{cases} \frac{2}{5} y F \left( 1, \frac{1}{3}, \frac{11}{6}; -y^3 \right) & \text{при } 0 \leq y < 1, \\ \frac{2}{5} \frac{y}{1 + y^3} F \left( 1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}; \frac{y^3}{1 + y^3} \right) & \text{при } y \sim 1, \\ c_0 \delta_2(t) - \delta_3(t) & \text{при } y > 1, \end{cases} \quad (268)$$

где  $c_0 = \Gamma(5/6)\Gamma(5/3)/\sqrt{\pi}$  и

$$\delta_3(t) = \frac{1}{2y^2} F\left(1, \frac{1}{6}, \frac{5}{3}; -\frac{1}{y^3}\right) = c_0 \delta_2(t) - \delta_1(t). \quad (269)$$

Все гипергеометрические функции представлены так, что их можно вычислить по гипергеометрическому ряду

$$F(a, b, c, z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} \frac{z^n}{n!} + \dots \quad (270)$$

Рис. 8 демонстрирует поведение  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_3$  как функций  $R(t)$ , точнее пропорциональной ему величины  $y$ .

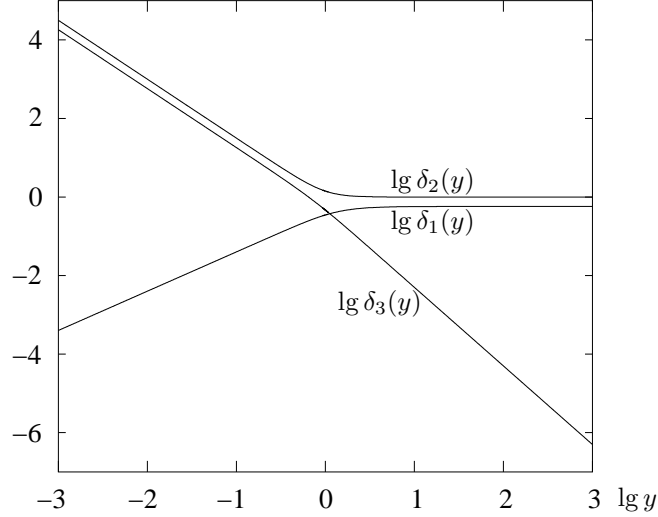


Рис. 8: Возмущения  $\delta_1(t)$ ,  $\delta_2(t)$  и  $\delta_3(t)$  в зависимости от  $y$ .

Зависимость трех мод от времени такова, что  $\delta_1$  и  $\delta_2$  практически постоянны после  $y = 1$ . Перед этой точкой они могут быть аппроксимированы степенными законами  $\delta_1 \propto y$ ,  $\delta_2 \propto y^{-3/2}$ , которые отражают их поведение при малых  $t$ . Частная мода  $\delta_3$  близка к  $\delta_2$  при  $y < 1$  и убывает при  $y > 1$  пропорционально  $y^{-2}$ .

Полученное решение описывает эволюцию слабых линейных возмущений произвольной пространственной формы:

$$\delta(\vec{x}, t) = f_1(\vec{x})\delta_1(t) + f_2(\vec{x})\delta_2(t), \quad (271)$$

где  $f_1(\vec{x})$  и  $f_2(\vec{x})$  — произвольные функции (не слишком большие) трех лагранжевых координат. Частный случай  $f_3(\vec{x})\delta_3(t)$  соответствует специальному соотношению между двумя модами  $f_2 = -c_0 f_1$ , тогда  $f_3 = -f_1$ .

То же решение справедливо и для эволюции нелинейного плоского возмущения в приближении Зельдовича

$$\delta_x(t, x_1) = R(t)[F_1(x_1)\delta_1(t) + F_2(x_1)\delta_2(t)]. \quad (272)$$

Здесь  $F'_i(x_1) = -f_i(x_1)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , так как в нелинейном случае функции  $f_i$  могут зависеть только от одной лагранжевой координаты. Третья мода соответствует  $F_2 = -c_0 F_1$ .

Т а б л и ц а 7. Асимптотическое поведение  $\delta_i(t) \left[1 + \frac{d \ln \delta_i}{d \ln y}\right]$ .

Мода	$t \rightarrow 0$	$t \rightarrow +\infty$
		$y \sim (3\alpha t/2)^{2/3} \times \left(1 + \frac{1}{4}\alpha^2 t^2\right)$
1	$\frac{4}{5}y \left(1 - \frac{5}{11}y^3\right)$	$c_0 + \frac{1}{2}y^{-2}$
2	$-\frac{1}{2}y^{-3/2} \left(1 - \frac{5}{2}y^3\right)$	$1 - y^{-3}$
3	$-\frac{c_0}{2}y^{-3/2} + \frac{6}{5}y$	$-\frac{1}{2}y^{-2} \left(1 - \frac{2}{5}y^{-3}\right)$

Интересно проследить зависимость скорости изменения координат. Невозмущенная скорость расширения  $\vec{v} = \dot{R}(t)\vec{x}$ . Возмущение скорости координаты  $x_1$ , а только эта координата возмущается, согласно моде  $i$  равна  $\delta v_1^{(i)} = F_i(\chi_1)[\dot{a}(t)\delta_i(t) + a(t)\dot{\delta}_i(t)]$ . Относительное возмущение скорости

$$\frac{\delta v_1^{(i)}}{v_1} = \frac{\delta v_1^{(i)}}{\dot{a}(t)x_1} = \frac{F_i(x_1)}{\chi_1}\delta_i(t) \left[ 1 + \frac{d \ln \delta_i}{d \ln y} \right]. \quad (273)$$

В таблице даны асимптотики  $\frac{\delta v_1^{(i)}}{v_1} \frac{x_1}{F_i(x_1)}$  для трех мод возмущений на малых и больших временах расширения.

В последнее время образование скоплений галактик моделируют путем решения уравнений тяготения для большого числа объектов. При этом получаются образования типа стенок, которые можно интерпретировать как следствие возмущений одной координаты. Такие стенки наблюдаются и в реальных распределениях галактик и их скоплений.

7. *Независимые константы и переменные.* И в этом разделе можно указать две константы и переменную, не зависящие от выбора эпохи отсчета красного смещения. Значение одной константы уже приводилось, здесь ее выразим через две неизменные в ходе расширения пространства величины:

$$\zeta_* = \frac{1}{(\Omega_\Lambda)^{1/6}(\Omega_d^0)^{1/3}} = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2G}} \frac{1}{\rho_\Lambda^{1/6} M_d^{1/3}} = 1.61. \quad (274)$$

Вторая константа служит коэффициентом в связи переменной с радиусом кривизны:

$$y = y_R R(t), \quad y_R = \left( \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_\Lambda}{M_d} \right)^{1/3} = 1.04 \cdot 10^{-28} \frac{1}{\text{см}}. \quad (275)$$

Заметим, что значение массы пыли почти не отличается от значения ее при Стандартной модели, так как доли не учитываемых здесь ультрарелятивистских компонент весьма малы.

## Глава V. Космологическая инфляция

### § 1. Успехи и проблемы космологии

1. *Успехи моделей Фридмана-Леметра и теории горячей Вселенной.* Открытие реликтового излучения привело к тому, что модель горячей Вселенной является теперь общепризнанной. Последние данные наблюдений, ставшие возможными благодаря современному технологическому прогрессу, позволили выбрать наиболее адекватную модель, которую называют моделью  $\Lambda$ CDM, то есть модель с основной ролью космологического слагаемого и холодного темного вещества. Большая роль космологического слагаемого, то есть вакуума или темной энергии, в частности, проявляется в том, что гравитационное воздействие этой субстанции приводит к ускоряющемуся расширению пространства. На основе Стандартной модели были построены количественные теории первичного нуклеосинтеза и образования крупномасштабной структуры.

Космологи утверждают, что они хорошо представляют историю горячей Вселенной, начиная с момента в  $10^{-3}$  секунды от начала расширения, и более или менее определенно, начиная с  $10^{-11}$  с. Более ранние мгновения не столь определенны вследствие неясностей в теории элементарных частиц, так как выбрать наиболее адекватную теорию не позволяет невозможность достичь таких энергий, которые требуются для этого (см. табл. 6).

Однако, возникают вопросы по отношению к самым ранним этапам эволюции Вселенной, примыкающим к планковской эпохе. Неясности физических условий в эти этапы проявляются в виде проблем классических космологических моделей в современную эпоху.

2. *Проблемы моделей.* Укажем некоторые из них.

а) Проблема плоскостности. В настоящее время кривизна пространства Вселенной оценивается как очень малая. Неясна причина этого.

Оценим зависимость  $\Omega_u$  от красного смещения. Применим соотношение (51). Из него вытекает, что

$$\Omega_k = 1 - \Omega_u = 1 - \Omega_{rv} - \Omega_d - \Omega_\Lambda = -\frac{kc^2}{\dot{R}^2} = -\frac{kc^2}{H^2 R^2}, \quad (276)$$

в частности,

$$\Omega_k^0 = 1 - \Omega_u^0 = 1 - \Omega_{rv}^0 - \Omega_d^0 - \Omega_\Lambda^0 = -\frac{kc^2}{\dot{R}_0^2} = -\frac{kc^2}{H_0^2 R_0^2}. \quad (277)$$

Отношение

$$r = \frac{\Omega_k}{\Omega_k^0} = \frac{H_0^2 R_0^2}{H^2 R^2} = \frac{H_0^2}{H^2} \frac{1}{a^2} = \frac{H_0^2}{H^2} (1+z)^2, \quad (278)$$

а с учетом (55)

$$r = \frac{1 - \Omega_u}{1 - \Omega_u^0} = \frac{1}{1 + \Omega_{\nu}^0 z(2 + z) + \Omega_d^0 z - \Omega_\Lambda^0 \frac{z(2 + z)}{(1 + z)^2}}. \quad (279)$$

Вычисленные по этой формуле значения  $r$  для границ эпох Табли 6 приведены в Табл. 8. Из этих чисел следует, что для того, чтобы современная кривизна была бы порядка единиц или даже десятков, ранняя Вселенная должна была быть плоской с фантастической точностью. Каким образом установились такие начальные значения, в рамках Стандартной модели совершенно непонятно.

Т а б л и ц а 8. Отличия от плоскостности в различные эпохи.

$z$	$r$
0	1
1500	$1.4 \cdot 10^{-3}$
15000	$3.2 \cdot 10^{-5}$
25000	$1.2 \cdot 10^{-5}$
$2 \cdot 10^9$	$2.1 \cdot 10^{-15}$
$4 \cdot 10^{11}$	$5.2 \cdot 10^{-20}$
$4 \cdot 10^{12}$	$1.25 \cdot 10^{-22}$
$4 \cdot 10^{14}$	$1.25 \cdot 10^{-26}$
$4 \cdot 10^{28}$	$5 \cdot 10^{-54}$
$4 \cdot 10^{31}$	$5 \cdot 10^{-60}$

б) Проблема горизонта. Было показано, что расстояние до геометрического горизонта определяется формулой

$$l_{\text{GHor}} = R(\eta)\eta = l_{\text{H}}^0 a(\eta)\eta. \quad (280)$$

В частности, для плоской модели пылевидного вещества получается  $l_{\text{GHor}} = 3ct$ , для плоской же модели ультрарелятивистской материи соответственно  $l_{\text{GHor}} = 2ct$ .

Расстояние до горизонта (или хаббловское расстояние, отличающееся на множитель) часто называют размером Вселенной. В планковскую эпоху, если считать, что осуществляется плоская модель излучения (ультрарелятивистского вещества), это расстояние было равно двум планковским  $l_{\text{GHor}}^{\text{P1}} = 2ct_{\text{P1}} = 2l_{\text{P1}} = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-33}$  см. Современное расстояние по Стандартной модели  $l_{\text{GHor}}^0 = l_{\text{H}}^0 \eta_0 = 3.32l_{\text{H}}^0 = 4.4 \cdot 10^{28}$  см = 14.2 Гпк. Если исходить из этого значения, то современный размер Вселенной произошел из размера  $l = l_{\text{GHor}}^0 / (1 + z_{\text{P1}}) = 4.4 \cdot 10^{28} / (5 \cdot 10^{31}) = 10^{-3}$  см. Различие в 29 порядков необъяснимо.

в) Проблема однородности. Она связана с предыдущей. РИ, как показывают наблюдения, исключительно однородно, во всех направлениях температура его одинакова. При этом температура РИ в разные эпохи была разной, но однородность сохранялась всегда, так как ничто не могло ее нарушить. И распределения других компонент Вселенной тоже однородно в масштабах, меньших космологических. Какой-то процесс должен был изначально выравнивать свойства различных объемов.

Области однородности столь велики, что отдельные их части причинно не связаны, то есть они никогда не обменивались энергией, импульсом и вообще информацией. Действительно, современное хаббловское расстояние  $l_{\text{H}}^0 = 3 \cdot 10^{10} / (2.27 \cdot 10^{-17}) = 1.3 \cdot 10^{28}$  см. В планковскую эпоху это расстояние было  $l_{\text{H}}^0 / z_{\text{P1}} = 1.3 \cdot 10^{28} / 4 \cdot 10^{31} = 0.32 \cdot 10^{-3}$  см. Планковское же расстояние, на котором возможен был обмен информацией, так как планковскую длину свет проходит за планковское время, составляет  $l_{\text{P1}} = ct_{\text{P1}} = 1.6 \cdot 10^{-33}$  см. Если не предположить одинаковых начальных условий для каждой из несвязанных частей всего пространства, такая однородность непонятна.

г) Зарядовая асимметрия. Наш мир, как говорят, зарядово асимметричен. Действительно, вещество состоит из протонов, нейтронов и электронов, позитроны образуются в некоторых объектах и даже в значительных количествах, однако, почти сразу же аннигилируют с электронами. Антипротоны наблюдаются только в реакторах и ускорителях.

Как отмечалось выше, в ранней Вселенной частиц и античастиц было почти поровну, преобладание частиц было незначительным, однако, оно как-то должно было образоваться.

д) Другие трудности. Имеются и некоторые другие неясности теории расширяющейся Вселенной. Например, массовая плотность в планковскую эпоху была равна  $\rho_{\text{P1}} = \frac{c^5}{G^2 \hbar} = 5.16 \cdot 10^{92}$  г/см<sup>3</sup>. Если бы ее эволюция происходила согласно модели излучения, то современное ее значение было бы  $\rho_0 = \rho_{\text{P1}} / z_{\text{P1}}^3 = 7 \cdot 10^{-34}$ , что примерно соответствует плотности РИ. Если же исходить из того, что сохраняется энергия, то получилось бы  $\rho_0 = \rho_{\text{P1}} (2l_{\text{P1}} / (3.8 \cdot 10^{28}))^4 = 1.7 \cdot 10^{-152}$  (обе величины в г/см<sup>3</sup>).

Наконец, неясны причины появления малых возмущений плотности материи, приводящих впоследствии к образованию галактик и их скоплений, а также вообще причина расширения пространства.

## § 2. Теория инфляции

1. *Раздувание пространства.* В конце 70-х и начале 80-х годов была создана теория, устраняющая указанные недостатки. Различные ее варианты были разработаны А.А. Старобинским и В.Ф. Мухановым с Г.В. Чибисовым. Термин "инфляция" был введен Гутом (А. Guth), объяснившим основные проблемы. Усовершенствована теория была А. Линде. Здесь излагается простой вариант теории.

Теория инфляции утверждает, что в самом начале расширения решающую роль играл вакуум: расширение происходило так, как это описывается космологическим слагаемым, то есть уравнением (75). Его решение — экспоненциальное:  $R = R_* \exp(\sqrt{\Lambda/3}ct) = R_* \exp(H_\Lambda t)$ ,  $H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c$ .

2. *Планковские величины.* Некоторые из них уже приводились в § 2 Главы III, здесь воспроизведем те значения и пополним их перечень (см. Табл. 9).

Планковские величины формируются из трех констант: скорости света, постоянной Планка и постоянной тяготения.

Т а б л и ц а 9. Планковские величины.

Величина	Обозначение	Размерность	Выражение	Численное значение
Скорость света	$c$	$\frac{\text{см}}{\text{с}}$	$c$	$2.9979 \cdot 10^{10}$
Постоянная Планка	$\hbar$	$\frac{\text{г см}^2}{\text{с}}$	$\hbar$	$1.0544 \cdot 10^{-27}$
Постоянная тяготения	$G$	$\frac{\text{см}^3}{\text{г с}^2}$	$G$	$6.672 \cdot 10^{-8}$
Длина	$l_{\text{Pl}}$	см	$\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$	$1.6158 \cdot 10^{-33}$
Время	$t_{\text{Pl}}$	с	$\sqrt{\frac{G\hbar}{c^5}}$	$5.3898 \cdot 10^{-44}$
Масса	$m_{\text{Pl}}$	г	$\sqrt{\frac{c\hbar}{G}}$	$2.1766 \cdot 10^{-5}$
Энергия	$E_{\text{Pl}}$	$\frac{\text{г см}^2}{\text{с}^2}$	$\sqrt{\frac{c^5\hbar}{G}}$	$1.9562 \cdot 10^{16}$
Плотность массы	$\rho_{\text{Pl}}$	$\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$\frac{G^2\hbar}{c^7}$	$5.1593 \cdot 10^{93}$
Плотность энергии	$c^2\rho_{\text{Pl}}$	$\frac{\text{г}}{\text{см с}^2}$	$\frac{G^2\hbar}{c^7}$	$4.6369 \cdot 10^{114}$
Температура	$T_{\text{Pl}}$	К	$\frac{1}{k_{\text{B}}} \sqrt{\frac{c^5\hbar}{G}}$	$1.4172 \cdot 10^{32}$

3. *Решение проблемы плоскостности.* Так как при таком расширении  $H = \frac{\dot{R}}{R} = H_\Lambda$ , то критическая плотность равна плотности вакуума, так как  $\rho_c^{\text{Pl}} = \frac{3H_\Lambda^2}{8\pi G} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \rho_\Lambda$ . Таким образом, в планковскую эпоху равенство вакуумной и критической плотностей выполнялось точно, что объясняет близость реальной Вселенной к плоской модели во все последующее время.

4. *Изменение плотности и размера при инфляции.* Начальная плотность — это планковская массовая плотность  $\rho_{\text{Pl}} = m_{\text{Pl}}/l_{\text{Pl}}^3 = 2.177 \cdot 10^{-5}/(1.616 \cdot 10^{-33})^3 = 5.159 \cdot 10^{93}$  г/см<sup>3</sup>. Так как это вакуумная плотность, то получают значения следующих величин:

$$\rho_{\text{Pl}} = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad \Lambda = 8\pi \frac{c^3}{G\hbar} = \frac{8\pi}{l_{\text{Pl}}^2} = 9.626 \cdot 10^{66} \text{ см}^{-2}, \quad H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}c = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{c}{l_{\text{Pl}}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{t_{\text{Pl}}} = 5.370 \cdot 10^{43} \text{ 1/с}. \quad (281)$$

В то время как плотность (вакуума)  $\rho_\Lambda$  при инфляции оставалась практически неизменной, размеры Вселенной быстро увеличивались. Пусть в момент  $t = t_{\text{Pl}}$  масштаб  $R = l_{\text{Pl}}$ . Тогда в последующие моменты

$$R = l_{\text{Pl}} \exp(H_\Lambda(t - t_{\text{Pl}})) = l_{\text{Pl}} \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left(\frac{t}{t_{\text{Pl}}} - 1\right)\right). \quad (282)$$

5. *Решение проблемы однородности.* Раздувание пространства происходит от "планковских" масштабов до "хаббловских". При энергии частицы  $E_{\text{Pl}} = 1.956 \cdot 10^{16}$  эрг, температура должна быть  $T_{\text{Pl}} = E_{\text{Pl}}/k_{\text{B}} = 1.417 \cdot 10^{32}$  К. Такая температура соответствует красному смещению  $1 + z_{\text{Pl}} = T_{\text{Pl}}/T_0 = 5.195 \cdot 10^{31}$ . При современном значении

постоянной Хаббла  $H_0 = 70$  (км/с)/Мпк =  $2.268 \cdot 10^{-18}$  1/с современное хаббловское расстояние  $l_H^0 = c/H_0 = 1.322 \cdot 10^{28}$  см. Хаббловское расстояние планковской эпохи  $l_H^{Pl} = l_H^0 / (1+z_{Pl}) = 1.322 \cdot 10^{28} / (5.195 \cdot 10^{31}) = 2.544 \cdot 10^{-4}$  см при таком расширении будет достигнуто в момент  $t_H^{Pl}$ , определяемый соотношениями  $R = l_{Pl}$  при  $t = t_{Pl}$ ,  $R = l_H^{Pl}$  при  $t = t_H^{Pl}$ , так что

$$l_H^{Pl} = l_{Pl} \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \left(\frac{t_H^{Pl}}{t_{Pl}} - 1\right)\right), \quad \frac{t_H^{Pl}}{t_{Pl}} = 1 + \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \ln \frac{l_H^{Pl}}{l_{Pl}} = 24.2, \quad t_H^{Pl} = 1.3 \cdot 10^{-42} < 10^{-37}. \quad (283)$$

Можно сделать вывод, что для достижения хаббловского (фридмановского) размера Вселенной требуется примерно 25 планковских промежутков времени. Начав с планковского времени  $6 \cdot 10^{-44}$  с и прибавив еще 25 таких же промежутков, Вселенная получит возраст  $1.6 \cdot 10^{-42}$  и согласно Табл. 6 останется в эпохе великого объединения, так как не достигнет границы  $10^{-37}$  эпохи электрослабого объединения.

Первоначальная однородность создавалась именно на планковском масштабе. При планковской температуре даже самые массивные частицы будут ультрарелятивистскими. Действительно, например, протон с массой покоя  $m_p = 1.672 \cdot 10^{-24}$  г будет иметь в среднем массу с учетом движения, равную планковской, то есть  $m_p \gamma = m_{Pl}$ . Лоренцевский множитель оказывается при этом равным  $\gamma = m_{Pl}/m_p = 1.302 \cdot 10^{19}$ , так что все частицы движутся со скоростями, очень близкими к скорости света. Планковский объем такая частица пересечет за время  $t_{Pl} = 5.3898 \cdot 10^{-44}$  с.

Если все же остаются какие-то неоднородности в пределах планковского объема, то они растягиваются экспоненциальным расширением.

6. *Решение проблемы горизонта.* Раздувается и горизонт. Расстояние до горизонта

$$l_{Hor} = \eta R = \frac{c}{R_* H_\Lambda} (1 - e^{-H_\Lambda t}) R_* e^{H_\Lambda t} = \frac{c}{H_\Lambda} (e^{H_\Lambda t} - 1) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} l_{Pl} \left( \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{t}{t_{Pl}}\right) - 1 \right) \quad (284)$$

за время, несущественно отличающееся от  $t_H^{Pl}$ , также выростет от планковского до хаббловского.

7. *Решение проблемы начального толчка и неоднородностей.* В конце инфляционного периода вакуум распадается, а его энергия передается материи, которая тем самым приобретает очень высокую температуру. Распад вакуума является квантовым процессом, так что возникновение неоднородностей плотности и зарядовой асимметрии рассматриваются как проявление обычных квантовых флуктуаций.

Наконец, отрицательное давление вообще объясняет причину начала расширения.

### § 3. Вторая инфляция и второй горизонт

1. *Вторая инфляция.* Как уже отмечалось, в настоящее время мы живем в эпоху начала второй инфляции. Этот вывод был сделан на основании наблюдений, приведших к построению новой хаббловской диаграммы. Начиная с  $z = 0.7260$ ,  $t = 7.2$  млрд лет, происходит ускоренное расширение и, хотя вплоть до настоящего времени ускорение весьма мало, через несколько десятков миллиардов лет наступит экспоненциальное расширение, описываемое формулами (131). Значения параметров этого расширения радикально отличаются от (281), что видно из Табл. 10.

Т а б л и ц а 10. Сравнение двух инфляций.

Величина	Первая	Вторая
$\Lambda$	$9.6 \cdot 10^{66}$ 1/см <sup>2</sup>	$1.24 \cdot 10^{-56}$ 1/см <sup>2</sup>
$H_\Lambda$	$5.37 \cdot 10^{43}$ 1/с	$1.925 \cdot 10^{-18}$ 1/с
$1/H_\Lambda$	$1.862 \cdot 10^{-44}$ с	$5.1950 \cdot 10^{17}$ с
$1/H_\Lambda$	—	16.462 Г лет

Посмотрим, к какой картине мира приведет экспоненциальное расширение. Проследим за движением излучения в будущие, отдаленные эпохи. Для краткости будем говорить о моментах  $\eta$  и местах  $\chi$ .

2. *Второй горизонт.* Пусть фотон излучен в месте с координатой  $\chi_e$  в момент  $t = t(\eta_e)$ , которому соответствует конформная координата  $\eta_e$ , в сторону наблюдателя. Уравнение его движения  $\chi = \eta_0 - \eta = \chi_e + \eta_e - \eta$ . Найдем связанные с движением фотона расстояния.

Расстояние от наблюдателя до места излучения фотона  $l_e = l_H^0 a(\eta) \chi_e$ , а от фотона до наблюдателя

$$l_{rs} = l_H^0 a(\eta) (\chi_e + \eta_e - \eta), \quad (285)$$

так что фотон удалится от места своего излучения на расстояние  $l_{mv} = l_e - l_{rs} = l_H^0 a(\eta) (\eta_e - \eta)$ . Вспомним еще расстояния в произвольный момент  $t = t(\eta)$  между моментами излучения и прихода к наблюдателю: до

горизонта  $l_{\text{GHor}} = R(\eta)\eta = l_{\text{H}}^0 a(\eta)\eta$ , от фотона до горизонта  $l_{\text{GHor}}^{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta)(2\eta - \chi_e - \eta_e)$  и пройденный фотоном путь  $l_{\text{ph}} = c(t - t_e)$ .

Казалось бы, ничто не мешает фотону долететь до наблюдателя, когда бы и где бы он ни излучился. Однако, та модель, которая считается наиболее адекватной, приводит к другим заключениям.

Дело в том, что временная координата  $\eta$  ограничена сверху, ее наибольшее значение

$$\eta_{\infty} = \eta_* I_0(\infty, \beta) = \frac{I_0(\infty, \beta)}{(\Omega_{\text{rv}}^0 \Omega_{\Lambda}^0)^{1/4}} = 4.45. \quad (286)$$

Обращение  $l_{\text{rs}} = 0$  возможно лишь при  $\chi_e + \eta_e < \eta_{\infty}$ . Фотон все же дойдет до наблюдателя, пусть даже за очень большое, почти бесконечное, время, если сумма

$$\chi_e + \eta_e < \eta_{\infty}. \quad (287)$$

Граница, так сказать, видимости Вселенной определяется уравнением

$$\chi_e + \eta_e = \eta_{\infty}. \quad (288)$$

Вспомним, что согласно понятию геометрического горизонта должно выполняться условие  $\chi_e \leq \eta_0$ . Уравнение (288) задает сферу, которую назовем вторым или кинематическим горизонтом.

В произвольную эпоху  $\eta$  первый и второй горизонты определяются соответственно уравнениями

$$\chi_{\text{GHor}} = \eta = \eta_* I_0(x, \beta), \quad \chi_{\text{KHOr}} = \eta_{\infty} - \eta = \eta_* [I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta)]. \quad (289)$$

3. *Видимая и невидимая части Вселенной.* На рис. 9 положения геометрического горизонта указаны на оси ординат. Соответствующие ему прямые, параллельные оси абсцисс, со временем поднимаются вверх, отражая его расширение. Второй, кинематический горизонт изображен прямой, соединяющей абсциссу и ординату, равные  $\eta_{\infty}$ , а его конкретное положение соответствует времени на оси абсцисс. Пути фотонов, идущих к нам, изображаются прямыми, параллельными этой прямой. Фотоны могут начать свой путь из любой точки траектории, их последующее перемещение идет одинаково. Фотоны, для которых  $\eta_e + \chi_e < \eta_{\infty}$ , то есть движущиеся по прямым, лежащим ниже указанной граничной прямой, рано или поздно дойдут до места, где расположен наш наблюдатель. Например, на рисунке помещены пути фотонов, которые дошли до нашего места в момент  $\eta_* < \eta_0$  и в современную эпоху  $\eta_0$ . Если же  $\eta_e + \chi_e > \eta_{\infty}$ , то фотоны с такими координатами не дойдут до нашего места никогда. При равенстве  $\eta_e + \chi_e = \eta_{\infty}$ , казалось бы, фотон все же должен дойти до наблюдателя за бесконечное время, однако, и это невозможно.

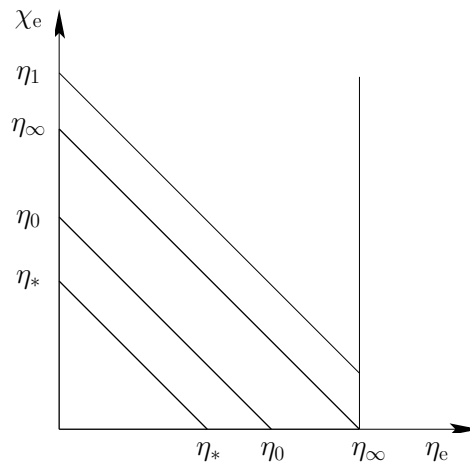


Рис. 9: Видимая и невидимая части Вселенной.

4. *Пути фотонов в разные эпохи.* Из-за первого горизонта излучение не успело дойти до наблюдателя. Второй горизонт отделяет область времени и точек, из которых излучение не может прийти к наблюдателю из-за того, что фотоны, идущие оттуда, удаляются от него, так как пространство расширяется со скоростями выше световой и эти скорости все время увеличиваются. Сейчас мы видим Вселенную вплоть до красных смещений  $z \approx 10$ , но это ее прошлое (все, что мы видим, уже прошлое, но для близких предметов это несущественно ввиду большой величины скорости света). Объекты, расположенные сейчас на красных смещениях  $z \geq 1.725$ , мы никогда не увидим, то есть их излучение никогда не дойдет до места, где мы находимся.

Действительно, если фотон испущен сейчас из места с координатой  $\chi_0$  в нашу сторону, то расстояние до него в момент  $\eta$  будет  $l_{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta)(\chi_0 + \eta_0 - \eta)$ . Это расстояние может обратиться в нуль при  $\eta = \chi_0 + \eta_0$ ,

причем должно быть  $\chi_0 + \eta_0 < \eta_\infty$ . Таким образом, границей координаты  $\chi_0$  для испущенных сейчас фотонов является  $\chi_{\text{lim}}^0 = \eta_\infty - \eta_0 = 1.13$ . Этой координате отвечают  $x_{\text{lim}}^0 = 3.23$ ,  $z_{\text{lim}}^0 = 1.725$ ,  $l_{\text{lim}}^0 = 4.84$  Г пк =  $l_{\text{KHOr}}^0$ . Сфера такого радиуса и есть современный второй горизонт. Таким образом, излучение с мест, удаленных сейчас на 4.84 Г пк, никогда не дойдет до нас, то есть даже в бесконечно удаленном будущем.

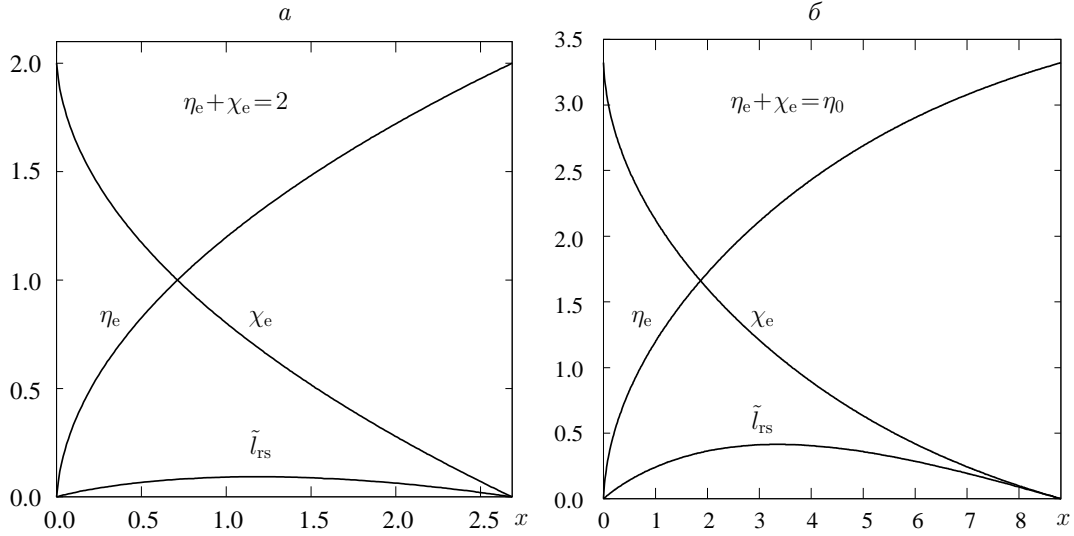


Рис. 10: Пути фотонов с приходом в эпохи:  $\eta = 2$  (а) и  $\eta_0 = 3.3224$  (б).

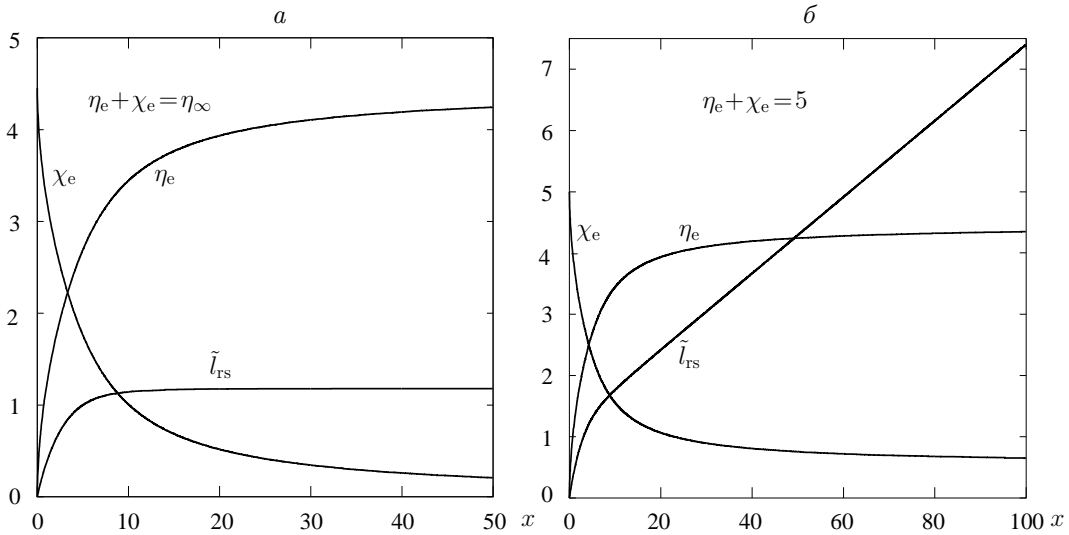


Рис. 11: Пути фотонов с “приходом” в эпохи:  $\eta_\infty = 4.4514$  (а) и  $\eta = 5$  (б).

На рис. 10 показаны расстояния  $l_{\text{rs}}$  до фотонов, пришедших к потенциальному наблюдателю в (прошлую) эпоху, когда  $\eta = 2$  (рис. 10 а), и в современную эпоху (рис. 10 б). На рис. 11 эти расстояния даны для случаев, когда сумма координат времени и места выхода фотона равна  $\eta_\infty$  (11а) и больше (11б), также в зависимости от значений  $x$ . На рисунках, кроме того, приведены кривые, отражающие соотношения между временем  $\eta_e$  и местом  $\chi_e$  выхода фотонов.

Вообще говоря, если фотон возник в точке, где скорость расширения от нас больше скорости света, это еще не означает, что он не дойдет до нас.

Как известно, космологическое расширение происходит одинаково по отношению ко всем точкам пространства и начинается оно после периода инфляции с очень большой скоростью (формально бесконечной, согласно формуле (118), что и определяет название Big Bang — Большой Взрыв), причем сначала идет с замедлением. Фотон, излученный далеко, где скорость удаления от нас велика, но ближе горизонта, все же доходит до нас, так как он постепенно перемещается в слои пространства, расширяющиеся все с меньшей скоростью, в некоторой точке его скорость к нам обращается в нуль, а затем становится отрицательной, то есть он начинает приближаться. За преодоление своего первоначального удаления фотон расплачивается тем, что затрачивает на путь к нам очень большое время. Например, галактика, наблюдаемая нами сейчас на красном смещении  $z = 3$ , согласно Стандартной модели удаляется от нас со скоростью  $1.51c$ , а раньше ее скорость была больше.



При этом ее излучение шло к нам 11.5 млрд лет, то есть мы видим эту галактику такой, какой она была в далеком прошлом, когда ни Земля, ни даже Солнце еще не существовали (но галактики и звезды предыдущих поколений уже были).

Из рис. 10 видно, что при достаточно раннем излучении фотона его расстояние от нас сначала увеличивается, что и означает расширение со скоростью, большей скорости фотона. С точки, где расстояние достигает максимума, фотон начинает приближаться и доходит до нас. Однако, это невозможно, как показывают рис. 11, если  $\eta_e + \chi_e \geq \eta_\infty$ , даже при равенстве. На рис. 11а видно, что фотон, который излучился на втором горизонте и идет вдоль него, как можно было бы предположить, пришел бы к наблюдателю в бесконечно удаленный момент, на самом деле только удаляется вместе с горизонтом. Через бесконечное время такой фотон окажется на расстоянии  $l_\Lambda \approx 5.0$  Гпк, так как множитель  $\eta_\infty - \eta$  в формуле (285) при  $\chi_e + \eta_e = \eta_\infty$  стремится к нулю, если  $t \rightarrow \infty$ , но множитель  $a(\eta) \rightarrow \infty$ , а их произведение остается конечным. Фотон, вышедший при  $\eta_e + \chi_e < \eta_\infty$ , когда-нибудь, может быть, через очень большое время доберется до места, где сейчас находится наша цивилизация, а вышедший при  $\eta_e + \chi_e > \eta_\infty$ , от этого места будет только удаляться, причем начиная с некоторого времени экспоненциально быстро, причиной чего является ускоренное расширение. Таким образом, галактики, находящиеся на втором горизонте и за ним, навсегда исчезнут из нашего поля зрения.

Сделанные утверждения следуют из приведенных ниже формул.

5. *Расстояния, скорости и ускорения горизонтов.* Расстояния до горизонтов в произвольную эпоху  $\eta$  согласно равенствам (289) определяются формулами

$$l_{\text{GHor}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta) \eta = l_\Lambda x I_0(x, \beta) = l_\Lambda x I_0(x, \beta), \quad (290)$$

$$l_{\text{KHOr}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta) (\eta_\infty - \eta) = l_\Lambda x [I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta)]. \quad (291)$$

Оба горизонта расширяются. Скорость геометрического горизонта на скорость света больше, чем скорость того места, где горизонт в данный момент находится:  $\dot{l}_{\text{GHor}} = l_{\text{H}}^0 \dot{a} \eta + l_{\text{H}}^0 a \dot{\eta} = H l_{\text{GHor}} + c$ . Он расширяется с ускорением. Напротив, скорость кинематического горизонта на скорость света меньше скорости места его расположения:  $\dot{l}_{\text{KHOr}} = l_{\text{H}}^0 \dot{a} (\eta_\infty - \eta) - l_{\text{H}}^0 a \dot{\eta} = H l_{\text{KHOr}} - c$ , и его расширение замедляется.

Асимптотики расстояний до горизонтов и их скоростей при  $t \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow \infty$ ,  $z \rightarrow -1$ , находятся с учетом того, что  $I_0(\infty, \beta) = 0.42880$  и  $I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta) \sim \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{8x^3}\right)$ :

$$l_{\text{GHor}} \sim l_{\text{H}}^0 \eta_* I_0(\infty, \beta) a = 5.9 \cdot 10^{28} a \text{ см} \sim 2.7 \cdot 10^{28} e^{H_\Lambda t} \text{ см} \rightarrow \infty, \quad (292)$$

$$l_{\text{KHOr}} \rightarrow \frac{c}{H_\Lambda} = 1.56 \cdot 10^{28} \text{ см} = 5.05 \text{ Гпк}. \quad (293)$$

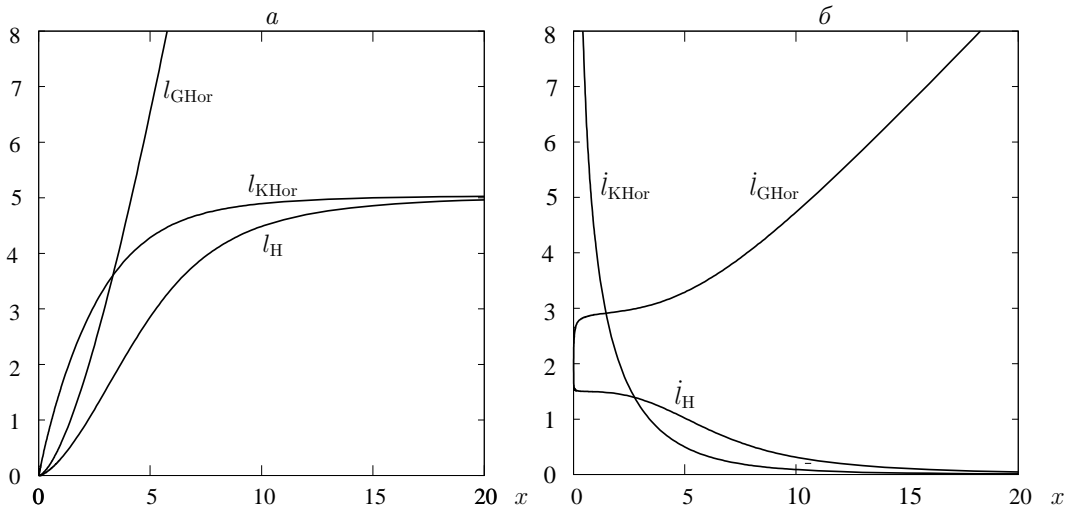


Рис. 12: а: Хаббловское расстояние и расстояния до горизонтов в Гпк.

б: Скорости изменения расстояний в скоростях света.

Современное расстояние до геометрического горизонта  $l_{\text{GHor}}^0 = l_{\text{H}}^0 \eta_0 = 3.32 l_{\text{H}}^0 = 4.39 \cdot 10^{28} \text{ см} = 14.2 \text{ Гпк}$ . Скорость у горизонта  $v_{\text{GHor}}^0 = c \eta_0 = 3.32c$ , скорость расширения горизонта  $\dot{l}_{\text{GHor}}^0 = 4.32c$ . За год горизонт пройдет 4.32 св. года = 1.33 пк, так что к современным 14.2 Гпк добавится еще 1 Гпк через  $0.755 \cdot 10^9$  лет, если считать его скорость равной современной, и через  $0.741 \cdot 10^9$  лет, если учесть ее увеличение.

Современное расстояние до второго горизонта  $l_{\text{KHOr}}^0 = l_{\text{H}}^0 (\eta_\infty - \eta_0) = 1.49 \cdot 10^{28} \text{ см} = 4.84 \text{ Гпк}$ , предельное расстояние до него совпадает с пределом хаббловского:  $l_{\text{KHOr}} \rightarrow \frac{l_{\text{H}}^0}{\sqrt{\Omega_\Lambda^0}} = \frac{c}{H_\Lambda} = 5.05 \text{ Гпк}$ . Современная скорость

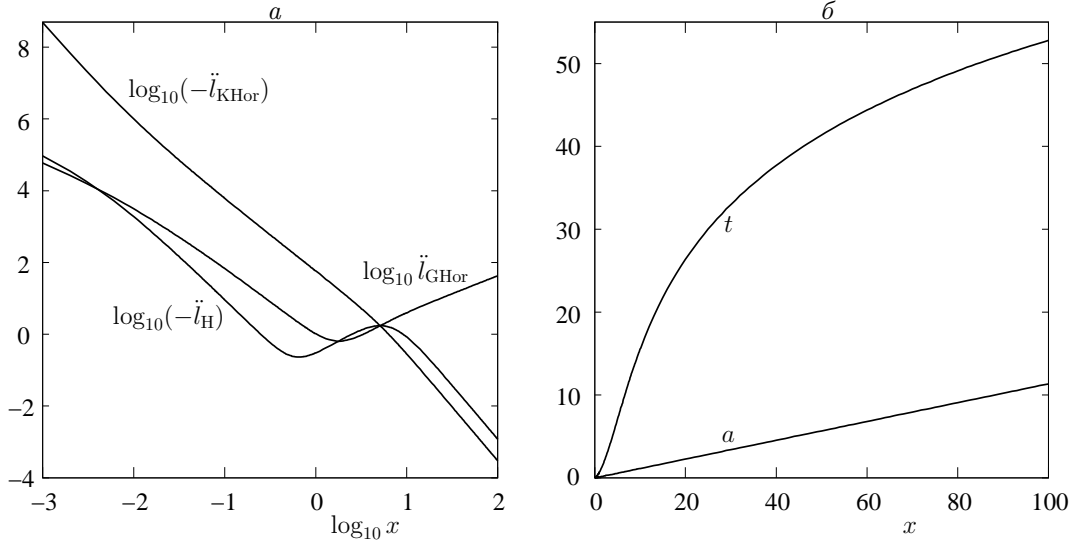


Рис. 13: *а*: Ускорения горизонтов и хаббловского расстояния. *б*: Связь  $a$  и  $t$  с  $x$ .

расширения места этого горизонта  $c(\eta_{\infty} - \eta_0) = 1.13c$ , а скорость удаления кинематического горизонта от нас сейчас  $0.13c$ .

Современные значения ускорений горизонтов:  $\ddot{l}_{\text{GHor}}^0 = 3.45H_{\Lambda}c = 19.9 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2$ ,  $\ddot{l}_{\text{KHor}}^0 = -1.95H_{\Lambda}c = -11.3 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2$ .

Вначале, пока  $\eta_{\infty} - \eta > \eta$ , расстояние до второго горизонта больше, чем до первого. Горизонты пересеклись при  $\eta_{\text{crs}} = \eta_{\infty}/2 = 2.23$ ,  $x_{\text{crs}} = 4.08$ ,  $z_{\text{crs}} = 1.677$ , в эпоху  $t_{\text{crs}} = 3.93$  млрд лет от начала, то есть  $t_0 - t_{\text{crs}} = 9.80$  млрд лет тому назад (раньше, чем началось ускорение — 6.5 млрд лет назад), когда расстояние до них было 3.58 Гпк. Первый горизонт (фактически не он, а физический горизонт) ограничивает сферическую область пространства, в которую можно смотреть и видеть прошлую историю Вселенной, а второй определяет те области, информация из которых никогда не придет к наблюдателю. Если галактика находится за вторым горизонтом, ее излучение до нас дойти не сможет никогда, так как она удаляется со все возрастающей скоростью. Все такие галактики в отдаленном будущем уйдут из нашего поля зрения. Мы не сможем никогда увидеть, как выглядят сейчас галактики, расположенные на красных смещениях, больших 1.72. Однако, информация об объектах, которые находятся ближе 5 Гпк, рано или поздно сможет до нас дойти.

#### § 4. Связь с внеземными цивилизациями

Предположим, что в нашу эпоху ( $t = t_0$ ,  $\eta = \eta_0$ ) в некотором направлении испускается радиосигнал. Расстояние до него увеличивается и при значении конформного времени  $\eta > \eta_0$  окажется  $l_{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta)(\eta - \eta_0)$ ,  $\eta \geq \eta_0$ . Его скорость составляется из скорости расширения и скорости света:

$$\dot{l}_{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 \dot{a}(\eta - \eta_0) + l_{\text{H}}^0 a \dot{\eta} = H l_{\text{ph}} + c. \quad (294)$$

Дальше для краткости опускаем множитель  $l_{\text{H}}^0$ , то есть используем расстояния, измеряемые в хаббловских.

По пути сигнал встречает объекты с фиксированной пространственной координатой  $\chi_{\text{O}} = \eta_0 - \eta_{\text{O}}$ . Расстояния до них растут только за счет космологического расширения, то есть увеличения масштабного множителя:  $\tilde{l}_{\text{O}} = a(\eta)(\eta_0 - \eta_{\text{O}})$ . Сигнал догонит объект, когда их расстояния от нас станут равными, то есть в момент  $\eta_{\text{mt}}$ , когда  $\eta_{\text{mt}} - \eta_0 = \eta_0 - \eta_{\text{O}}$ ,  $\eta_{\text{mt}} = 2\eta_0 - \eta_{\text{O}}$ . Тогда  $\tilde{l}_{\text{ph}} = \tilde{l}_{\text{O}} = a(2\eta_0 - \eta_{\text{O}})(\eta_0 - \eta_{\text{O}})$ . Так как  $\eta_{\text{mt}}$  не может превосходить  $\eta_{\infty}$ , то сигнал может встретить за конечное (хотя, возможно, очень большое) время только те объекты, у которых координата  $\chi_{\text{O}} < \eta_{\infty} - \eta_0 = 1.13$ , то есть она имеет ту же границу, что и фотон, летящий к нам, — второй горизонт (см. выше), а  $\eta_{\text{O}} > \eta_{\text{lim}} = 2\eta_0 - \eta_{\infty} = 2.19$ .

Т а б л и ц а 11. Объекты на пути сигнала.

$\eta_{\text{O}}$	$x_{\text{O}}$	$a_{\text{O}}$	$z_{\text{O}}$	$l_{\text{O}}^0$ Гпк	$t_{\text{O}}$
1.99	2.67	0.303	2.30	5.69	2.89
2.19	3.23	0.367	1.73	4.84	3.83
2.39	3.87	0.440	1.28	3.98	4.95
2.59	4.60	0.523	0.913	3.12	6.29
2.79	5.46	0.620	0.613	2.27	7.88

На рис. 14а помещены прямые, отражающие зависимость расстояний  $l_{\text{O}}$  до пяти объектов от координаты  $x$ , там же указываются положения сигнала и кинематического горизонта. Объекты характеризуются значениями

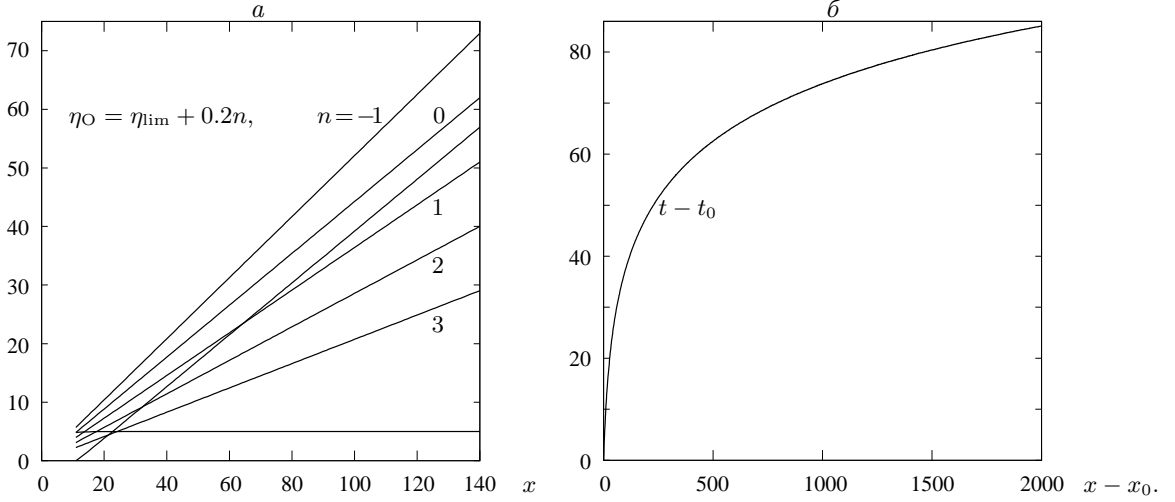


Рис. 14: а) Путь сигнала к объектам.

б) Связь времени полета с  $x$

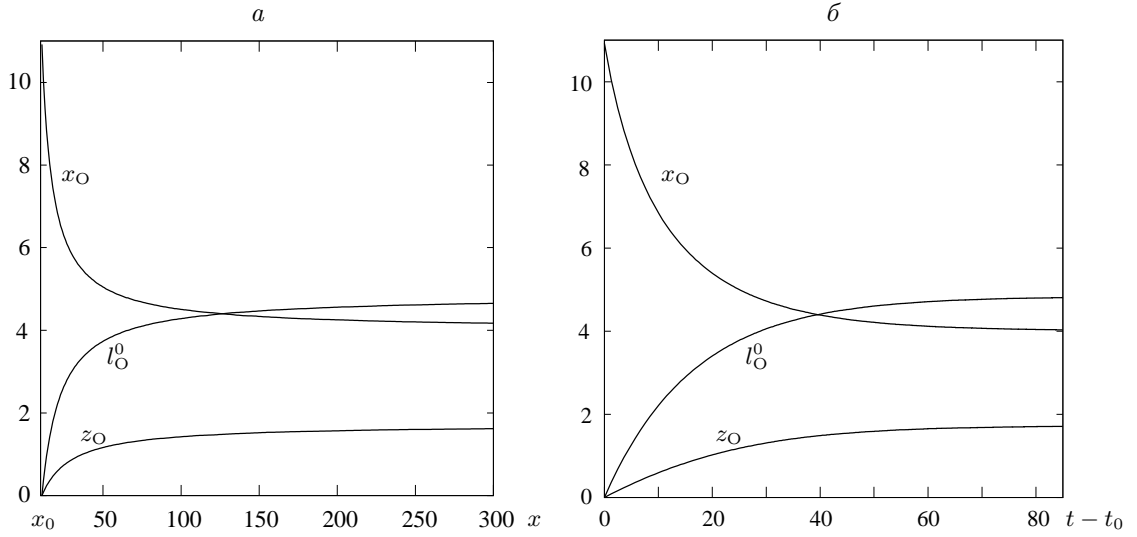


Рис. 15: Координата  $x_O$ , расстояние  $l_O^0$  и красное смещение  $z_O$  объектов, достижимых сигналом, в зависимости от  $x$  (а) и времени полета (б).

$\eta_O = \eta_{\text{lim}} + 0.2n$ ,  $n = -1(1)3$ . Соответствующие значения  $x_O$ , масштабного множителя  $a_O = a(\eta_O)$  и красного смещения  $z_O$ , а также современные расстояния до этих объектов  $l_O^0$  приведены в табл. 11. Из рисунка видно, что посланный сигнал доходит до объектов только при  $n = 1, 2, 3$ . Сигнал приходит раньше к объектам с большими  $\eta_O$ , и тем самым, меньшими  $z_O$  и  $l_O$ , то есть расположенными в момент испускания сигнала ближе к месту и моменту его выхода.

Только объект с  $n = 3$ , у которого значение  $\eta_O$  равно 2.79, сигнал догоняет прежде, чем он пересекают второй горизонт. Условие этого  $\eta_0 - \eta_O < \eta_\infty - 2\eta_O + \eta_O$ , то есть  $\eta_O > \eta_h = \frac{3\eta_0 - \eta_\infty}{2} = 2.758$ .

Расстояние между объектом, находящимся сейчас почти на втором горизонте (расстояние до него сейчас 4.84 Гпк, его красное смещение 1.72), то есть при  $\tilde{l}_O^0 = \eta_\infty - \eta_0 - \varepsilon$ ,  $\eta_O = \eta_{\text{lim}} + \varepsilon$ , и сигналом

$$l_O - l_{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta)(\eta_0 - \eta_{\text{lim}} - \varepsilon) - l_{\text{H}}^0 a(\eta)(\eta - \eta_0) = l_{\text{H}}^0 a(\eta)(\eta_\infty - \varepsilon - \eta) \sim \frac{c}{H_\Lambda} \frac{\eta_\infty - \varepsilon - \eta}{\eta_\infty - \eta}, \quad (295)$$

так как согласно (119) и (131)  $\eta \sim \eta_\infty - \eta_*/x$ ,  $a(\eta) = x/x_0 \sim 1/[\sqrt{\Omega_\Lambda^0}(\eta_\infty - \eta)]$  при  $x \rightarrow \infty$ ,  $\eta_\infty - \eta \ll 1$ . Разность (295) стремится к нулю при  $\eta \rightarrow \eta_\infty - \varepsilon$ , если  $\varepsilon > 0$ . Таким образом, сигнал все же дойдет до любого объекта, если этот объект расположен хотя бы чуть-чуть ближе второго горизонта. Время до встречи сигнала с объектом  $t \sim \ln(1/\varepsilon)$ . При расположении объекта на горизонте ( $\varepsilon = 0$ ) остается непреодолимое расстояние  $c/H_\Lambda = 5.05$  Гпк. Между испущенным сейчас сигналом и объектами, которые сейчас располагаются за вторым горизонтом, расстояние со временем будет только увеличиваться, причем асимптотически по экспоненте. Эти объекты увлекаются именно экспоненциальным расширением, то есть отталкиванием темной энергии. В моделях

без отталкивания второй горизонт не возникает. На рис. 14б нанесена зависимость от  $x$  временной координаты  $\eta$ .

На рис. 15 представлены зависимости координат  $x_O$ ,  $\eta_O$  и  $\chi_O = \eta_0 - \eta_O$ , а также красных смещений  $z_O$  объектов, до которых дойдет сигнал в момент, соответствующий его координате  $x$  (а) и времени полета (б).

Сигнал, посланный сейчас, дойдет до второго горизонта, когда

$$l_{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta_{\text{h}})(\eta_{\text{h}} - \eta_0) = l_{\text{KHOr}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta_{\text{h}})(\eta_{\infty} - \eta_{\text{h}}), \quad \eta_{\text{h}} = \frac{\eta_0 + \eta_{\infty}}{2} = 3.89. \quad (296)$$

Соответствующие значения  $x_{\text{h}} = 18.3$ ,  $l_{\text{ph}} = l_{\text{KHOr}} = 5.02$  Гпк,  $t_{\text{h}} = 24.9$  Г лет. В это время к горизонту подойдет объект с исходной координатой  $x_O = 5.30$ , при которой  $a_O = 0.601$ ,  $z_O = 0.663$ , и исходным расстоянием до нас  $l_O^0 = l_{\text{H}}^0(\eta_0 - \eta_O) = 1.45$  Гпк, так как если  $l_O = l_{\text{ph}} = l_{\text{KHOr}}$ , то  $\eta_0 - \eta_O = \eta_{\text{h}} - \eta_0 = \eta_{\infty} - \eta_{\text{h}}$  и  $\eta_O = (3\eta_0 - \eta_{\infty})/2 = 2.76$ .

Только до расстояний  $\approx 5$  Гпк сможет прийти посланный нами сигнал с надеждой на ответ. Экспоненциальное расширение пространства увлекает излучение, как идущее от нас, так и направленное к нам. Тем не менее, 5 Гпк — это очень большое расстояние, в сфере такого радиуса находится много галактик и, конечно, еще больше экзопланет.

Если сигнал попадет на планету, населенную разумными существами, достигшими достаточно продвинутой цивилизации, они его примут, поймут, определяют, из какого направления он пришел, и ответят, то их сигнал будет приближаться к тому месту, где были мы — люди, пославшие первый сигнал. Тогда расстояние до нас будет изменяться по формуле  $\tilde{l}_{\text{ret}} = a(\eta)(\eta_{\text{mt}} - \eta_0 - \eta) = a(\eta)(\eta_0 - \eta_O - \eta) = a(\eta)(3\eta_0 - 2\eta_O - \eta)$ . Ответ дойдет до нас в момент  $\eta_{\text{ret}} = 3\eta_0 - 2\eta_O$ . Если мы хотим, чтобы ответ пришел в момент  $\eta_{\text{ret}}^0 > \eta_0$ , но  $\eta_{\text{ret}} < \eta_{\infty}$ , то у такой цивилизации должно быть  $\eta_O > (3\eta_0 - \eta_{\text{ret}}^0)/2$ ,  $\chi_O < (\eta_{\text{ret}}^0 - \eta_0)/2$ . В крайнем случае, если принять, что  $\eta_{\text{ret}}^0 = \eta_{\infty}$ , то условие  $\eta_{\text{ret}} < \eta_{\infty}$  накладывает ограничение на координату  $\eta_O$ :  $\eta_O > (3\eta_0 - \eta_{\infty})/2$ . Это ограничение совпадает с условием, что сигнал дойдет до объекта — цивилизации прежде, чем она достигнет второго горизонта. Ограничение на пространственную координату также прежнее:  $\chi_O = \eta_0 - \eta_O < (\eta_{\infty} - \eta_0)/2$ .

Ясно, что посылать сигнал имеет смысл к объектам, расположенным не дальше нескольких десятков световых лет, иначе ждать возможного ответа придется слишком долго. Несомненно, придется ограничиться нашей Галактикой и даже ближайшими окрестностями Солнечной системы. При всем при том сигналы либо надо посылать в очень узких телесных углах, либо придется сообщать им весьма большую энергию, чтобы они могли быть приняты на достаточно большом расстоянии.

Конечно, приведенные рассуждения носят чисто теоретический или даже академический характер, но они устанавливают принципиальные, предельные ограничения, накладываемые моделью. Они могут относиться либо к эпохам, когда нашей земной цивилизации еще не было или она не была способна осуществить связи с другими цивилизациями, либо к эпохам, когда Солнце и Земля прекратят свое существование в современной форме. Но эти же рассуждения относятся к произвольной точке Вселенной и к цивилизациям, которые могут возникнуть и процветать в любое время.

## Заключение

В этом курсе излагаются основные положения современной космологии как науки о глобальном строении Вселенной. Приводятся и изучаются общие уравнения Фридмана–Леметра, обсуждаются их частные решения, являющиеся моделями Вселенной. Определены основные характеристики моделей. Рассмотрены закономерности распространения излучения в искривленном пространстве, введено понятие геометрического горизонта. Определяются космологическое красное смещение и различные типы космических расстояний. Дается интерпретация соотношений Хаббла. Описываются космологические тесты, то есть способы выбора модели, соответствующей реальной Вселенной, и представляется модель, наиболее адекватная ей — Стандартная космологическая модель. Приводятся характеристики реликтового излучения и космических нейтрино. Дается описание основных эпох истории горячей Вселенной и основных физических процессов, происходящих в эти эпохи. Дается представление о первичном нуклеосинтезе и образовании крупномасштабной структуры Вселенной. Показано, как теория инфляции разрешает трудности Стандартной модели: проблемы плоскостности, горизонта, однородности и другие. Обсуждаются понятия второй инфляции и второго горизонта. Рассчитаны расстояния до горизонтов, их скорости и ускорения. Показано, какие трудности могут возникнуть при эжелании связаться с внезапными цивилизациями.

## Список литературы

- [1] Я.Б.Зельдович, И.Д.Новиков. Строение и эволюция Вселенной. М., 1975.
- [2] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. М., 1988.
- [3] F.Hoyle, G.Burbidge, J.V.Narlikar. A Different Approach to Cosmology. Cambridge University Press. 2000.