

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. В. Орлов

А. В. Рубинов

ЗАДАЧА N ТЕЛ
В ЗВЁЗДНОЙ
ДИНАМИКЕ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2008

074

Рецензенты: докт. физ.-мат. наук В.В.Бобылев
(ГАО РАН),
докт. физ.-мат. наук Ю.Д.Медведев
(ИПА РАН),
докт. физ.-мат. наук И.И.Шевченко
(ГАО РАН)

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

Орлов В.В., Рубинов А.В.

074 Задача N тел в звездной динамике: Учеб. пособие. —
СПб., 2008. — 175 с.

В книге описываются основные проблемы современной звездной динамики, так или иначе связанные с решением гравитационной задачи N тел. Круг объектов, исследование динамики которых связано с решением задачи N тел, очень широк: от тройных систем звезд до крупномасштабной структуры Вселенной. В книге изложены основные методы решения задачи N тел в зависимости от объекта исследования. Для каждой из задач выписаны основные уравнения. В ряде случаев приводятся алгоритмы численного решения этих задач. Большое внимание уделяется изложению результатов исследований. Часть результатов получена на кафедре небесной механики С.-Петербургского университета. Изложение сопровождается многочисленными иллюстрациями. В книге приведен обширный список литературы, который читатель может использовать для детального изучения заинтересовавшей его проблемы.

Для студентов и аспирантов астрономических отделений и кафедр университетов, а также специалистов в области звездной динамики, небесной механики и астрофизики.

Рисунок на обложке выполнен Я.О.Чумаком по результатам расчетов программы *NBODY6*. Рассматривается приливная деформация рассеянных звездных скоплений разных возрастов галактическим гравитационным полем. С течением времени образуются протяженные шлейфы скоплений, которые простираются на сотни парсек.

© В.В.Орлов, А.В.Рубинов, 2008

© С.-Петербургский гос. университет, 2008

Оглавление

Введение	5
Рекомендуемая литература	7
Глава I. Задачи и методы	9
§1. Где встречается задача N тел?	9
§2. “Подводные камни” и борьба с ними	10
§3. Индивидуальный шаг и схема Амада-Коэна	13
§4. Регуляризация двойных сближений и KS -преобразование	16
§5. Применение KS -преобразования в задаче N тел	20
§6. Регуляризация тройных сближений методом Арсета-Заре	22
§7. Цепочная регуляризация методом Микколы-Арсета	24
§8. “Замедление” тесных двойных	26
§9. Эффекты звездной эволюции	28
§10. Приливное взаимодействие	32
§11. Неупругие столкновения и слияния	33
§12. Внешние поля и динамическое трение	35
§13. Космологическое расширение	37
§14. Иерархические алгоритмы	40
§15. Методы “частица-ячейка”	42
§16. Специализированные компьютеры и пакеты программ	45
Глава II. Задача трех тел	48
§1. Классификация движений	48
§2. Формирование двойных при тройных сближениях	53
§3. Гравитационное рассеяние	57
§4. Динамика изолированных тройных систем	64
§5. Тройные сближения и распад тройных систем	67
§6. Стохастичность и регулярность	72

§7.	Динамическая устойчивость	80
§8.	Периодические орбиты	83
§9.	Некоторые частные случаи задачи трех тел	91
Глава III. Динамика звездных групп и скоплений . . .		97
§1.	Динамическая эволюция кратных звезд	97
§2.	Динамика рассеянных звездных скоплений	101
§3.	Звездные скопления с первичными двойными	105
§4.	Звездная динамика и звездная эволюция	108
§5.	Влияние внешних полей на динамику скопления	111
§6.	Взаимодействие скоплений с газовыми облаками и друг с другом	112
§7.	Динамика шаровых скоплений	115
Глава IV. Динамика галактик и систем галактик . . .		119
§1.	Эллиптические галактики	119
§2.	Диски	122
§3.	Спиральная структура	127
§4.	Устойчивость	129
§5.	Сближения и слияния галактик	134
§6.	Группы галактик	141
§7.	Изолированные скопления галактик	143
§8.	Скопления и сверхскопления галактик как фраг- менты крупномасштабной структуры	145
§9.	Крупномасштабная структура Вселенной	148
Литература		154

Введение

Эволюция звездных систем в значительной мере определяется гравитационным взаимодействием звезд друг с другом и с межзвездной средой. Это взаимодействие в некотором приближении можно описать в рамках гравитационной задачи N материальных точек.

Уравнение движения i -ой точки ($i = 1, 2, \dots, N$) имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad (1)$$

где G — гравитационная постоянная, m_j — масса j -ой точки, \mathbf{r}_i и \mathbf{r}_j — радиусы-векторы i -ой и j -ой точек. Систему уравнений вида (1) можно записать как систему $6N$ дифференциальных уравнений первого порядка для координат и скоростей тел.

Аналитическое решение системы уравнений вида (1) в общем случае получено при $N = 2$. При $N = 3$ и ненулевом угловом моменте Сундманом в 1913 году найдено общее решение в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов. Однако это решение оказывается практически неприменимым из-за очень медленной сходимости рядов. Также при $N \geq 3$ были получены некоторые частные аналитические решения.

Однако для решения задачи Коши системы (1) с определенными начальными условиями можно использовать численное интегрирование. Первое численное решение задачи трех тел было выполнено Стремгреном в 1900 году.

Первые численные решения звездной задачи N тел на компьютере были получены фон Хернером в 1960 году. Он рассмотрел ди-

намическую эволюцию групп звезд, состоящих из $N = 4, 8, 12, 16$ компонентов.

К настоящему времени число статей, посвященных численному моделированию динамической эволюции систем N тел, измеряется тысячами. Модели N тел (N -body simulations) используются при изучении динамики кратных звезд, звездных скоплений, галактик и систем галактик. В настоящей книге рассматриваются различные методы, используемые в численных экспериментах, и результаты моделирования. Как правило, рассматривается задача N материальных точек, но иногда обсуждается также движение в поле протяженных объектов. В данной книге почти не затрагиваются аналитические исследования задачи N тел в небесной механике и звездной динамике. В качестве введения в аналитическую небесную механику и звездную динамику можно рекомендовать соответствующие главы в книгах Дэнби (Danby J.M.A., *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Willmann-Bell. Richmond. VA. 1992), Бинни и Тремейна (Binney J., Tremaine S., *Galactic Dynamics: (Second Edition)*, Princeton Univ. Press. Princeton. 2008). По задаче 2 тел можно рекомендовать учебное пособие К.В.Холшевникова и В.Б.Титова (Задача двух тел. Изд. СПбГУ. Санкт-Петербург. 2007).

Далее приводится список основных книг и обзоров по данной тематике, а в конце книги приводится более полный список литературы, к которому читатель может обратиться за более детальной информацией.

Рекомендуемая литература

1. Аносова Ж.П. Численно-экспериментальные методы в звездной динамике. Итоги науки и техники. Сер. Астрономия. 1985. Т. 26. С. 57.
2. Аносова Ж.П., Орлов В.В. Динамическая эволюция тройных систем. Труды АО ЛГУ. 1985. Т. 40. С. 66.
3. Арсет (Aarseth S.J.). Direct methods for N-body simulations. In "Multiple time scales" (Eds. Brackbill J.U., Cohen B.I.). Academic Press. New York. 1985. P. 377.
4. Арсет (Aarseth S.J.). From NBODY1 to NBODY6: the growth of an industry. Publ. Astron. Soc. Pacif. 1999. V. 111. P. 1333.
5. Арсет (Aarseth S.J.). Gravitational N-body simulations. Tools and algorithms. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 2003.
6. Бинни, Тремейн (Binney J., Tremaine S.). Galactic Dynamics: (Second Edition). Princeton Univ. Press. Princeton. 2008.
7. Валтонен (Valtonen M.J.). The general three-body problem in astrophysics. Vistas Astron. 1988. V. 32. P. 23.
8. Валтонен, Карттунен (Valtonen M.J., Karttunen H.). The three-body problem. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 2006.
9. Валтонен, Миккола (Valtonen M.J., Mikkola S.). The few-body problem in astrophysics. Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1991. V. 29. P. 9.

10. Кинг А.Р. Введение в классическую звездную динамику. УРСС. М. 2002.
11. Киселева, Орлов (Kiseleva L.G., Orlov V.V.). Dynamics of galaxy groups: computer simulations versus observations. *Vistas Astron.* 1993. V. 36. P. 1.
12. Маршаль (Marchal C.). The three-body problem. Elsevier. Amsterdam. 1990. (Перевод: Изд-во Института компьютерных исследований. Москва-Ижевск. 2004).
13. Орлов В.В., Сотникова Н.Я. Численные эксперименты в звездной динамике. В сб. "Астрономия: традиции, настоящее, будущее" (Ред. Орлов В.В., Решетников В.П., Сотникова Н.Я.). Изд-во СПбГУ. СПб 2007. С. 169.
14. Саслау (Saslaw W.C.). Gravitational physics of stellar and galactic systems. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 1985. (Перевод: Мир. Москва. 1989).
15. Селлвуд (Sellwood J.). The art of N-body building. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1987. V. 25. P. 151.
16. Хокни, Иствуд (Hockney R.W., Eastwood J.W.). Computer simulation using particles. McGraw-Hill. New York. 1981. (Перевод: Мир. Москва. 1987).

Глава I

Задачи и методы

§1. Где встречается задача N тел?

Гравитационная задача N тел так или иначе появляется практически во всех разделах астрономии.

Перечислим те классы астрономических объектов, к которым применялись результаты моделирования в рамках гравитационной задачи N тел (в ряде случаев с учетом дополнительных сил и эффектов):

- кратные звезды,
- рассеянные скопления,
- шаровые скопления,
- взаимодействующие галактики,
- группы галактик,
- скопления галактик,
- Метагалактика,
- кратные радиоисточники в ядрах галактик,
- эллиптические галактики,
- дисковые галактики,
- бары галактик,
- спиральная структура,
- планетные и спутниковые системы,
- пылевые комплексы и кольца планет,
- протопланетное облако,
- сталкивающиеся и сливающиеся звезды,
- кратные протозвезды с дисками,
- системы искусственных небесных тел.

По-видимому, это далеко не полный перечень объектов. Но даже глядя на него, мы можем оценить неисчерпаемость задачи N тел.

Для каждого класса объектов имеется своя специфика решения задачи N тел. Эти особенности отражены в настоящей книге. С другой стороны, уравнения движения (1) одни и те же во всех случаях, если не привлекать какие-то дополнительные факторы. Поэтому имеет место определенная общность подходов к моделированию динамики всех перечисленных выше систем. Общие моменты также будут обсуждаться в книге.

§2. “Подводные камни” и борьба с ними

Задача N тел очень просто формулируется. Однако при интегрировании системы уравнений (1) мы сталкиваемся с рядом трудностей. Главная трудность связана с тесными сближениями тел. Если происходит тесное сближение двух или нескольких тел, то правые части уравнений (1) для сближающихся тел становятся очень большими, что приводит к быстрому накоплению ошибок вычислений.

Кроме того, следует учитывать, что начальные данные всегда известны не точно, а с погрешностью. В ряде случаев, в особенности при тесных сближениях, может иметь место экспоненциальное разбегание близких траекторий, приводящее к быстрому увеличению этих погрешностей со временем.

Самый простой способ борьбы с этой сингулярностью — введение в уравнения (1) “смягчающих” поправок ε_i и ε_j :

$$\ddot{\mathbf{r}}_i = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \varepsilon_i^2 + \varepsilon_j^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

По сути дела, вместо взаимодействия материальных точек мы рассматриваем взаимодействие бесконечных протяженных тел с распределением плотности, соответствующим модели Пламмера,

$$\rho(r) \propto \frac{1}{(r^2 + \varepsilon^2)^{5/2}}. \quad (3)$$

Параметр “смягчения” $\varepsilon \approx 0.77R_{1/2}$, где $R_{1/2}$ — радиус полумассы тела (Арсет и Фолл 1980). Уравнения (2) остаются регулярными даже при лобовых столкновениях тел.

Заметим, что хотя метод “смягчающих” поправок позволяет избежать сингулярности, он имеет ограниченную область применения, поскольку в ряде случаев (особенно при тесных сближениях) его использование приводит к сильному искажению фазовой траектории системы.

Другой способ борьбы с особенностями уравнений (1) — регуляризация уравнений движения. Этому вопросу будет посвящено несколько параграфов. Основная идея регуляризации — замена перемной интегрирования (времени) и одновременное преобразование координат и скоростей тел таким образом, чтобы избежать сингулярности уравнений движения при тесных сближениях тел.

Заметим, что регуляризация позволяет обходить даже двойные соударения тел, поскольку они допускают аналитическое продолжение (см., например, книгу Маршала 1990). Однако тройные соударения и соударения большего числа тел представляют собой существенную особенность, поэтому регуляризовать их не удастся.

Еще один “подводный камень” численных экспериментов — ошибки интегрирования. Можно выделить два основных сорта ошибок: ошибки усечения и ошибки округления. Первые связаны с заменой дифференциальных уравнений на разностные. Вторые — с конечной разрядной сеткой. При большом шаге интегрирования преобладают ошибки усечения, а при мелком — ошибки округления. По-видимому, имеется оптимальный диапазон значений шага, в котором суммарные ошибки округления и усечения минимальны.

Контроль вычислений часто осуществляется по сохранению интегралов движения. Наиболее чувствительны к ошибкам интегралы энергии и углового момента. Однако сохранение интегралов не гарантирует устойчивости решения по Ляпунову. Численное решение может сколь угодно далеко отклониться от истинного решения, оставаясь при этом в малой окрестности гиперповерхности постоянных интегралов.

Дополнительными контролями точности могут служить обратный пересчет и согласие его результатов и начальных условий задачи, а также согласие результатов вычислений с различными значениями параметров точности интеграторов или вычислений, выполненных разными методами.

Особую роль в процессе накопления ошибок вычислений играют тесные сближения тел. Именно при тесных сближениях происходит быстрая расходимость близких траекторий, и накопленные к этому

времени даже небольшие погрешности могут привести к существенному изменению фазовой траектории и ее численной реализации. Разбегание траекторий происходит по экспоненциальному закону.

Рассмотрим еще один аспект численного моделирования — соотношение между точностью вычислений и быстродействием. Для повышения скорости расчетов мы можем увеличить шаг интегрирования. Однако это приведет к уменьшению точности результатов. По-видимому, существует оптимальный диапазон значений шага интегрирования (зависящий от метода интегрирования), в котором достигается разумный компромисс между скоростью и точностью вычислений.

Выбор шага интегрирования зависит от поставленной задачи. Например, при изучении индивидуальных траекторий движения тел на длительном интервале времени целесообразно проводить вычисления с максимально высокой точностью. При статистическом анализе можно проводить вычисления с худшей точностью, чтобы иметь возможность рассмотреть большее число вариантов начальных условий.

Точность результатов зависит от используемого метода численного интегрирования. Большей точности можно добиться, если использовать интегратор более высокого порядка, поскольку таким образом мы уменьшаем ошибку усечения. Такой подход более эффективен, чем интегрирование методом низкого порядка с мелким шагом. В последнем случае происходит более сильное накопление ошибок округления. Кроме того, при использовании интегратора высокого порядка мы можем проводить вычисления с более крупным шагом, что позволяет экономить процессорное время при сохранении высокой точности результатов.

Численное интегрирование уравнений задачи N тел в звездной динамике часто проводят методами Рунге-Кутты различных порядков (от 4-го и выше); также используются разложение в ряд Тэйлора, методы прогноз-коррекция (например, метод Эверхарта, 1974), метод Булирша-Штера (1966), метод полиномов Эрмита (см. Арсет 2003), симплектические интеграторы (см., например, Юшида 1993) и другие методы.

Выбор метода численного интегрирования зависит от конкретной задачи. Для вычислений с высокой точностью рекомендуется использовать методы высоких порядков типа метода Эверхарта или Рунге-Кутты 10-го порядка. Если очень высокая точность не

требуется, то можно использовать методы более низких порядков (например, метод Рунге-Кутты 4-го порядка) или применять интеграторы высокого порядка с крупным шагом.

§3. Индивидуальный шаг и схема Амада-Коэна

В ходе динамической эволюции системы N тел разные тела находятся в областях с разной локальной плотностью. Поэтому силы, действующие на тела со стороны других тел, будут различны. Координаты и скорости тел также меняются с разной скоростью. Для ускорения процесса вычислений целесообразно для каждого тела вводить индивидуальный шаг интегрирования.

Алгоритм выбора индивидуального шага можно представить себе следующим образом (см., например, книгу Арсета 2003). Вводятся два набора координат и скоростей: главный $\mathbf{r}_j(t_j)$, $\mathbf{v}_j(t_j)$ и вторичный $\tilde{\mathbf{r}}_j(t)$ и $\tilde{\mathbf{v}}_j(t)$, где $j = 1, 2, \dots, N$; t_j — индивидуальный момент времени (для каждого тела свой); t — текущий момент времени (общий для всех тел).

Для сокращения времени расчетов можно ввести список M тел, для которых

$$t_j + \delta t_j < t_M, \quad (4)$$

где t_M — некоторое критическое время, δt_j — текущее значение индивидуального шага j -го тела ($j = 1, 2, \dots, N$). Выбор величины δt_j описан ниже.

В начальный момент времени $t = 0$ можно принять $t_M = \delta t_M$, где δt_M — малый интервал времени, который выбирается так, чтобы список M содержал $\sim \sqrt{N}$ тел. Переопределение списка M производится, когда текущее общее время t станет больше, чем t_M . Тогда поиск новых членов списка M производится снова по всем N телам системы.

Главный цикл интегрирования начинается с определения частицы, для которой величина $t_j + \delta t_j$ минимальна. Если этой частице мы припишем номер i , то текущий момент времени становится равным

$$t = t_i + \delta t_i. \quad (5)$$

Если известны координаты и скорости j -ой частицы в момент времени t_j , то мы можем вычислить ее координаты в момент времени t , используя предиктор

$$\tilde{\mathbf{r}}_j(t) = \mathbf{r}_j(t_j) + [\mathbf{v}_j(t_j) + \left(\frac{1}{2}\mathbf{F}_j + \frac{1}{6}\mathbf{F}'_j(t - t_j)\right)(t - t_j)](t - t_j), \quad (6)$$

где \mathbf{F}_j и \mathbf{F}'_j — значения правых частей уравнений движения и их производных в момент времени t_j . Формула (6) — отрезок разложения в ряд Тэйлора (до 3-го порядка).

После определения нового момента времени t происходит инициализация главных координат i -ой частицы

$$\mathbf{r}_i(t_i) = \tilde{\mathbf{r}}_i(t). \quad (7)$$

Цикл интегрирования завершается предсказанием нового шага по времени для каждой частицы. Этот шаг зависит от правых частей и их производных. Арсет (1985) предлагает следующую эмпирическую формулу для оценки шага

$$\delta t_i = \sqrt{\eta \frac{|\mathbf{F}_i| \cdot |\mathbf{F}''_i| + |\mathbf{F}'_i|^2}{|\mathbf{F}'_i| \cdot |\mathbf{F}'''_i| + |\mathbf{F}''_i|^2}}, \quad (8)$$

где η — безразмерный параметр точности. Определяющую роль в выборе шага, согласно (8), играют ближайшие соседи. Формула (8) работает и в некоторых специальных случаях, например, когда все тела неподвижны, то есть $\mathbf{F}'_i = \mathbf{F}''_i = \mathbf{0}$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Обычно величины δt_i меняются со временем гладко, однако можно искусственно ограничивать их рост. Например, Арсет (1985) рекомендует не увеличивать δt_i более чем в $\sqrt{2}$ раз.

Параметр η служит для контроля точности вычислений. Для метода разложения в ряд Тэйлора вплоть до членов 4-го порядка Арсет (1985) рекомендует использовать $\eta = 0.03$. Такое значение обеспечивает относительную ошибку интеграла энергии в пределах 10^{-4} в течение одного среднего времени пересечения системы.

Следует отметить, что формулы, аналогичные (6), можно использовать и для вычисления вторичного набора скоростей тел $\tilde{\mathbf{v}}_j(t)$.

Введение индивидуального шага позволяет существенно ускорить процесс вычислений и сохранить высокую точность при усло-

вии, что система N тел сильно неоднородна, и в ней часто происходит тесные сближения тел. Если траектории движения регулярны, то индивидуальный шаг можно не вводить.

Еще один способ ускорения счета был предложен в работе Амада и Коэна (1973). Эти авторы предлагают вокруг каждого тела выделить несколько близких соседей, создающих быстро меняющееся силовое поле. Используются две шкалы времени — короткая для близких соседей и длинная для остальных тел.

Чтобы реализовать этот алгоритм, для каждой частицы заводится список L соседей, находящихся в пределах сферы некоторого радиуса R_s с центром в рассматриваемой частице. В список L также включаются более далекие тела с расстояниями в пределах от R_s до $2^{1/3}R_s$, которые приближаются к частице с прицельным расстоянием меньше R_s . Такая зона нужна, чтобы не упустить частицы, сближающиеся с высокими скоростями, пока они не успели глубоко проникнуть внутрь сферы соседей.

Список соседей L и радиус сферы R_s переопределяются заново в конце каждого регулярного шага, соответствующего длинной шкале времени.

Для оценки радиуса R_s можно использовать локальный контраст плотности

$$C = \frac{2L_1}{N} \left(\frac{R_{1/2}}{R_s} \right)^3, \quad (9)$$

где L_1 — число тел внутри сферы радиусом R_s ; $R_{1/2}$ — радиус сферы, содержащей половину тел системы, с центром в центре масс системы N тел. Величина C — отношение средней плотности внутри сферы соседей к средней плотности в пределах сферы, содержащей половину членов системы.

При определении нового радиуса R_s^{new} сферы соседей Арсет (1985) предлагает использовать полученный эмпирически прогноз числа частиц в пределах этой сферы

$$L_p = \frac{3}{4} L_{max} \sqrt{\frac{C}{20}}, \quad (10)$$

где L_{max} — параметр задачи.

Радиус новой сферы соседей равен

$$R_s^{new} = R_s^{old} \left(\frac{L_p}{L_1} \right)^{1/3}. \quad (11)$$

Численные эксперименты Арсета (1985) показали, что для устойчивой работы схемы Амада-Коэна необходимо, чтобы на одном шаге отношение L_p/L_1 менялось не более, чем на 25%.

Входящие и выходящие частицы идентифицируются на каждом регулярном шаге с помощью сравнения старого и нового списков L .

В схеме Амада-Коэна можно также использовать алгоритм индивидуального шага. Используются два шага: δt_i для близких соседей и δT_i для остальных тел. Характерное отношение $\delta T_i/\delta t_i \approx 10$. Обычно используется $L_{max} \approx \sqrt{N}$. Сравнение схемы Амада-Коэна и обычной схемы с индивидуальным выбором шага показывает, что метод Амада-Коэна становится более эффективным при $N > 25$. Для систем с меньшим числом тел более эффективен обычный метод.

§4. Регуляризация двойных сближений и KS -преобразование

При тесном сближении тел правые части уравнений (1) сильно возрастают, что приводит к резкой потере точности. Чтобы уменьшить потерю точности, можно преобразовать уравнения движения так, чтобы они стали регулярными.

Рассмотрим вначале лобовое столкновение двух тел (Себехей и Фигин 1968). Уравнение движения имеет вид

$$\ddot{x} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{x^2}, \quad (12)$$

где x — расстояние между телами. Это уравнение имеет особенность при $x \rightarrow 0$. Домножим (12) на \dot{x} и проинтегрируем. Получим интеграл энергии

$$\dot{x}^2 - \frac{2G(m_1 + m_2)}{x} = C, \quad (13)$$

где C — постоянная интегрирования, равная удвоенной полной энергии системы.

Уравнение (13) также имеет особенность при $x \rightarrow 0$. Однако ее можно устранить, если ввести новую независимую переменную τ (Сундман 1912):

$$d\tau = \frac{dt}{x}. \quad (14)$$

Тогда уравнение (12) становится регулярным

$$x'' - Cx = G(m_1 + m_2), \quad (15)$$

где штрих означает дифференцирование по переменной τ .

Уравнение (15) не имеет особенностей при $x \rightarrow 0$. Его можно интегрировать численно без потери точности.

Эта идея замены независимой переменной была реализована в работе Кустаанхеймо и Штифеля (1965). Кроме того, эти авторы предложили ввести вектор из четырех компонент $\mathbf{U} = (U_1, U_2, U_3, U_4)$ такой, что

$$U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 = R, \quad (16)$$

где R — взаимное расстояние между сближающимися телами m_1 и m_2 .

Замену времени (14) можно представить в виде

$$dt = R d\tau. \quad (17)$$

Вектор положения тела m_2 в системе отсчета, связанной с телом m_1 , можно представить в виде

$$\mathbf{R} = (X, Y, Z, 0). \quad (18)$$

Здесь вводится еще одно фиктивное измерение. Тогда преобразование координат имеет следующий вид:

A) при $X > 0$:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}(R+X)} \\
U_2 &= \frac{1}{2} \frac{Y}{U_1} \\
U_3 &= \frac{1}{2} \frac{Z}{U_1} \\
U_4 &= 0;
\end{aligned} \tag{19}$$

Б) при $X \leq 0$:

$$\begin{aligned}
U_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(R-X)} \\
U_1 &= \frac{1}{2} \frac{Y}{U_2} \\
U_4 &= \frac{1}{2} \frac{Z}{U_2} \\
U_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Связь между векторами \mathbf{R} и \mathbf{U} можно записать с помощью соотношения

$$\mathbf{R} = \mathcal{L} \cdot \mathbf{U}, \tag{21}$$

где \mathcal{L} — обобщенная матрица Леви-Чивита (1906) или KS-матрица. Эта матрица имеет вид

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} U_1 & -U_2 & -U_3 & U_4 \\ U_2 & U_1 & -U_4 & -U_3 \\ U_3 & U_4 & U_1 & U_2 \\ U_4 & -U_3 & U_2 & -U_1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Дифференцируя (21) по времени и используя (17), мы получаем связь между скоростями

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{2}{R} \mathcal{L} \cdot \mathbf{U}'. \tag{23}$$

Следует отметить важное свойство матрицы (22): производная по времени от произведения этой матрицы на вектор \mathbf{U} есть удвоенное произведение этой матрицы на производную вектора \mathbf{U} .

Здесь, как и раньше, точка сверху означает дифференцирование по t , а штрих — дифференцирование по τ .

Можно найти и обратную связь между \mathbf{R} и \mathbf{U} , $\dot{\mathbf{R}}$ и \mathbf{U}' :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{R} \mathcal{L}^T \cdot \mathbf{R}, \quad (24)$$

$$\mathbf{U}' = \frac{1}{2} \mathcal{L}^T \cdot \dot{\mathbf{R}}, \quad (25)$$

поскольку

$$\mathcal{L}^T \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L} \cdot \mathcal{L}^T = R \cdot \mathcal{E}, \quad (26)$$

где \mathcal{E} — единичная матрица размером 4×4 , а \mathcal{L}^T — транспонированная матрица Леви-Чивита.

Регуляризованное уравнение движения для вектора \mathbf{U} имеет вид

$$\mathbf{U}'' = \frac{1}{2} h \mathbf{U}, \quad (27)$$

где h — полная энергия двойной системы

$$h = \frac{1}{R} [2\mathbf{U}' \cdot \mathbf{U}' - G(m_1 + m_2)]. \quad (28)$$

Уравнение (27) является аналогом уравнения (15) в пространственном случае.

Связь между физическим временем t и фиктивным временем τ задается дополнительным уравнением

$$t' = R. \quad (29)$$

Система уравнений (27) и (29) не имеет особенностей при $R \rightarrow 0$.

Заметим, что матрица \mathcal{L} (22) — не единственная матрица, которая допускает регуляризацию уравнений движения задачи двух тел. Существует семейство таких матриц, которые называются \mathcal{L} -матрицами (см. книгу Полещикова и Холопова 1999). В этой книге содержатся некоторые рекомендации по выбору оптимальной \mathcal{L} -матрицы для конкретных задач. Однако, эта проблема еще не решена в полном объеме.

§5. Применение KS -преобразования в задаче N тел

Рассмотрим приложение KS -регуляризации двойных сближений к задаче N тел. Пусть происходит сближение тел с массами m_k и m_l . Введем вектор

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l, \quad (30)$$

где \mathbf{r}_k и \mathbf{r}_l — радиусы-векторы сближающихся тел в произвольной системе координат.

На эти тела действуют внешние силы со стороны других тел системы. Разность ускорений, создаваемых этими силами, равна

$$\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_l = -G \sum_{j=1, j \neq k, l}^N m_j \left(\frac{\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_j|^3} - \frac{\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_j|^3} \right). \quad (31)$$

Мы рассматриваем движение m_k и m_l как возмущенную задачу двух тел. В этом случае целесообразно ввести координаты Якоби. Введем радиус-вектор центра масс двойной

$$\mathbf{q} = \frac{m_k \mathbf{r}_k + m_l \mathbf{r}_l}{m_k + m_l}. \quad (32)$$

Уравнение движения центра масс двойной имеет вид

$$\ddot{\mathbf{q}} = \frac{m_k \mathbf{F}_k + m_l \mathbf{F}_l}{m_k + m_l}. \quad (33)$$

Из уравнений (30) и (32) можно выразить физические координаты \mathbf{r}_k и \mathbf{r}_l через координаты Якоби \mathbf{R} и \mathbf{q} :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k &= \mathbf{q} + \frac{m_l}{m_k + m_l} \mathbf{R} \\ \mathbf{r}_l &= \mathbf{q} - \frac{m_k}{m_k + m_l} \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогичные формулы справедливы для скоростей тел.

По аналогии с тем, как это делалось для невозмущенной задачи двух тел (§ 4), получаем регуляризованное уравнение относительного движения тел m_k и m_l :

$$\mathbf{U}'' = \frac{1}{2}h\mathbf{U} + \frac{1}{2}R \cdot \mathcal{L}^T \cdot (\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_l), \quad (35)$$

где вектора \mathbf{R} и $\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_l$ дополнены до четырехмерных введением четвертой нулевой составляющей.

Для величины h справедливо уравнение

$$h' = 2\mathbf{U}' \cdot \mathcal{L}^T \cdot (\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_l). \quad (36)$$

Уравнения (35) и (36) не имеют особенностей. Связь между временем t и фиктивным временем τ задается уравнением (29).

После шага регуляризации мы можем вернуться к физическим переменным

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathcal{L} \cdot \mathbf{U} \\ \dot{\mathbf{R}} &= \frac{2}{R} \mathcal{L} \cdot \mathbf{U}' \\ \mathbf{r}_k &= \mathbf{q} + \frac{m_l}{m_k + m_l} \mathbf{R} \\ \mathbf{r}_l &= \mathbf{q} - \frac{m_k}{m_k + m_l} \mathbf{R} \\ \dot{\mathbf{r}}_k &= \dot{\mathbf{q}} + \frac{m_l}{m_k + m_l} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\mathbf{r}}_l &= \dot{\mathbf{q}} - \frac{m_k}{m_k + m_l} \dot{\mathbf{R}}. \end{aligned} \quad (37)$$

Далее мы можем выполнить численное интегрирование обычных уравнений (1). В принципе можно одновременно регуляризовать уравнения движения нескольких пар тел, хотя здесь требуется синхронизация по времени.

Еще один важный вопрос: когда целесообразно применять регуляризацию, а когда решать обычные уравнения (1)? Можно ввести критическое расстояние R_{min} : если $R < R_{min}$, то проводим регуляризацию. При этом необходимо учитывать, что вблизи регуляризуемой пары нет других тел, например в пределах сферы радиусом $3R_{min}$ с центром в центре масс двойной. Кроме того, важно, чтобы относительное возмущение со стороны других тел системы на пару

$$\gamma = \frac{|\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_l|R^2}{G(m_k + m_l)} \quad (38)$$

было достаточно мало

$$\gamma \leq \gamma_{max}. \quad (39)$$

Арсет (1972б) рекомендует использовать $\gamma_{max} = 0.01$ и $R_{min} = 0.01d$, где d — средний размер системы N тел.

Если какое-либо из перечисленных выше условий нарушается, то мы переходим к интегрированию обычной системы уравнений (1) для тел m_k и m_l .

§6. Регуляризация тройных сближений методом Арсета-Заре

В ходе динамической эволюции системы N тел могут случаться не только двойные сближения, но и сближения большего числа тел. Чаще других происходят тройные сближения. В этих ситуациях одновременно три взаимных расстояния становятся малы и требуется модификация KS -схемы. Такая модификация была проведена Арсетом и Заре (1974).

Рассмотрим тройную систему с компонентами m_1 , m_2 и m_3 . Введем два вектора взаимных расстояний

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 &= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{R}_2 &= \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2, \end{aligned} \quad (40)$$

а также 8 координат Q_i ($i = 1, 2, \dots, 8$), удовлетворяющих двум одновременным KS -преобразованиям. При этом

$$\begin{aligned} R_1 &= Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4^2 \\ R_2 &= Q_5^2 + Q_6^2 + Q_7^2 + Q_8^2. \end{aligned} \quad (41)$$

Также введем новое фиктивное время τ так, что дифференциал

$$dt = R_1 R_2 d\tau. \quad (42)$$

Соответствующий этим каноническим преобразованиям гамильтониан имеет вид (см. Арсет и Заре, 1974)

$$\Gamma = \frac{m_1 + m_3}{8m_1m_3} R_2 \cdot \mathbf{P}_1^2 + \frac{m_2 + m_3}{8m_2m_3} R_1 \cdot \mathbf{P}_2^2 + \frac{1}{16m_3} \mathbf{P}_1^T \cdot \mathcal{A}_1 \cdot \mathcal{A}_2 \cdot \mathbf{P}_2 - \\ - m_1m_3R_2 - m_2m_3R_1 - m_1m_2 \frac{R_1R_2}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|} - R_1R_2E, \quad (43)$$

где E — полная энергия тройной системы; \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 — удвоенные транспонированные матрицы Леви-Чивита (22) с элементами (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4) и (Q_5, Q_6, Q_7, Q_8) соответственно; \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 — регуляризованные моменты количеств движения, связанные с физическими моментами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1 &= \mathcal{A}_1 \cdot \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{P}_2 &= \mathcal{A}_2 \cdot \mathbf{p}_2. \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь всюду, как и в KS -преобразовании, мы дополняем трехмерные вектора нулевой четвертой компонентой.

Уравнения движения в регуляризованных переменных имеют канонический вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}'_1 &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{P}_1} \\ \mathbf{P}'_1 &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{Q}_1} \\ \mathbf{Q}'_2 &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{P}_2} \\ \mathbf{P}'_2 &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{Q}_2}. \end{aligned} \quad (45)$$

Эти уравнения, как и гамильтониан Γ (43), регулярны при $R_1 \rightarrow 0$ и $R_2 \rightarrow 0$, однако они имеют особенность при $|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2| \rightarrow 0$. Поэтому расстояния R_1 и R_2 следует выбирать таким образом, чтобы среди них оказалось минимальное из взаимных расстояний в тройной системе.

Следует отметить, что методом Арсета-Заре нельзя регуляризовать тройное соударение. Это существенная особенность.

Если мы рассматриваем изолированную тройную систему, то мы можем все время интегрировать систему (45) регуляризованных уравнений, а к физическим переменным переходить по мере

необходимости с использованием обратных преобразований, аналогичных (37).

§7. Цепочная регуляризация методом Микколы-Арсета

Наряду с тройными сближениями в системах N тел возможны сближения большего числа тел, например сближения двух двойных. В таких случаях регуляризация Арсета-Заре становится неэффективной. В работах Микколы и Арсета (1990, 1993) была разработана цепочная регуляризация кратных сближений.

Идея метода состоит в объединении нескольких тел в цепочку таким образом, чтобы в нее вошли несколько самых маленьких взаимных расстояний в системе. Формирование цепочки начинается с наименьшего расстояния. Затем к цепочке подключаются тела, ближайšie к одному из ее концов.

Рассмотрим цепочку, в которую входят n тел. Эта цепочка состоит из $n - 1$ звеньев.

Запишем выражение для гамильтониана подсистемы n тел, формирующей цепочку, в системе координат, связанной с центром масс цепочки:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{p}_i^2}{m_i} - G \sum_{j<i} \frac{m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (46)$$

Введем новые канонические переменные для координат

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{r}_{k+1} - \mathbf{r}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (47)$$

и импульсов

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1 &= -\mathbf{p}_1, \\ \mathbf{W}_k &= \mathbf{W}_{k-1} - \mathbf{p}_k, \quad k = 2, \dots, n - 2 \\ \mathbf{W}_{n-1} &= \mathbf{p}_n. \end{aligned} \quad (48)$$

Введем $n - 1$ набор KS -переменных $\mathbf{Q}_k, \mathbf{P}_k$ по аналогии с тем, как это делалось в § 4 и § 6. Тогда переменные (47) и (48) связаны с KS -переменными по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_k &= \hat{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_k \\ \mathbf{W}_k &= \frac{1}{2Q_k^2} \hat{Q}_k \mathbf{P}_k.\end{aligned}\quad (49)$$

Здесь \hat{Q}_k — обобщенная матрица Леви-Чивита (22) с компонентами четырехмерного вектора \mathbf{Q}_k . Наряду с матрицей \hat{Q}_k введем аналогичную матрицу \hat{P}_k из компонентов вектора момента \mathbf{P}_k .

Введем также преобразование времени

$$dt = \left(\prod_{k=1}^{n-1} R_k \right) \cdot d\tau \equiv g d\tau. \quad (50)$$

Для новых переменных \mathbf{Q}_k и \mathbf{P}_k уравнения движения запишутся в канонической форме

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}'_k &= \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{P}_k} \\ \mathbf{P}'_k &= -\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{Q}_k},\end{aligned}\quad (51)$$

где гамильтониан Γ имеет вид

$$\begin{aligned}\Gamma &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{m_k + m_{k+1}}{8m_k m_{k+1}} \mathbf{P}_k^2 - G m_k m_{k+1} \right) \cdot \frac{g}{R_k} - \\ &- \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{4m_{k+1}} \mathbf{P}_k^T \cdot \hat{Q}_k^T \cdot \hat{Q}_{k+1}^T \cdot \mathbf{P}_{k+1} \cdot \frac{g}{R_k R_{k+1}} - g(U_{nc} + E).\end{aligned}\quad (52)$$

В системе уравнений (51) дифференцирование по вектору означает дифференцирование по каждой из его компонент. Здесь U_{nc} — модуль потенциальной энергии всех пар, которые не вошли в цепочку; E — начальное значение гамильтониана H (46).

При вычислении частных производных, стоящих в правых частях уравнений (51), нужно дифференцировать функцию U_{nc} по переменным \mathbf{Q}_k ($k = 1, 2, \dots, n-1$). Для этого используется следующее свойство произвольной функции $U(\mathbf{R}_k)$:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{Q}_k} = 2\hat{Q}_k^T \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{R}_k}. \quad (53)$$

После нахождения новых значений регуляризованных переменных \mathbf{Q}_k и \mathbf{P}_k мы можем при необходимости вернуться к физическим переменным

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_k &= \hat{Q}_k \cdot \mathbf{Q}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \mathbf{W}_k &= \frac{1}{2Q_k^2} \cdot \hat{Q}_k \cdot \mathbf{P}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \\ \mathbf{p}_1 &= -\mathbf{W}_1 \\ \mathbf{p}_k &= \mathbf{W}_{k-1} - \mathbf{W}_k, \quad k = 2, \dots, n-1 \\ \mathbf{p}_n &= \mathbf{W}_{n-1}. \end{aligned} \quad (54)$$

Далее следует учесть еще положение и движение центра масс цепочки.

Заметим, что в качестве функции g (50) можно взять также величину, обратную лагранжиану системы (Миккола и Арсет 1993).

§8. “Замедление” тесных двойных

Численное моделирование динамической эволюции систем N тел показало, что в системе могут формироваться тесные двойные, которые существуют длительное время. Кроме того, в системе могут быть начальные двойные.

Применение обычных методов регуляризации к таким системам может потребовать большого числа шагов интегрирования, что неизбежно приведет к накоплению ошибок и увеличению времени счета. Для численного решения задачи N тел с тесными двойными Миккола и Арсет (2001) предлагают использовать схему “замедления” (slow-down).

Идею такого подхода можно показать на примере слабо возмущенной задачи двух тел. Уравнение относительного движения в системе единиц с $G = 1$ и $m_1 + m_2 = 1$ можно записать следующим образом

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F}, \quad (55)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор положения тела m_2 относительно m_1 , \mathbf{F} — малое внешнее ускорение.

Можно записать уравнения движения для оскулирующих элементов $q = q(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$, где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. Эти уравнения для медленных оскулирующих элементов в пуассоновской форме имеют вид

$$\dot{q} = -\frac{\partial q}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}. \quad (56)$$

Правые части этих уравнений малы, однако они испытывают быстрые изменения с периодом, равным орбитальному периоду, поэтому шаг интегрирования уравнений (56) нельзя брать слишком большим.

Идея Микколы и Арсета (2001) состоит в том, чтобы искусственно замедлить внутреннее (почти невозмущенное) движение в двойной. Это можно сделать, если внешняя возмущающая сила мала и не испытывает быстрых изменений. Тогда короткопериодические возмущения будут вычисляться неверно, однако долгопериодические возмущения будут учитываться правильно, по крайней мере с точностью до членов первого порядка малости.

Заметим, что этот подход нельзя применять в случаях больших внешних возмущений на двойную. Практические рекомендации по выбору величины κ и областям применимости схемы замедления даны в работе Микколы и Арсета (2001).

Замедление можно сделать и в уравнениях для координат, если записать их в следующей форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}} &= -\frac{1}{\kappa} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{\kappa} \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (57)$$

В этой новой системе уравнений период орбитального движения в κ раз больше, чем начальный. Соответственно, вычисления можно ускорить в κ раз. При этом уравнения для элементов $q = q(t/\kappa, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ сохраняют вид (56), поскольку для кеплеровского движения

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial q}{\partial (t/\kappa)} + \frac{\partial q}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} - \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\partial q}{\partial \mathbf{v}} \right) \equiv 0. \quad (58)$$

Можно модифицировать гамильтониан задачи

$$H = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{r} - U, \quad (59)$$

где p — импульс, U — силовая функция возмущающих сил, то есть $\mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$. Запишем новый гамильтониан

$$H_{new} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{r} \right) - U. \quad (60)$$

Гамильтониану (60) соответствуют уравнения (57) замедленного движения.

Эту идею можно реализовать и в задаче N тел (см. книгу Арсета 2003). Для этого в гамильтониане задачи N тел выделяем члены, связанные с внутренним взаимодействием интересующей нас пары частиц. Обозначим эту часть гамильтониана через H_b и домножим ее на фактор замедления κ^{-1} . Получим новый гамильтониан в следующем виде

$$H_{new} = \frac{1}{\kappa} H_b + (H - H_b). \quad (61)$$

Новые уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}} &= \frac{\partial H_{new}}{\partial \mathbf{P}} \\ \dot{\mathbf{P}} &= -\frac{\partial H_{new}}{\partial \mathbf{Q}}. \end{aligned} \quad (62)$$

Численное решение уравнений (62) обычно происходит намного быстрее, чем для исходных уравнений задачи N тел.

Схему замедления можно реализовать и в случае KS -регуляризации двойных сближений, и в случае цепочной регуляризации (Миккола и Арсет 2001).

§9. Эффекты звездной эволюции

В реальных звездных группах и скоплениях звезды эволюционируют со временем. Происходят изменения масс, радиусов и внутренней структуры звезд. Эти изменения могут влиять на динамику системы.

Изменения масс и радиусов звезд со временем определяются из моделей звездной эволюции. При моделировании динамики системы N тел удобно использовать аналитические аппроксимации результатов расчетов (см., например, Харли и др. 2000, Портегис Цварт и др. 2001). При этом также учитываются металличности звезд.

Рассматривается эволюция как одиночных звезд, так и тесных двойных. Основные идеи реализованы, например, в пакете программ *SeBa* (см., например, Портегис Цварт и др. 2001, а также ссылку в этой статье). Опишем основные возможности этого пакета, который можно использовать как в автономном режиме, так и совместно с программой *kira* численного решения задачи N тел.

В пакете *SeBa* выделяются следующие объекты: планеты; темные (коричневые) карлики; звезды главной последовательности; гипергиганты с массами $> 25 m_{\odot}$ (m_{\odot} — масса Солнца) и сильной потерей массы; гелиевые звезды (гелиевое ядро гиганта, “ободранного” в результате переноса вещества в тесной двойной); звезды из пробела Герцшпрунга; субгиганты; звезды горизонтальной ветви; сверхгиганты; объекты Торна-Житковой (нейтронная звезда, окруженная оболочкой, в которой идут ядерные реакции); черные дыры; нейтронные звезды; белые карлики; продукты детонации углерода (сверхновые типа *Ia*).

Для звезд главной последовательности малых и умеренных масс, по-видимому, можно пренебречь потерей массы в виде звездного ветра, поскольку характерные времена динамической эволюции звездных систем (кратных звезд и рассеянных звездных скоплений) существенно короче времени потери значительной доли вещества звезды. Портегис Цварт и др. (2001) пренебрегают потерей массы для звезд с массами $m < 25 m_{\odot}$.

Для звезд главной последовательности с $m > 25 m_{\odot}$ темп потери массы

$$\dot{m} \propto m^{2.5}, \quad (63)$$

согласно работе Лангера (1998). Эти звезды коллапсируют в черные дыры с массами

$$m_{bh} = 0.35m_0 - 12m_{\odot}, \quad (64)$$

где m_0 — начальная масса звезды. Если в ходе эволюции звезда уве-

личивала свою массу (например, в результате слияний), то m_0 — максимальная масса, достигаемая звездой. Радиус черной дыры принимается равным радиусу Шварцшильда

$$r_{bh} = \frac{2Gm_{bh}}{c^2}, \quad (65)$$

где c — скорость света.

Звезда с гелиевым ядром, масса которого лежит в пределах от $2.2 m_\odot$ до $5 m_\odot$, превращается в нейтронную звезду. Этот диапазон массы ядра соответствует диапазону масс звезд от $8 m_\odot$ до $25 m_\odot$ на начальной главной последовательности.

При рождении нейтронная звезда получает “толчок” (kick) в случайном направлении. Модуль скорости v звезды, получаемой от “толчка”, распределен по закону Хартмана (1997):

$$f(u)du = \frac{4}{\pi} \frac{du}{(1+u^2)^2}, \quad (66)$$

где $u = v/\sigma$, $\sigma = 600$ км/с.

Звезда с массой ядра менее $2.2 m_\odot$ в конце эволюции сбрасывает оболочку и становится белым карликом. Масса белого карлика равна массе ядра звезды на конце асимптотической ветви гигантов.

В пакете *SeBa* для одиночных звезд и компонентов широких двойных шаг по времени звездной эволюции принят равным 1% от общего времени, проводимого звездой на текущей стадии эволюции. Кроме того, величина этого шага не должна превышать 10^6 лет.

Эволюция тесных двойных моделируется более сложно. На каждом шаге эволюции двойной выполняются следующие операции.

1. Определяется потеря углового момента за счет магнитного звездного ветра и гравитационного излучения.
2. Осуществляется проверка, не произошло ли слияние компонентов.
3. Изменяются параметры двойной за счет потери массы компонентов в виде звездного ветра.
4. Проверяется, не было ли вспышки сверхновой.
5. Проверяется, не прекратила ли двойная свое существование.

6. Контролируются приливные эффекты — не произошла ли циркуляризация орбиты и/или синхронизация вращения компонентов с орбитальным движением.
7. Проверяется, не заполнила ли какая-либо из звезд свою полость Роша, и при положительном решении этого вопроса идентифицируются звезда-“донор” и звезда-“аккретор” в паре с обменом веществом.

Детальное описание программы эволюции двойных с учетом обмена веществом в пакете *SeBa* можно найти в работах Портегиса Цварта и Вербунта (1996), а также Портегиса Цварта и Юнгельсона (1997). В этой программе проводятся следующие процедуры.

1. Определяется момент начала обмена веществом.
2. Проверяется устойчивость двойной по отношению к формированию общей оболочки и слиянию компонентов.
3. Вычисляются изменения радиусов звезд и размера полости Роша звезды-“донора”.
4. Определяются изменения масс звезд пары.
5. Вычисляются новые орбитальные параметры двойной.
6. Находятся спектральные классы компонентов и наблюдаемые характеристики двойной звезды.

Существенный аспект включения звездной эволюции в программу численного решения задачи N тел — организация связи между этими программами. Поскольку звездная динамика и звездная эволюция могут находиться в состоянии сильного взаимодействия, трудно получить полностью самосогласованное решение задачи.

Портегис Цварт и др. (2001) реализуют взаимодействие программ *SeBa* и *kira* следующим образом. Обращение к программе звездной эволюции из программы *kira* происходит через каждую $1/64$ часть времени пересечения звездной системы (обычно это составляет несколько тысяч лет). Внутренняя звездная эволюция прослеживается индивидуально для каждой звезды и двойной системы. Индивидуальный шаг по времени зависит от эволюционного статуса звезды, орбитального периода двойной и возмущений со

стороны соседних звезд. После каждого шага звездной эволюции вносятся изменения в радиусы звезд. “Динамические” массы одиночных звезд обновляются только после их изменения более чем на 1%. В двойной системе массы компонентов обновляются, если орбитальные параметры (большая полуось, эксцентриситет, полная масса или отношение масс) изменяются более чем на 0.1%.

§10. Приливное взаимодействие

В ходе динамической эволюции звездной системы происходят тесные сближения компонентов, когда расстояния между центрами звезд становятся сравнимыми с их радиусами. Кроме того, в звездных системах могут формироваться тесные двойные подсистемы, перичентрические расстояния в которых сравнимы с размерами компонентов. В обоих упомянутых случаях существенную роль могут играть приливные взаимодействия звезд. Эти взаимодействия могут приводить к перекачке энергии орбитального движения звезд в энергию их внутренних колебаний. Таким образом, например, может осуществиться приливный захват звезд, двигающихся по относительной гиперболической орбите (см., например, Фабиан и др. 1975, Пресс и Тьюкольский 1977). Приливное взаимодействие компонентов необходимо учитывать при моделировании динамики кратных звезд, звездных скоплений, групп и скоплений галактик.

Формула для изменения энергии орбитального параболического движения за счет приливного взаимодействия двух звезд была получена в работе Пресса и Тьюкольского (1977):

$$\Delta E = G \sum_{k=2}^{\infty} \left[\frac{m_2^2}{R_1} \left(\frac{R_1}{r_{min}} \right)^{2k+2} T_k(\eta_1) + \frac{m_1^2}{R_2} \left(\frac{R_2}{r_{min}} \right)^{2k+2} T_k(\eta_2) \right], \quad (67)$$

где m_1 и m_2 — массы сближающихся звезд; R_1 и R_2 — их радиусы; r_{min} — перичентрическое расстояние между центрами звезд; величины

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} \cdot \left(\frac{r_{min}}{R_1}\right)^{3/2} \\ \eta_2 &= \sqrt{\frac{m_2}{m_1 + m_2}} \cdot \left(\frac{r_{min}}{R_2}\right)^{3/2}.\end{aligned}\tag{68}$$

Функции $T_k(\eta_1)$ и $T_k(\eta_2)$ выражаются через функции Бесселя. Аппроксимация функций T_2 и T_3 полиномами 5-го порядка сделана в работе Портегиса Цварта и Мейнена (1993).

Заметим, что подход Пресса и Тьюкольского (1977) не применим при очень тесных сближениях звезд, когда звезда попадает внутрь полости Роша своего партнера. В таких случаях необходимы гидродинамические расчеты. Кроме того, при таком подходе, как в работе Пресса и Тьюкольского (1977), мы не имеем никакой информации об изменении других орбитальных элементов сближающихся звезд и также остается не ясным, насколько хорошо формула (67) работает в случаях эллиптических и гиперболических прохождений звезд.

В принципе можно попытаться использовать формулу (67) при двойных сближениях звезд в звездных скоплениях, сохраняя ориентацию орбиты и перицентрическое расстояние. Тогда изменение энергии определит новое значение большой полуоси орбиты и ее эксцентриситет после сближения.

Более строго можно учесть приливное взаимодействие компонентов, если использовать более общие формулы для дополнительных приливных сил (см., например, Хут 1981). Ускорения, создаваемые этими силами, необходимо ввести в правые части уравнений движения (1) или соответствующих регуляризованных уравнений движения.

§11. Неупругие столкновения и слияния

При очень тесных сближениях звезды могут проникать друг в друга. В таких случаях, в отличие от сближения двух точечных масс, сказывается протяженность звезд и значительная часть энергии орбитального движения и орбитального момента могут переходить во внутреннюю энергию звезд и в их моменты осевого враще-

ния. Перекачка энергии и момента может быть столь значительной, что звезды сливаются в единое тело.

Процесс столкновения и слияния сложно описать аналитически. Однако можно использовать результаты гидродинамического моделирования (см., например, работы Бенца и Хиллса 1987, 1992). Согласно этим работам, можно использовать следующий критерий слияния двух звезд с радиусами R_1 и R_2 при двойном сближении:

$$r_{min} < \kappa(R_1 + R_2), \quad (69)$$

где r_{min} — перицентрическое расстояние, κ — параметр, зависящий от скорости сближения, близкий к единице для скоростей звезд на бесконечности, равных по порядку величины скорости отрыва частицы с поверхности звезды.

При выполнении условия (69) две звезды заменяются одним продуктом слияния, который помещается в центр масс пары и получает скорость, равную скорости центра масс двойной.

Представляют интерес характеристики продукта слияния такие, как масса, радиус и скорость осевого вращения (при учете приливных взаимодействий).

Гидродинамические расчеты Бенца и Хиллса (1987, 1992) показывают, что основная масса звезд переходит в массу продукта слияния. Потеря массы не превосходит нескольких процентов, поэтому массу продукта слияния можно принять равной сумме масс сливающихся звезд.

Структура и размеры продукта слияния зависят от того, какие звезды принимали участие в акте слияния. Детальный анализ эволюционного статуса продуктов слияния звезд разных типов проведен в работе Портегиса Цварта и др. (1997). В пакете *SeBa* предусмотрено вычисление характеристик продуктов слияния.

Заметим, что кроме слияний в результате столкновений одиночных звезд, возможны и другие виды слияний в звездных системах. Во-первых, слияние может стать следствием переноса массы в тесной двойной системе с обменом веществом между компонентами. Во-вторых, может произойти слияние компонентов в двойной системе с общей оболочкой. В-третьих, слияние может произойти в двойной системе в результате тесного сближения этой системы с еще одним из компонентов звездной системы под действием внешнего возмущения.

§12. Внешние поля и динамическое трение

В природе звездные системы не являются изолированными. Они входят в состав систем более высокого уровня иерархии, а также взаимодействуют с другими объектами, обладающими гравитационными полями. При численном моделировании динамики звездных систем следует учитывать эти внешние поля.

Рассмотрим для примера звездную систему, движущуюся по круговой орбите в плоскости Галактики. Введем вращающуюся систему координат, связанную с центром масс звездной системы. Пусть центр Галактики находится на оси x и имеет отрицательную абсциссу, а вращение происходит относительно оси z с угловой скоростью Ω .

Тогда внешний потенциал приливных сил Галактики можно представить в следующем виде (см., например, Портегис Цварт и др. 2001):

$$\Phi_{ext} = \frac{1}{2}(\alpha_1 x^2 + \alpha_3 z^2). \quad (70)$$

В потенциал (70) входят вклады от приливного поля и центробежной силы. В уравнения движения следует включить еще и кориолисово ускорение

$$\mathbf{a}_c = -2\Omega \times \mathbf{v}, \quad (71)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости звезды в системе координат, связанной с центром масс звездной системы и вращающейся с угловой скоростью Ω .

Значения параметров α_1 , α_3 и Ω зависят от используемой модели Галактики.

Рассмотрим несколько простых примеров (Портегис Цварт и др. 2001):

1. точечная масса M_G на расстоянии R_G (неплохая аппроксимация для центральной части Галактики — ядро и балдж):

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_1}{3} = \Omega^2 = G \frac{M_G}{R_G^3}; \quad (72)$$

2. изотермическое гало с профилем плотности $\rho(r) \propto r^{-2}$ и массой M_G в пределах радиуса R_G :

$$\alpha_3 = -\frac{\alpha_1}{2} = \Omega^2 = G \frac{M_G}{R_G^3}; \quad (73)$$

3. диск с постоянными Оорта A и B и локальной плотностью ρ_D :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -4A(A - B) \\ \alpha_3 &= 4\pi G \rho_D + 2(A^2 - B^2) \\ \Omega &= A - B. \end{aligned} \quad (74)$$

Для звездной системы можно ввести критическую поверхность Роша, на которой потенциал системы равен внешнему потенциалу. Эта поверхность проходит через точки Лагранжа L_1 и L_2 . Расстояние от центра системы до точек L_1 и L_2 равно радиусу Якоби

$$R_J = \left(-\frac{GM_{tot}}{\alpha_1} \right)^{-1/3}, \quad (75)$$

где M_{tot} — полная масса системы. Отношение α_3/α_1 определяет степень сжатия этой критической поверхности.

Потенциалы сближающихся со звездной системой других гравитирующих объектов Галактики (звездных скоплений, газовых облаков, звезд и др.) можно рассматривать как потенциалы точечных масс, если прохождения далекие. При тесных сближениях звездные системы нужно рассматривать как протяженные объекты и представлять как системы N тел. При тесных сближениях с газовыми облаками требуется использовать комбинированный подход — сочетание прямого интегрирования задачи N тел для звездной системы с интегрированием гидродинамических уравнений для газовой составляющей (см. § 6 в Главе 3, а также работу Тенса 1992а).

Звезды движутся в межзвездной среде, состоящей из газа, пыли и, возможно, темной материи. В результате гравитационного взаимодействия звезды с частицами среды за звездой формируется “шлейф” из частиц среды, который тормозит движение звезды. Возникает динамическое трение звезд о межзвездную среду.

Для учета силы динамического трения можно использовать подход Чандрасекара (1943). Если частицы межзвездной среды имеют

плотность ρ и максвелловское распределение скоростей с одномерной дисперсией σ^2 по каждой координате, то формула Чандрасекара для изменения вектора скорости \mathbf{v} звезды с массой m имеет вид (см., например, книгу Бинни и Тремейна 1987):

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{4\pi G^2 \ln \Lambda \rho m}{v^3} \left[\Psi(x) - \frac{2x}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \right] \mathbf{v}, \quad (76)$$

где $x = \frac{v}{\sqrt{2}\sigma}$; $\Psi(x)$ — интеграл вероятностей;

$$\Lambda = \frac{b_{max} V_0^2}{Gm}, \quad (77)$$

где V_0 — характерная скорость звезд в системе, b_{max} — максимальное расстояние, на котором частицы среды оказывают ощутимое воздействие на звезду. Типичные оценки $\ln \Lambda \sim 10$ (см. Бинни и Тремейн 1987) для разных звездных систем — от рассеянных скоплений до галактик.

Динамическое трение галактик о межгалактическую среду необходимо учитывать при моделировании динамической эволюции групп и скоплений галактик (см., например, Мамон 1987).

§13. Космологическое расширение

При моделировании динамической эволюции систем галактик на масштабах ~ 1 Мпк и более необходимо учитывать космологическое расширение. Для этого удобно ввести “сопутствующие” координаты и перейти к уравнениям для отклонений от общего расширения (см., например, Арсет 1985, 2003).

Рассмотрим расширение шара массой M и радиусом S (примем постоянную тяготения $G = 1$). Уравнение для радиуса шара S имеет вид

$$\ddot{S} = -\frac{M}{S^2}. \quad (78)$$

Введем сопутствующие координаты N тел по следующей формуле

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{S} \mathbf{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (79)$$

Взаимодействие галактик друг с другом будем рассматривать с учетом “смягчающих” добавок (2). Тогда, переходя в (2) к переменным \mathbf{q}_i , мы получим N уравнений для сопутствующих координат:

$$\ddot{\mathbf{q}}_i = -\frac{2\dot{S}}{S}\dot{\mathbf{q}}_i - \frac{1}{S^3} \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2 + \varepsilon_{ij}^2)^{3/2}} - M\mathbf{q}_i \right]. \quad (80)$$

Здесь $\varepsilon_{ij} = \sqrt{\varepsilon_i^2 + \varepsilon_j^2}/S$, где ε_i и ε_j — смягчающие добавки для i -ой и j -ой галактик, приблизительно равные их радиусам полумассы.

Уравнения (80) можно интегрировать непосредственно, однако применять к ним схему Амада и Коэна (1973) неудобно из-за величины S^3 в знаменателе, поскольку требуется явным образом внести поправки за расширение в производные.

Можно провести процедуру сглаживания с помощью замены времени

$$dt = S^{3/2}d\tau. \quad (81)$$

Имеют место следующие соотношения между скоростями

$$\mathbf{q}'_i = S^{3/2}\dot{\mathbf{q}}_i, \quad (82)$$

где штрихом обозначена производная по фиктивному времени τ . Используя (81) и (79), мы можем выразить физические скорости галактик через \mathbf{q}_i и \mathbf{q}'_i :

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \frac{S'}{S^{3/2}}\mathbf{q}_i + \frac{1}{S^{1/2}}\mathbf{q}'_i. \quad (83)$$

Дифференцируя (82) по переменной τ и используя уравнения (80), мы получим сглаженные уравнения для сопутствующих координат

$$\mathbf{q}''_i = -\frac{S'}{2S}\mathbf{q}'_i - \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)}{(|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|^2 + \varepsilon_{ij}^2)^{3/2}} + M\mathbf{q}_i. \quad (84)$$

Эти уравнения не содержат S^3 в знаменателе, к ним удобно применять схему Амада-Коэна.

Для того, чтобы найти изменение радиуса шара, нужно интегрировать уравнение

$$S'' = \frac{3}{2} \frac{(S')^2}{S} - MS, \quad (85)$$

которое получается из (78) посредством преобразования времени (81). Параметр S — фактор космологического расширения — играет роль времени. Однако, в принципе мы можем получить и физическое время, численно интегрируя уравнение (81), записанное в виде

$$t' = S^{3/2}. \quad (86)$$

Для того, чтобы обеспечить постоянное число галактик в пределах интересующего нас объема, можно ввести зеркальное отражение: каждой частице, пересекающей поверхность шара с $q_i > 1$ и $q'_i > 0$, приписывается радиальная скорость той же величины, но противоположного знака. Однако, следует отметить, что такое отражение приводит к изменению полной энергии системы N тел на величину

$$\Delta E = \frac{2m_i S'}{S^3} (q_i S' + q'_i S - S'), \quad (87)$$

где q'_i — радиальная составляющая скорости уходящей галактики до отражения.

Поскольку пекулярные движения далеких галактик по отношению к рассматриваемой галактике малы, то применение схемы Амада-Коэна в сопутствующих координатах гораздо эффективнее, чем в физических координатах. Можно довести отношение шагов $\delta T_i / \delta t_i$ для далеких и близких соседей до 20 и более. Это позволяет проводить прямое численное интегрирование для $N \sim 10^4$ и более (см., например, работу Декеля и Арсета 1984).

Космологическая схема Амада-Коэна допускает введение неупругих столкновений и слияний галактик (см. § 11). В качестве критерия слияния можно использовать условие перекрытия галактик при сравнительно небольшой относительной скорости компонентов (см., например, работу Арсета и Фолла 1980). Как и при слиянии двух звезд, координаты и скорости продукта слияния вычисляются из интегралов центра масс для пары слившихся галак-

тик. Масса продукта слияния полагается равной сумме масс этих галактик. Число галактик в системе уменьшается на единицу.

За счет слияний может происходить увеличение внутренней энергии и спинового момента галактик. Слияния могут быть одним из возможных генераторов вращения галактик.

§14. Иерархические алгоритмы

При моделировании динамики систем, состоящих из $N \sim 10^3$ тел и более, существенный выигрыш во времени вычислений дают так называемые “древесные” или иерархические алгоритмы (tree codes). Один из первых таких алгоритмов был предложен Барнисом и Хутом (1986, 1989). Изложим основные идеи их подхода.

Древесная структура системы N тел представляет собой набор ячеек, соответствующих внутренним узлам дерева, и набор частиц-листьев. В каждой ячейке хранятся адреса до 8 предшественников, которые могут быть либо частицами, либо ячейками. Структуры данных связаны системой указателей в направленный граф, начиная с корневой ячейки (вся система) и заканчивая листьями-частицами. Частицы и ячейки содержат необходимую для вычисления сил информацию: массу и вектор положения. Ячейки могут содержать также моменты более высоких порядков, например квадратный и октупольный моменты.

На каждом шаге численного интегрирования уравнений движения задачи N тел до вычисления правых частей дерево строится заново по координатам тел. Вначале создается пустое дерево. Затем на дереве размещаются частицы (по одной штуке за раз). Для того, чтобы поместить частицу на дерево, определяются ее координаты, приведенные к интервалу $[0, 1)$ в пределах корневой ячейки, в двоичном представлении

$$\begin{aligned} x &= 0.x_1x_2x_3\dots \\ y &= 0.y_1y_2y_3\dots \\ z &= 0.z_1z_2z_3\dots, \end{aligned} \tag{88}$$

где x_i, y_i, z_i равны либо 0, либо 1. Верхние биты $\{x_1, y_1, z_1\}$ показывают, в каком из 8 предшественников корневой ячейки (8 октантов) находится рассматриваемая частица. Если этот октант

(щель предшественника) уже занят другой ячейкой, то мы переходим на следующий уровень и рассматриваем следующие три бита $\{x_2, y_2, z_2\}$ и так до тех пор, пока нам не встретится свободная щель или щель, занятая частицей. В первом случае мы вставляем в щель частицу, а во втором случае мы, кроме того, объединяем в ячейку эту частицу с той частицей, которая уже была в этой щели, и вставляем в щель ячейку — результат объединения.

Таким образом, проводится сканирование дерева, начиная с корневого узла, и размещение на нем частиц. Дерево расширяется всякий раз, когда две частицы пытаются занять одну и ту же щель. Построение дерева завершается вычислением массы, вектора положения и при необходимости квадрупольного и октупольного моментов для каждой ячейки. Все это вычисление производится с помощью рекурсивного сканирования всего дерева. Параметры каждой ячейки определяются после посещения всех узлов более низкого уровня.

Далее производятся оценки сил, действующих на все частицы. Для того, чтобы оценить силу, действующую на какую-либо частицу с номером p , проводится еще один рекурсивный обход дерева, начиная с корневой ячейки. Разные части дерева при этом зондируются с разным уровнем разрешения.

Рассмотрим для примера обработку какого-либо узла дерева, имеющего номер q . Существуют три возможности:

1. узел q является частицей;
2. узел q является ячейкой, для которой выполняется условие

$$l_q < \theta \cdot d_{pq}, \quad (89)$$

где l_q — длина стороны ячейки q , d_{pq} — расстояние от частицы p до центра масс ячейки q , θ — параметр изолированности;

3. узел q является ячейкой, для которой условие (89) не выполняется.

В первых двух случаях вычисляется сила взаимодействия между частицей p и узлом q (во втором случае возможен учет квадрупольного и октупольного моментов). В третьем случае проводится зондирование субъячеек узла q по выше упомянутым правилам 1) – 3).

Барнис и Хут (1989) протестировали свой иерархический алгоритм при разных N вплоть до $N = 2^{15} = 32768$ при трех значениях $\theta = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 1\}$. Оказалось, что затраты процессорного времени приблизительно пропорциональны $N \cdot \lg N$.

Было проведено сравнение с обычной схемой вычислений, где эти затраты пропорциональны N^2 . С другой стороны, построение и зондирование дерева приводят к дополнительным затратам времени, которые не окупаются при $N \sim 10^2$ и меньше. При $N \sim 10^3$ классические схемы и иерархические алгоритмы примерно равноценны. При $N \sim 10^4$ и более иерархические алгоритмы значительно эффективнее классических.

Отметим, что ошибки вычислений в иерархических алгоритмах убывают с ростом N приблизительно пропорционально $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Точность вычислений повышается с уменьшением θ , то есть с увеличением степени изоляции ячеек. Однако сильное уменьшение θ нежелательно, поскольку оно приводит к снижению эффективности вычислений.

Существенная модификация древесного алгоритма была сделана МакМилланом и Арсетом (1993). Их схема более гибка, поскольку обновление параметров ячеек происходит не на каждом шаге, а по мере необходимости. Кроме того, возможно применение KS -регуляризации тесных двойных сближений.

§15. Методы “частица-ячейка”

Численное моделирование динамики галактик, состоящих из $N \sim 10^8 \div 10^{12}$ звезд и содержащих значительное количество газа, пыли и, возможно, темной материи, на данном этапе вряд ли осуществимо в рамках прямого численного интегрирования уравнений движения гравитационной задачи N тел из-за громадных затрат процессорного времени. Представление галактик как систем $N \sim 10^3$ или 10^4 тел приводит к искусственной релаксации системы за счет двойных и кратных сближений. В реальности галактики являются практически бесстолкновительными системами со временем релаксации, на несколько порядков превышающим хаббловское время.

Однако имеется ряд способов борьбы с этим обстоятельством. Один из них — представление сглаженного распределения веще-

ства в галактике системой $N \sim 10^3 \div 10^6$ тел со смягчающей добавкой в потенциале взаимодействия каждой пары тел. Смягчающие добавки уменьшают эффект релаксации системы за счет двойных сближений.

Другой способ — использование алгоритма “частица-ячейка” (particle-mesh — *PM*). Такие алгоритмы подробно описаны в книге Хокни и Иствуда (1981), поэтому мы изложим только основные идеи этого подхода.

На систему N тел наносится двумерная или трехмерная сетка в зависимости от того, какая задача рассматривается — плоская или трехмерная. Сетки могут быть прямоугольные, цилиндрические, сферические и т.п. Узлы сетки могут быть как равноотстоящими, так и сгущаться к определенным областям системы, например к ее центру.

Методы “частица-ячейка” состоят из трех основных этапов:

1. вычисление плотности в узлах сетки посредством усреднения по близким к данному узлу частицам;
2. решение на выбранной сетке уравнения Пуассона для потенциала;
3. вычисление сил в узлах сетки по найденному сеточному потенциалу и интерполяция этих сил в точках, где находятся частицы.

Количество операций на одном шаге в методе “частица-ячейка” линейно зависит от числа тел N . Это позволяет рассматривать системы с большим числом тел вплоть до $N \sim 10^8$ и дает значительный выигрыш процессорного времени по сравнению с прямым интегрированием.

Еще одно преимущество *PM*-методов состоит в том, что они обеспечивают бесстолкновительность моделей галактик и подавляют парную релаксацию.

Однако методы “частица-ячейка” не лишены и недостатков. В частности, ограниченное разрешение сетки не позволяет исследовать тесные сближения частиц. Для того, чтобы учесть такие сближения, были предложены модификации *PM*-методов, а именно методы “частица-частица-частица-ячейка” (*P³M*-схемы).

Основные идеи *P³M*-алгоритмов также излагаются в книге Хокни и Иствуда (1981). Они состоят в следующем. Сила, действу-

ющая на каждую частицу системы, разделяется на две составляющие: короткодействующую, связанную с притяжением со стороны близких соседей, и далекодействующую, связанную с притяжением со стороны остальных частиц. Первая составляющая вычисляется в рамках обычной задачи N тел, а для вычисления второй составляющей используется PM -подход.

P^3M -алгоритмы похожи на схему Амада-Коэна. Число операций на одном шаге в P^3M -схеме пропорционально сумме трех слагаемых

$$\alpha N + \beta N_m^3 \lg N_m + \gamma N N_n, \quad (90)$$

где α , β , γ — числовые коэффициенты, N_m — число узлов сетки, N_n — число соседей. Заметим, что в PM -схеме остаются только первые два слагаемых. Если зафиксировать или ограничить сверху число соседей N_n , то число операций в P^3M -схеме будет линейной функцией от числа тел в системе.

Для ускорения процесса вычислений Кучман (1991) предложил адаптивную P^3M -схему, в которой в зонах повышенной плотности частиц используются более мелкие сетки. В принципе программа допускает несколько уровней вложения таких “рафинированных” сеток. Применение этой адаптивной схемы позволяет ускорить процесс вычислений примерно на порядок величины по сравнению с обычным P^3M -алгоритмом. Еще один адаптивный многосеточный алгоритм был предложен Кнебе и др. (2001).

PM - или P^3M -методы можно сочетать с древесными алгоритмами. Такие TRM -алгоритмы разработаны, например, в работах Ксю (1995), Беуда и др. (2000). В TRM -алгоритмах гравитационные силы являются линейными функциями плотности. Это позволяет разложить поле плотности на много изолированных областей высокой плотности, которые в совокупности содержат значительную долю массы системы, но занимают малую долю объема. В каждой из этих изолированных областей гравитационные силы вычисляются с помощью обычного древесного алгоритма (см. § 14) с учетом внешнего приливного воздействия от других частей системы. Для всего объема системы, состоящей из этих изолированных подсистем, применяется обычный PM -алгоритм.

Подобные TRM -алгоритмы особенно эффективны при рассмотрении космологических моделей в рамках задачи N тел. Они позволяют изучать динамику систем, состоящих из $N \sim 10^9$ тел. Отме-

тим, что на каждом шаге *PM*-алгоритма деревья, соответствующие изолированным подсистемам, могут обрабатываться параллельно и независимо, что также ускоряет процесс вычислений.

§16. Специализированные компьютеры и пакеты программ

Численные эксперименты в рамках гравитационной задачи N тел превратились в своего рода индустрию. Они широко используются при изучении динамической эволюции звездных скоплений, галактик, крупномасштабной структуры Вселенной. Для наиболее адекватного представления этих систем моделями N тел часто требуется брать большие значения N (например, $N \sim 10^6$ для шаровых скоплений).

Однако увеличение N сопряжено с ростом затрат процессорного времени, львиная доля которых приходится на вычисление правых частей уравнений движения. Чтобы ускорить этот процесс, Судзимото и др. (1990) создали специализированный компьютер, занимающийся исключительно расчетами правых частей уравнений движения задачи N тел. Остальную обработку результатов вычислений производит “компьютер-хозяин”, с которым связан специализированный компьютер. Создана серия таких специализированных компьютеров типа *GRAPE* (см., например, обзор Эбисудзаки и др. 1993).

Основной принцип действия пары “компьютер-хозяин — специализированный компьютер” выглядит следующим образом. На каждом шаге интегрирования компьютер-хозяин пересылает координаты и массы тел компьютеру *GRAPE*, который размещает их в своей локальной памяти. Далее для каждой частицы выполняются следующие три процедуры:

1. размещение координат частицы в специально отведенных для этого регистрах памяти *GRAPE*;
2. вычисление силы, действующей на эту частицу;
3. пересылка значения вычисленной силы с *GRAPE* компьютеру-хозяину.

Новые значения координат и скоростей тел вычисляются компьютером-хозяином.

Высокое быстродействие достигается использованием *VLSI*-микросхем (интегральные микросхемы очень большого масштаба). Быстродействие специализированных компьютеров при решении конкретных задач сопоставимо с быстродействием суперкомпьютеров и даже может их превосходить. Возможно параллельное вычисление сил с использованием нескольких *GRAPE*-чипов, что также ускоряет процесс вычислений.

Среди компьютеров серии *GRAPE* можно выделить *GRAPE* – 1, 3, 5, которые используются для более простых расчетов сил со смягчающей добавкой в потенциал взаимодействия тел. Эти компьютеры можно применять при моделировании динамики галактик и для космологических расчетов с невысокой точностью. В некоторых версиях этих компьютеров реализованы древесные алгоритмы.

Более сложные схемы *GRAPE* – 2, 4, 6 позволяют добиться более высокой точности за счет увеличения длины слова в представлении данных и реализации более сложных вычислений, таких как индивидуальный выбор шага, введение сферы близких соседей (аналог схемы Амада-Коэна).

Еще одна разновидность специализированных компьютеров *HARP* использует численное интегрирование задачи N тел с помощью полиномов Эрмита (см., например, работу Макино и Арсета 1992).

Быстродействие наиболее мощных специализированных компьютеров типа *GRAPE* – 6 достигает $\sim 10^{13}$ операций в секунду. Это позволяет моделировать с помощью *GRAPE* – 6 динамику шаровых скоплений, содержащих $N \sim 10^6$ звезд. Планируется в 2008 году ввести в строй компьютер *GRAPE* – *DR* с производительностью $\sim 10^{15}$ операций в секунду.

Еще одно направление организации численно-экспериментальных исследований — создание пакетов программ, реализующих различные алгоритмы численного решения задачи N тел.

Один из наборов таких программ создан Арсетом (1999, 2003). Наиболее свежие версии программ на языке *FORTRAN* свободно доступны потенциальным пользователям по адресу:

<http://www.ast.cam.ac.uk/~sverre>

Среди программ Арсета имеются программы численного модели-

рования динамики кратных звезд, звездных скоплений и космологического расширения Вселенной в рамках задачи N тел. Однако эти программы разрознены и не образуют единого пакета. Каждая из программ содержит авторские комментарии. В случае возникновения каких-либо затруднений можно обратиться к автору за консультацией.

Попытка создания пакета программ была предпринята Барнисом и др. (1988). Описание этого пакета *NEMO* дано Тойбенем (1995). Пакет представляет собой коллекцию связанных между собой программ для операционных систем типа *UNIX*.

Возможно объединение нескольких программ в одну цепочку и создание новых средств в пределах пакета *NEMO*. Каждая из программ, входящих в пакет, снабжена авторскими комментариями для пользователя. Кроме того, по каждой программе имеется стандартное *UNIX*-руководство. Наконец, имеется обширный "Путеводитель для разработчиков и пользователей" по всему пакету с многочисленными примерами. Информация о пакете доступна по адресу:

<http://www.astro.umd.edu/nemo>

Еще один пакет для моделирования эволюции звездных систем и анализа результатов называется *STARLAB* (см., например, Портегис Цварт и др. 2001). Подробное описание этого пакета можно найти по адресу:

<http://www.manybody.org>

Пакет включает программы численного решения задач 3 и 4 тел с использованием полиномов Эрмита, несколько программ численного интегрирования уравнений движения задачи N тел (в том числе программу *kira*), пакет *SeBa* численного решения уравнений звездной эволюции одиночных звезд и тесных двойных (см. § 9). Пакет *SeBa* состыкован с интегратором *kira*, что позволяет одновременно проследить динамику звездной системы и эволюцию ее компонентов.

Глава II

Задача трех тел

§1. Классификация движений

Изложение результатов численного моделирования начнем с рассмотрения проблемы трех тел. Прежде всего, определим возможные типы движений, которые могут иметь место в ходе динамической эволюции тройной системы и в финале эволюции при $t \rightarrow \pm\infty$.

Первую классификацию финальных движений и возможные переходы между классами предложил Шази (1929). Он основывался на здравом смысле и интуиции. В основном его положения оказались верны, хотя в ряде случаев численные эксперименты внесли коррективы.

Современные представления о классификации движений отражены в книге Маршаля (1990), а также в статье Хута и Бакалла (1983) и обзорах Валтонена (1988), Валтонена и Микколы (1991).

Характер финальных движений зависит от знака полной энергии E тройной системы.

Для систем с $E > 0$ выделяются следующие типы движений:

1. прохождения трех одиночных тел по гиперболическим относительным орбитам;
2. формирование двойной системы при сближении трех одиночных тел (захват);
3. прохождение одиночного тела мимо двойной системы (рассеяние);

4. разрушение двойной системы при ее сближении с одиночным телом (ионизация);
5. обмен компонентами в двойной системе (перезарядка).

Заметим, что второе и четвертое состояния сменяют друг друга при изменении знака времени.

В тройных системах с $E < 0$ возможны следующие типы финальных движений:

1. прохождение одиночного тела мимо двойной системы;
2. обмен компонентами в двойной системе;
3. захват одиночного тела при сближении его с двойной, формирование временной тройной системы и ее распад (резонансное рассеяние);
4. устойчивое обращение тел;
5. тройное соударение;
6. осциллирующее движение.

Для устойчивого обращения тел можно выделить три подкласса:

1. устойчивая иерархическая тройная система;
2. периодическая орбита;
3. устойчивое движение в окрестности устойчивой периодической орбиты.

Себехей (1971) предложил классификацию состояний, возникающих при эволюции распадающихся тройных систем:

1. взаимодействие;
2. выброс без ухода;
3. уход.

Эта классификация была дополнена Агекином и Мартыновой (1973) еще одним состоянием:

0) тройное сближение.

Состояния 0) – 2) последовательно сменяют друг друга в ходе эволюции, а состояние 3) является финальным. Оказалось, что нередко уходу одного из тел из тройной системы предшествует тройное сближение тел — состояние 0) является причиной состояния 3). Состояние 1) может продолжаться значительное время — в этом случае можно говорить о метастабильной фазе эволюции тройной системы (см. Мартынова и др. 2003). Движения в этой фазе происходят в окрестности устойчивых периодических орбит. Эти окрестности существенно шире, чем области устойчивости. Происходит временный захват (“прилипание”) фазовой траектории в окрестности устойчивого резонанса.

Критерии состояний тройного сближения, простого взаимодействия, выброса или ухода были предложены Агекином и Мартыновой (1973) для тройных систем с нулевым моментом вращения. Эти критерии были обобщены для вращающихся систем в работе Мартыновой и Орлова (2000).

При определении радиуса R_0 тройного сближения будем исходить из теоремы вириала, выполнение условий которой соответствует динамическому равновесию. Будем считать, что в тройной системе имеет место тройное сближение, если все три тела находятся внутри сферы тройного сближения. Центр этой сферы совпадает с центром масс тройной системы. Радиус R_0 определяется из того условия, что для любых положений тел внутри сферы тела сближены теснее, чем в вириальном равновесии, то есть

$$|U| > 2|E|, \quad (91)$$

где U — потенциальная энергия тройной системы. Значение R_0 определяется равенством

$$R_0 = \frac{G}{2|E|}A, \quad (92)$$

где G — постоянная тяготения, A — коэффициент, зависящий от масс тел. В случае равных единичных масс $A = \sqrt{3}$. Для разных отношений масс тел величины A вычислены в работе Агекина и Мартыновой (1973).

Для определения радиуса выброса определим наибольшее значение минимального из взаимных расстояний между телами. Оно достигается, когда тела находятся в вершинах равностороннего треугольника, радиальные скорости тел равны нулю и движения тел чисто трансверсальные. В этом случае справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{V}_i &= 0, \quad i = 1, 2, 3 \\
\sum_{i=1}^3 m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_i) &= \mathbf{L} \\
\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i &= \mathbf{0} \\
\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{V}_i &= \mathbf{0} \\
\frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 m_i V_i^2 - G \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}} &= E \\
r_{12} = r_{13} = r_{23} &= a,
\end{aligned} \tag{93}$$

где \mathbf{r}_i , \mathbf{V}_i — радиусы-векторы положений и скоростей тел в системе координат, связанной с центром масс тройной системы; m_i — массы тел; r_{ij} — взаимные расстояния между телами; \mathbf{L} — момент вращения тройной системы; a — параметр, определяемый конфигурацией системы. Движение должно происходить в плоскости, ортогональной вектору \mathbf{L} .

Введем систему координат так, чтобы плоскость XU совпала с этой плоскостью и направим ось X на первое тело. Запишем систему уравнений (93) в полярных координатах $(r_1, 0)$; (r_2, ϕ_2) ; (r_3, ϕ_3) . Решая полученную систему уравнений, находим модули радиусов-векторов тел

$$\begin{aligned}
r_1 &= \frac{a}{M} \sqrt{m_2^2 + m_2 m_3 + m_3^2} \\
r_2 &= \frac{a}{M} \sqrt{m_1^2 + m_1 m_3 + m_3^2} \\
r_3 &= \frac{a}{M} \sqrt{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2},
\end{aligned} \tag{94}$$

где $M = m_1 + m_2 + m_3$ — полная масса тройной системы. Значение параметра a определяется из интегралов энергии и площадей

$$a = -\frac{G\mu}{2E} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2MEL^2}{G^2\mu^3}} \right), \quad (95)$$

где $\mu = m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3$. Подставив (95) в (94), мы получим значения радиусов выброса R_i для каждого из тел ($i = 1, 2, 3$).

Если для i -го тела выполняется условие $r_i > R_i$, то будем говорить, что это тело испытывает выброс или уход.

Если в тройной системе не выполняется ни критерий тройного сближения, ни критерий выброса или ухода, то будем говорить, что тройная система находится в состоянии простого взаимодействия.

Для разделения состояний выброса с возвратом и ухода при удалении выброшенного тела m_3 от центра масс оставшейся пары с компонентами m_1 и m_2 на расстояние

$$\rho > \frac{Gm_1m_2^2}{(m_1 + m_2)|E|}, \quad m_2 \leq m_1 \quad (96)$$

достаточно оценить большую полуось орбиты тела m_3 относительно центра масс пары m_1 и m_2 . Если орбита гиперболическая и $\dot{\rho} > 0$, то имеет место уход (Маршалл и др. 1984). Более подробный анализ различных критериев ухода и выброса с возвратом можно найти в книге Маршала (1990) и статье Орлова (1986).

Заметим, что в реальном поле компонент, ушедший на значительное расстояние (порядка приливного радиуса системы), может быть “уведен” внешними силами и “потеряет связь” с оставшейся парой. Такое расстояние будем называть радиусом R_c условного распада.

Хут (1993) предлагает разделить тип движений “резонансное рассеяние” на два класса в зависимости от углового момента L_{ex} внешней двойной, образованной одиночным телом и центром масс двойной:

1. **иерархическое** резонансное рассеяние, когда происходит захват на орбиту со значительным удалением перицентра внешней двойной от апоцентра внутренней пары

$$a_{ex}(1 - e_{ex}) \gg a_{in}(1 + e_{in}), \quad (97)$$

где индекс “ex” относится к внешней, а индекс “in” — к внутренней двойной;

2. **демократическое** резонансное рассеяние, когда условие (97) нарушается и имеет место “хаотический танец всех трех тел” (Хут 1993).

Иерархическое рассеяние характерно для тройных систем с высоким угловым моментом L_{ex} , а демократическое — для малых значений L_{ex} .

В первом случае период внешней двойной много больше периода внутренней пары, поэтому орбитальная фаза внутренней двойной в момент прохождения удаленным компонентом через перицентр ведет себя как случайная величина. После каждого прохождения удаленного тела через перицентр его орбита может становиться как теснее, так и шире. Процесс изменения a_{ex} можно рассматривать как случайный процесс типа диффузии “по сильно возбужденным уровням” (Хут 1993). В большинстве случаев эти случайные блуждания приводят к уходу третьего тела. Однако в некоторых случаях наблюдается дрейф в область демократического рассеяния.

После захвата удаленного тела в демократический резонанс поведение тройной системы становится очень сложным и трудно предсказуемым. При этом происходят тройные сближения и выбросы тел, могут происходить переходы системы в метастабильный режим эволюции.

§2. Формирование двойных при тройных сближениях

Двойные звезды широко представлены в окрестности Солнца и в звездных скоплениях. Можно предложить разные сценарии формирования двойных систем: распад групп звезд, совместное образование компонентов, захват при сближении трех одиночных звезд.

Рассмотрим последний из перечисленных механизмов. Впервые на возможность захвата указал Шмидт (1947). Он построил конкретный численный пример таких движений, а Хильми (1948) доказал неограниченное возрастание всех взаимных расстояний между телами при $t \rightarrow -\infty$ и ограниченность одного из них при $t \rightarrow +\infty$.

Саакян (1961) доказал, что вероятность захвата при сближении

трех одиночных звезд в звездном поле отлична от нуля. В то же время он показал, что для окрестности Солнца эта вероятность крайне мала и образование двойных систем таким образом не происходит.

Однако в звездных системах с более высокой плотностью звезд (например, в звездных скоплениях) захват может быть более эффективен. Поэтому представляет интерес определить вероятность захвата в зависимости от параметров сближения.

Агемян и Аносова (1971) ввели понятие сферы сближения. Радиус этой сферы r определяется через параметры звездного поля по следующей формуле

$$r = \frac{kG\bar{m}}{\overline{V^2}}, \quad (98)$$

где \bar{m} — средняя масса звезд поля, $\overline{V^2}$ — среднее значение квадрата скорости звезды поля, k — безразмерный коэффициент (отношение средней кинетической энергии звезд поля к модулю характерной потенциальной энергии при сближении трех тел). Величина k определяет тесноту тройного сближения. Начало сближения определяется тем моментом времени, когда все три тела попадают внутрь сферы радиусом r .

Начальные условия задаются в системе координат, связанной с центром сферы сближения с таким расчетом, что если тела движутся равномерно и прямолинейно по прицельным прямым, то они окажутся одновременно внутри сферы сближения. Начальные координаты тел ($i = 1, 2, 3$) определяются из уравнений прицельного движения

$$\begin{aligned} x_i &= \rho_i \cos \phi_i \cos \theta_i + (\cos \alpha_i \sin \phi_i - \sin \alpha_i \cos \phi_i \sin \theta_i) V_i (t - t_i) \\ y_i &= \rho_i \sin \phi_i \cos \theta_i - (\cos \alpha_i \cos \phi_i + \sin \alpha_i \sin \phi_i \sin \theta_i) V_i (t - t_i) \\ z_i &= \rho_i \sin \theta_i + \sin \alpha_i \cos \theta_i V_i (t - t_i). \end{aligned} \quad (99)$$

В формулах (99) использованы следующие обозначения: $(\rho_i, \theta_i, \phi_i)$ — сферические координаты (радиус, широта и азимут) прицельной точки — ближайшей к началу координат точки на прицельной прямой; α_i — угол между вектором скорости прицельного движения и вектором нормали к плоскости, проходящей через ось z и радиус-вектор прицельной точки; V_i — модуль скорости прицельного движения; t_i — момент времени прохождения прицельной точки при прицельном движении.

Параметры сближения выбирались следующим образом:

1. углы α_i и ϕ_i равномерно случайно в интервале $(0, 2\pi)$;
2. угол $\theta_i \in (-\pi/2, +\pi/2)$ с плотностью вероятности

$$f_1(\theta_i) = \frac{1}{2} \cos \theta_i; \quad (100)$$

3. прицельное расстояние $\rho_i \in (0, r)$ с плотностью вероятности

$$f_2(\rho_i) = \frac{2\rho_i}{r^2}; \quad (101)$$

4. модуль скорости $V_i \in (0, 4\sqrt{V^2})$ с плотностью вероятности

$$f_3(v_i) = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} \frac{V_i^2}{(V^2)^{3/2}} e^{-\frac{3V_i^2}{2V^2}}; \quad (102)$$

5. момент прохождения через прицельную точку i -го тела, имеющего наименьшую прицельную скорость V_i ,

$$t_i = \frac{15r}{V_i}; \quad (103)$$

6. для двух оставшихся тел $j \neq i$ величины

$$t_j \in \left(t_i - \frac{r}{V_j}, t_i + \frac{r}{V_j} \right) \quad (104)$$

с равномерным законом распределения.

Уравнения движения численно интегрировались в барицентрических координатах до тех пор, пока одно из взаимных расстояний не превышало максимального из начальных взаимных расстояний. Как только это событие происходило, определялась энергия двойной, образованной компонентами с минимальным взаимным расстоянием. Если эта энергия была отрицательной, то считалось, что образовалась двойная система.

В работе Агеяна и Аносовой были рассмотрены три значения параметра $k = 2/\sqrt{3}, 10/\sqrt{3}, 15/\sqrt{3}$. Для каждого k изучено 5000

Таблица 1. Вероятности образования двойных систем при тройных сближениях, согласно работе Агеяна и Аносовой (1971).

k	$2/\sqrt{3}$	$10/\sqrt{3}$	$15/\sqrt{3}$
P	0.103	0.023	0.001

Таблица 2. Вероятности P образования двойных и их средние эксцентриситеты \bar{e} , согласно работе Арсета и Хегги (1976).

k	n	P	\bar{e}
1	300	0.77	0.77
2	400	0.54	0.79
$10/\sqrt{3}$	10^3	0.22	—
8	10^3	0.14	0.80
32	10^4	0.015	0.85
128	10^5	$7.7 \cdot 10^{-4}$	0.84
512	10^6	$4.9 \cdot 10^{-5}$	0.88
2048	$5 \cdot 10^6$	$3.0 \cdot 10^{-6}$	0.89

тройных сближений тел с равными массами. В табл. 1 приведены вероятности формирования двойных — отношения числа образовавшихся двойных к полному числу рассмотренных вариантов.

Из табл. 1 видно, что с увеличением k (то есть с уменьшением тесноты сближений) вероятность формирования двойных быстро убывает.

Арсет и Хегги (1976) попытались воспроизвести результаты Агеяна и Аносовой (1971), а также рассмотрели ряд других значений k . Результаты Арсета и Хегги (1976) представлены в табл. 2. Здесь n — число экспериментов, \bar{e} — средний эксцентриситет образующихся двойных.

Из табл. 2 видно быстрое убывание вероятности P с ростом k . При больших k убывание происходит приблизительно по закону обратных квадратов. Этот результат был получен в статье Арсета и Хегги (1976) и теоретически.

Сравнение табл. 1 и 2 показывает сильные количественные расхождения в оценках P между работами Агекияна и Аносовой (1971), с одной стороны, и Арсета и Хегги (1976), с другой стороны. При одном и том же значении $k = 10/\sqrt{3}$ результаты различаются примерно в 10 раз. Причина расхождений осталась невыясненной. Возможно, она связана с выбором значений r и $\overline{V^2}$ (см. формулу (98)). Из работы Арсета и Хегги (1976) не ясно, какие именно значения этих параметров были выбраны. С другой стороны, Аносова и Кирсанов (1991) показали, что при $G = 1$ и $\overline{m} = 1$ вероятность P зависит, главным образом, от произведения $r \cdot \overline{V^2}$, которое, по сути дела, и определяет величину k , согласно (98).

В работе Аносовой и Кирсанова (1991) были рассмотрены тройные сближения тел равных и различных масс для разных значений r , $\overline{V^2} \in [1, 90/\sqrt{3}]$. Всего в этой работе было исследовано около 70000 тройных сближений. Найдена эмпирическая зависимость вероятности формирования двойных от произведения $r \cdot \overline{V^2}$:

$$P = (0.90 \pm 0.15) - (0.27 \pm 0.12) \cdot \log_3(r\overline{V^2}). \quad (105)$$

При тройных сближениях тел различных масс вероятность формирования двойной несколько меньше, чем при сближении тел одинаковых масс (для одного и того же значения произведения $r \cdot \overline{V^2}$), а формирующиеся двойные в среднем шире. Эксцентриситеты формирующихся двойных в среднем составляют $\bar{e} \approx 0.8 \div 0.9$ (см. последний столбец табл. 2). Максимум распределения эксцентриситетов приходится на интервал $e \in (0.9, 1)$.

Заметим, что процесс формирования двойных в результате тройных сближений одиночных звезд может играть важную роль в динамической эволюции центральных областей звездных скоплений, где вероятность таких сближений может быть не мала.

§3. Гравитационное рассеяние

В звездном поле имеются двойные системы. Это могут быть как первичные (primeval) двойные, компоненты которых сформировались совместно, так и двойные, образовавшиеся в результате различных динамических процессов (кратные сближения, распад звездных групп и скоплений и т.д.). Рассмотрим сближение одиночной звезды поля с двойной системой по гиперболической орбите.

Возможны различные исходы этого события:

1. пролет звезды поля с сохранением двойной (fly-by);
2. разрушение двойной (ionization);
3. обмен компонентами в двойной (exchange);
4. захват звезды поля и образование тройной системы (resonance).

В последнем случае динамическая эволюция тройной системы должна завершиться ее распадом. Предсказать результат этой эволюции крайне сложно из-за сильной чувствительности финального состояния тройной системы к малым изменениям начальных условий.

Гуревич и Левин (1950) изучали поведение двойной системы в звездном поле, используя статистический подход. Они показали, что поведение двойной зависит от отношения модуля ее полной энергии $|E_B|$ к средней кинетической энергии \bar{T} звезд поля. Если это отношение меньше единицы (soft binary), то статистически двойная становится шире и разрушается. В противном случае при $|E_B|/\bar{T} > 1$ (hard binary) двойная становится теснее. Эволюция таких двойных систем должна завершиться слиянием компонентов.

Обширное теоретическое исследование эволюции двойных в звездном поле провел Хегги (1975). Он получил приближенные аналитические оценки вероятностей различных исходов в зависимости от масс тел и параметров сближения (в первую очередь, прицельного расстояния и скорости прохождения).

Численное исследование сближений двойных систем с одиночными звездами выполнялось многими авторами (см., например, Ябушита 1966, Агекян и Аносова 1968, Агекян и Примак 1968, а также ссылки в обзорах Аносовой и Орлова 1985, Аносовой 1985, Валтонена 1988, Валтонена и Микколы 1991, и в книгах Арсета 2003, Валтонена и Карттунена 2006).

Хут и Бакалл (1983) провели аналогию между гравитационным рассеянием и квантово-механическим рассеянием, изучаемым в физике элементарных частиц. Они отмечают, что перечисленные выше исходы рассеяния имеют аналоги в квантово-механических системах. В то же время рассеяние трех частиц в квантово-механических

системах обладает рядом симметрий, которые отсутствуют в системах гравитирующих тел. Поэтому в гравитационном рассеянии больше независимых параметров, характеризующих сближение.

Хут и Бакалл (1983) предлагают использовать следующие 9 независимых параметров сближения:

$m_2 \in [0, 0.5]$ — масса более легкого компонента двойной;

$m_3 \in [0, +\infty)$ — масса звезды поля;

$e \in [0, 1)$ — эксцентриситет орбиты двойной;

$v \in (0, +\infty)$ — асимптотическое значение модуля скорости звезды поля;

$\rho \in [0, +\infty)$ — прицельное расстояние;

$\phi \in [0, 2\pi)$ — азимут прицельной точки;

$\theta \in [0, \pi/2]$ — широта прицельной точки;

$\psi \in [0, 2\pi)$ — угол, определяющий ориентацию вектора направления прицельного движения;

$\vartheta \in [0, 2\pi)$ — истинная аномалия двойной в момент прохождения звездой поля перигентра невозмущенной гиперболической орбиты.

Систему координат удобно связать с центром масс двойной системы. Систему единиц можно выбрать так, что $G = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, $a = 1$. Покрытие сеткой 9-мерного пространства параметров, определяющих начальные условия, весьма обременительно. Поэтому обычно выделяют некоторые наиболее существенные параметры (например, массы m_2 , m_3 и эксцентриситет e орбиты двойной).

Другие параметры можно менять в определенных интервалах, например, скорость подлета $v \in (v_{min}, v_{max})$ с равномерно случайным законом распределения; прицельное расстояние $\rho \in [0, \rho_{max})$ с плотностью вероятности $f(\rho) \propto \rho$ (равномерно случайно в круге).

Остальные параметры можно выбирать случайно во всех интервалах их возможных значений. Например, углы ϕ , $\psi \in [0, 2\pi)$ равномерно случайно; угол $\theta \in [0, \pi/2]$ с плотностью вероятности $f(\theta) \propto \cos \theta$; угол $\vartheta \in [0, 2\pi)$ с плотностью вероятности $f(E) \propto (1 - e \cos E)$ для эксцентрической аномалии E .

Степень тесноты сближения можно характеризовать, например, величиной

$$S(t) = \left[\frac{1}{3} \sum_{i < j} |\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_j(t)|^2 \right]^{1/2}, \quad (106)$$

где $\mathbf{r}_i(t)$ и $\mathbf{r}_j(t)$ — радиусы-векторы тел в барицентрической системе координат.

После достижения первого минимума величины S (106) начинается проверка на прекращение вычислений для данного варианта начальных условий. В работе Хута и Бакалла (1983) вычисления прекращались в одном из четырех случаев:

1. накопление ошибки в интеграле энергии более 1% по отношению к $|E_B|$;
2. функция $S(t)$ имеет более одного минимума — резонансное рассеяние (см. ниже);
3. ионизация — разрушение двойной — все три энергии пар звезд становятся положительными;
4. формирование двойной системы, третье тело уходит от нее по гиперболической орбите (пролет или обмен).

Обычно существует верхний предел $\rho_{max}(v, e)$ для прицельного расстояния ρ такой, что при $\rho > \rho_{max}$ какой-либо из исходов X (например, ионизация или обмен) не происходит. Тогда мы можем ввести понятие сечения (cross section) $\sigma_X(v, e)$ для исхода X следующим образом

$$\sigma_X(v, e) = \pi \rho_{max}^2(v, e) \cdot \frac{n_X(v, e)}{n_{tot}(v, e)}, \quad (107)$$

где n_{tot} и n_X — полное число экспериментов и число экспериментов, которые завершились исходом X (например, ионизацией). Можно провести нормировку сечений — поделить (107) на площадь круга с радиусом, равным большой полуоси a начальной двойной.

На рис. 1 приведены для примера зависимости $\sigma(v)/(\pi a^2)$ от скорости v подлета звезды поля для трех различных исходов: ионизации, обмена и резонансного рассеяния. Рисунок взят из статьи Хута и Бакалла (1983). Массы тел равны. Начальный эксцентриситет орбиты двойной $e = 0$. Скорость v выражена в единицах параболической скорости

$$v_c = \sqrt{\frac{G m_1 m_2 (m_1 + m_2 + m_3)}{a m_3 (m_1 + m_2)}}, \quad (108)$$

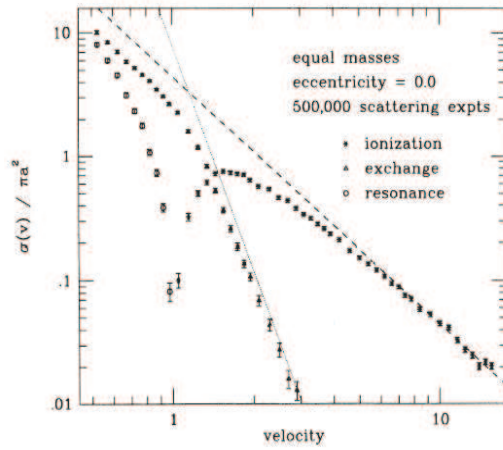


Рис. 1. Зависимости сечений трех разных исходов от скорости подлета звезды поля (Хут и Бакалл 1983).

которая соответствует нулевой полной энергии ($E = 0$) тройной системы.

Из рисунка видно монотонное уменьшение σ для резонансного рассеяния с ростом v от нуля до v_c . Естественно, при $v > v_c$ ($E > 0$) резонансного рассеяния не происходит. Величина $\sigma(v)$ для обменов также является монотонно убывающей функцией скорости. Обмены не наблюдаются при $v > 3v_c$. Ионизация происходит при $v > v_c$ ($E > 0$). Максимум сечения ионизации достигается при $v \approx 2v_c$. Даже при значительных скоростях подлета $v > 10v_c$ возможно разрушение двойной, в то же время $\sigma(v) \rightarrow 0$ с ростом v .

Хегги (1975), а также Хегги и Хут (1993) предложили ряд формул для аппроксимации функций $\sigma(v)$ при значительных скоростях $v > v_c$. Эти аппроксимации можно представить степенными функциями (в логарифмической шкале на рис. 1 они являются прямыми линиями). В случае равных масс аппроксимации сечений ионизации и обмена не зависят от эксцентриситета и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{ion}(v)}{\pi a^2} &= \frac{40}{9v^2}, \\ \frac{\sigma_{ex}(v)}{\pi a^2} &= \frac{640}{81v^6}.\end{aligned}\tag{109}$$

Для резонансного рассеяния не удается получить столь простых зависимостей. Кроме того, существует широкая переходная зона между очень широкими и очень тесными двойными, в которой аналитические аппроксимации удается получить только в редких случаях.

В случае резонансного рассеяния возможны только два варианта исхода — пролет и обмен. Ионизация невозможна, поскольку полная энергия тройной системы отрицательна ($E < 0$). Однако в отличие от обычного рассеяния здесь исход может наступить после большого числа ($\sim 10^1 \div 10^2$) минимумов величины S (106). Характерные времена эволюции образующихся временных тройных систем составляют $T_{res} \sim (10^2 \div 10^4)T_{orb}$, где T_{orb} — период обращения начальной двойной. Средняя оценка времени жизни в случае равных масс составляет (Хут 1993)

$$\bar{T}_{res} \approx 3000T_{orb}.\tag{110}$$

Хут (1984) рассмотрел изменение энергии связи E_B тесной двойной системы в результате прохождения мимо нее звезды поля. Он находил относительное изменение

$$\Delta = \frac{E_B(t \rightarrow +\infty) - E_B(t \rightarrow -\infty)}{E_B(t \rightarrow -\infty)}.\tag{111}$$

Рассматривались зависимости

$$\frac{v^2}{\pi a^2} \frac{d\sigma}{d\Delta} (|\Delta|)\tag{112}$$

как для случаев упрочнения пары ($\Delta > 0$), так и для случаев ее “смягчения” ($\Delta < 0$). Множитель v^2 в (112) появляется из-за эффекта гравитационной фокусировки, поскольку из интеграла сохранения углового момента $\rho v = const$ следует, что

$$\rho \propto v^{-1}.\tag{113}$$

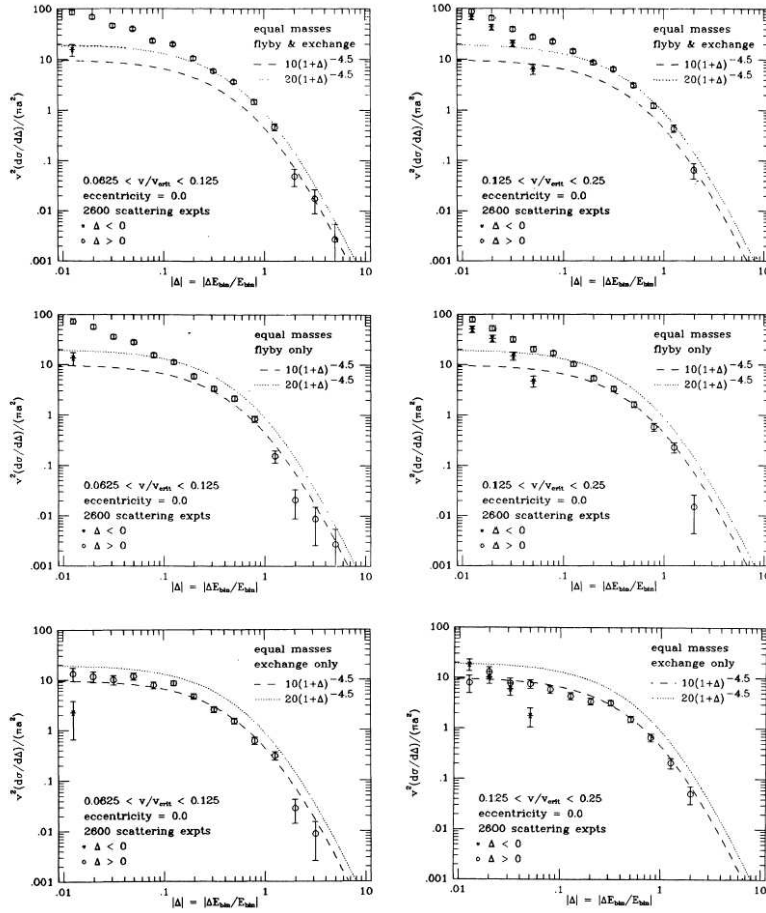


Рис. 2. Примеры зависимостей (112) по результатам Хута (1984).

На рис. 2 показаны примеры зависимостей (112) для случая равных масс тел при $e = 0$ для нескольких интервалов v .

Хегги (1975) показал аналитически, что при значительных $|\Delta|$ зависимости (112) можно аппроксимировать кривыми вида

$$\frac{v^2}{\pi a^2} \frac{d\sigma}{d\Delta} \propto (1 + \Delta)^{-4.5}. \quad (114)$$

Эти кривые также приведены на рис. 2. Из рисунка видно, что аппроксимация (114) согласуется с данными численного моделирования при $|\Delta| > 0.1$, но не согласуется при меньших значениях $|\Delta|$. Хегги и Хут (1993) получили более точные аналитические аппроксимации для зависимостей (112). Подробное описание результатов численного моделирования и их сопоставление с аналитическими аппроксимациями можно найти в книге Валтонена и Карттунена (2006).

§4. Динамика изолированных тройных систем

При изучении динамики тройных систем с отрицательной полной энергией ($E < 0$) можно исходить из разных посылок относительно формирования таких систем. Один из возможных сценариев — прохождение звезды поля мимо тесной двойной системы и временный захват проходящего тела (резонансное рассеяние). Второй сценарий — совместное образование компонентов тройной системы в результате фрагментации единого протозвездного облака. Обзор результатов численного моделирования для обоих вариантов задания начальных условий дан в статьях Аносовой и Орлова (1985), Валтонена (1988), Валтонена и Микколы (1991), а также в книгах Арсета (2003), Валтонена и Карттунена (2006).

При описании первого сценария рассматривается сближение одиночной звезды с двойной по орбите, близкой к параболической (см., например, работы Саслау и др. 1974, Валтонена 1975а, Валтонена и Арсета 1977, Микколы и Валтонена 1986). Варьируются элементы орбит внутренней и внешней двойных, а также массы тел.

Для второго сценария (совместное образование) необходимо рассмотреть все возможные конфигурации тройных систем и различные варианты задания начальных скоростей и масс тел. В качестве области задания начальных конфигураций Агекян и Аносова (1967) предложили использовать область D (рис. 3).

Эта область ограничена осями координат и дугой окружности единичного радиуса с центром в точке $A(-0.5, 0)$. Максимальная сторона AB в треугольнике ABP имеет единичную длину. Тогда перемещая компонент P в пределах области D , мы получим все возможные конфигурации тройных систем. Границы области D Γ_1 ,

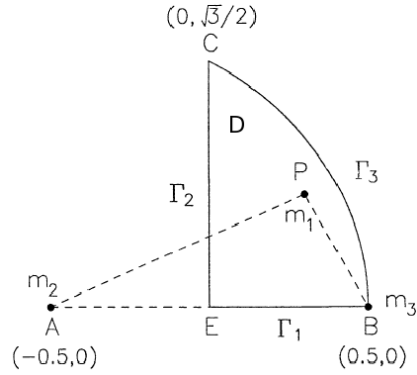


Рис. 3. Область D всех возможных конфигураций тройных систем, впервые предложенная в работе Агеяна и Аносовой (1967).

Γ_2, Γ_3 соответствуют двум частным случаям: равнобедренному треугольнику и отрезку. При рассмотрении динамической эволюции тройных систем с компонентами различных масс необходимо рассматривать шесть различных перестановок масс для каждой конфигурации.

Можно предложить и другие способы выбора начальных конфигураций, например в пределах круга радиусом $R = 1$. В работе Аносовой и др. (1994) было проведено сравнение статистических результатов численного моделирования, выполненного для двух способов задания начальных конфигураций (в области D и в круге с $R = 1$). Как правило, результаты согласуются в пределах их статистической погрешности.

Были рассмотрены различные способы выбора начальных скоростей тел:

1. тройные системы с неподвижными в начальный момент телами (free-fall three-body problem);
2. вращающиеся системы на плоскости;
3. вращающиеся системы в трехмерном пространстве.

Массы тел брались как одинаковые, так и различные.

Сформулируем основные результаты статистического моделирования динамики тройных систем.

1. Динамическая эволюция большинства рассмотренных тройных систем завершается уходом одного из тел; два оставшихся тела формируют тесную двойную систему, как правило, с сильно вытянутой орбитой (средние значения эксцентриситетов $\bar{e} > 0.7$).
2. Необходимое условие распада тройной системы — тесное тройное сближение тел.
3. Увеличение различия масс тел в среднем сокращает время жизни тройной системы.
4. Увеличение момента вращения тройной системы приводит к повышению времени жизни.
5. Среди вращающихся систем встречаются устойчивые по Лагранжу иерархические тройные системы с финитными движениями.

Валтонен (1988) предложил следующую эмпирическую формулу для времени полураспада тройных систем

$$T_{1/2} = 4(1 + 4.5m^{-1})(1 + 24|E|L^2), \quad (115)$$

где m — отношение массы наиболее тяжелого тела к массе самого легкого тела в тройной системе, $|E|$ — модуль полной энергии, L — угловой момент тройной системы в следующей системе единиц: $G = 1$, сумма масс $M = 1$, большая полуось внутренней двойной $a = 1$. Вероятность ухода тела с массой m_i равна

$$p(m_i) = \frac{m_i^{-n}}{\sum_{i=1}^3 m_i^{-n}}, \quad (116)$$

где показатель степени $n \approx 2.5$. Этот показатель также зависит от $|E|$ и L :

$$n \approx 3 - 48|E|L^2. \quad (117)$$

Распределение эксцентриситетов финальных двойных в трехмерном случае можно аппроксимировать законом Амбарцумяна (1937) — Хегги (1975):

$$f(e) = 2e. \quad (118)$$

Для тройных систем на плоскости распределение эксцентриситетов лучше представляется следующим законом (Аносова и др. 1984):

$$f(e) = \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (119)$$

Распределения (118) и (119) следуют из статистической теории распада тройных систем, предложенной Монаханом (1976а, б). Эта теория основана на предположении о квазиэргодичности фазовой траектории тройной системы в состоянии тройного сближения, предшествующего распаду системы. Теория Монахана была несколько модифицирована в книге Валтонена и Карттунена (2006).

Рассмотрим распределение времени жизни T неустойчивых тройных систем, выраженного в единицах среднего времени пересечения

$$T_{cr} = \frac{GM^{5/2}}{(2|E|)^{3/2}}. \quad (120)$$

Валтонен (1988) предлагает следующую аппроксимацию распределения времени жизни

$$f(T) = \frac{0.69}{T_{1/2}} \cdot e^{-0.69T/T_{1/2}}, \quad (121)$$

где $T_{1/2}$ — время полураспада тройных систем, определяемое по формуле (115). Закон (121) аналогичен закону радиоактивного распада.

С другой стороны, можно показать (Агемян и др. 1983), что для изолированных тройных систем среднее время жизни неограниченно велико. Поэтому закон (121) является приближенным.

§5. Тройные сближения и распад тройных систем

Численное моделирование динамики тройных систем показало, что тройные сближения тел могут приводить к уходам компонентов. Подробный анализ тройных сближений проводился в работах Себехея (1973, 1974а,б). Он подчеркнул, в частности, важную роль, которую играют тесные тройные сближения в процессе распада

тройных систем. Дальнейший анализ тройных сближений проделали Валтонен (1975б), а также Аносова и Завалов (1981). Следует также отметить недавние работы Чандры и Бхатнагара (2000а-в).

Оказалось, что распад тройной системы, как правило, происходит после тесного тройного сближения тел. В то же время, далеко не каждое тройное сближение приводит к уходу одного из тел. Аносова и Завалов (1981) составили атлас 100 тройных сближений, приводящих к уходу, и 50 сближений, которые не вызвали ухода. Эти авторы рассмотрели тройные системы с компонентами равных масс и нулевыми начальными скоростями. Были выделены три основных типа сближений:

I — одиночное тело пролетает сквозь временную двойную почти по прямой линии (отклонение направления движения от первоначального не более 45°);

II — прохождение одиночного тела по сильно искривленной траектории (угол отклонения более 45°);

III — обмен компонентами во временной паре.

К распаду чаще приводят тройные сближения типа I (около 60% сближений, вызвавших уход, имели такой тип). С другой стороны, среди сближений, не приводящих к уходу, преобладали обмены компонентами (примерно $3/4$ всех рассмотренных случаев).

Еще один важный момент, отмеченный в работе Агекияна и Аносовой (1991), — это относительное движение компонентов временной двойной в момент прохождения одиночного тела вблизи центра масс тройной системы. Если компоненты двойной расходятся, то после прохождения они будут тормозить пролетевшее тело менее эффективно, чем они его разгоняли до прохождения. Следовательно, уход более вероятен, чем в случае сближения этих тел друг с другом.

В случае вращающихся тройных систем теснота тройного сближения ограничивается неравенством Сундмана (1912). Поэтому приводящие к уходам тройные сближения в системах с малым угловым моментом, как правило, существенно теснее, чем в системах с быстрым вращением. Таким образом, угловой момент тройной системы является существенным параметром процесса распада (Валтонен 1975б).

Результат тройного сближения может быть сильно чувствителен к малым вариациям начальных условий. Пример такой чувстви-

тельности показан на рис. 4 для тройных систем с телами равных масс (Аносова и Завалов 1989).

Начальные условия задаются координатами (ξ, η) компонента P в области D (см. рис. 3). Изменение координаты ξ на 0.002 приводит к радикальному изменению результата тройного сближения — уходам разных тел. Треугольники на рис. 4 отмечают точки входа тройной системы в состояние тройного сближения согласно критерию Агеяна и Мартыновой (1973). В случаях ухода компонентов A и B (рис. 4а, в) наблюдаются прохождения этих тел вблизи центра масс тройной системы. В случае ухода компонента P (рис. 4б) наблюдается разворот траектории этого компонента почти на 180° .

Заметим, что в момент входа в состояние тройного сближения тела образуют конфигурацию, близкую к равностороннему треугольнику, а скорости тел направлены приблизительно к центру масс тройной системы. Тройные сближения близки к тройным соударениям. По-видимому, именно эта близость и обеспечивает высокую чувствительность к начальным условиям. Следует отметить, что в некоторых промежуточных точках (ξ, η) уходов не происходит.

Тройные сближения в окрестности тройных соударений рассматривались в работе Умехары и Таникавы (1999). Этими авторами было показано, что тройные сближения, приводящие к уходам, концентрируются к трем равнобедренным треугольникам. Между ними находятся тройные сближения, которые не приводят к уходам (рис. 5).

Представляет интерес исследовать влияние характеристик тройных сближений на дальнейшую эволюцию тройных систем. В первую очередь, тройное сближение должно влиять на следующий после него выброс.

Можно ожидать, что одним из основных параметров, влияющих на длину выброса, является теснота тройного сближения. Можно предложить множество характеристик тесноты. Мы рассмотрим два параметра:

1. момент инерции тройной системы

$$I = \sum_{i=1}^3 m_i r_i^2; \quad (122)$$

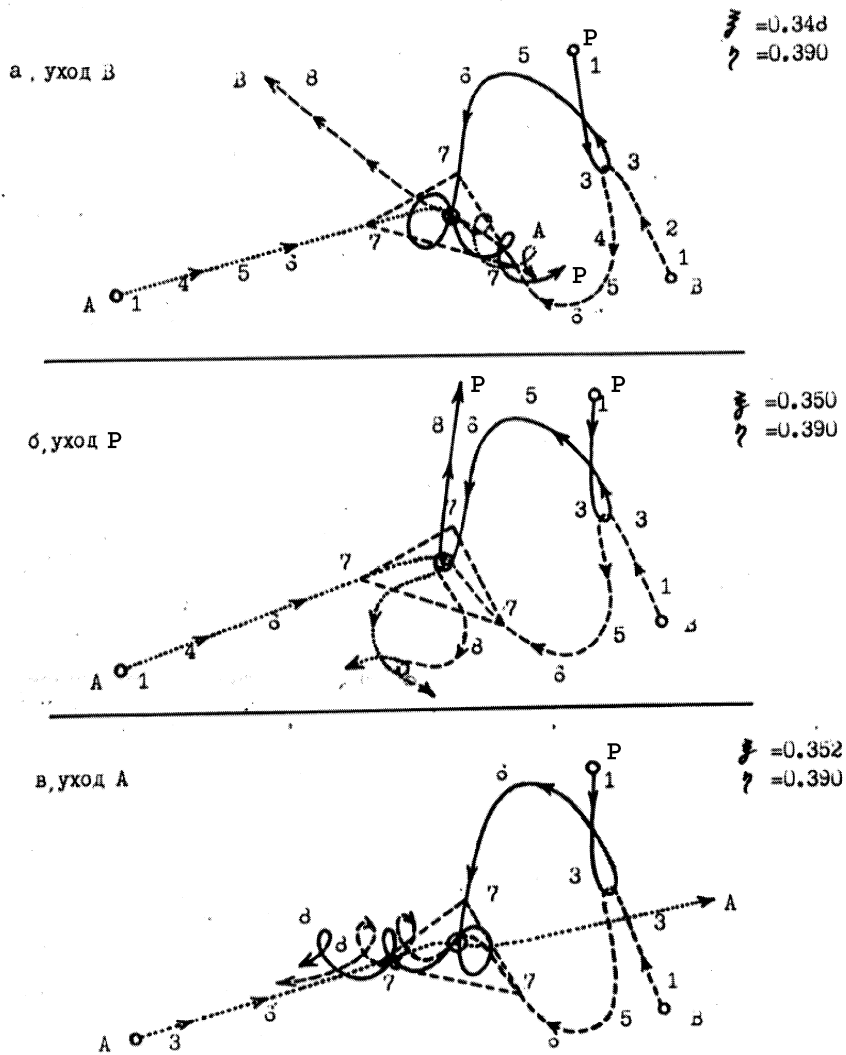


Рис. 4. Зависимость результата тройного сближения от начальных условий (Аносова и Завалов 1989): а) уход компонента В; б) уход компонента Р; в) уход компонента А.

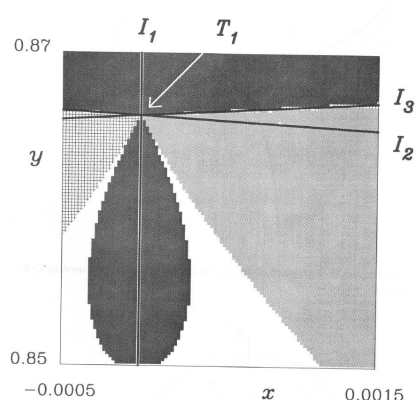


Рис. 5. Области уходов разных тел в окрестности тройного соударения (Умехара и Таникава 1999). В промежутках между “лепестками” уходов не происходит.

2. периметр конфигурационного треугольника

$$p = \sum_{i < j} r_{ij}. \quad (123)$$

Здесь r_i — расстояния от компонентов тройной системы до ее центра масс; r_{ij} — взаимные расстояния между телами.

В работе Орлова и др. (2001) была изучена корреляция между несколькими параметрами тройных сближений и длиной выброса, к которому привело данное сближение. В частности, были рассмотрены параметры (122) и (123). Исследовались тройные системы с нулевыми начальными скоростями компонентов при сканировании области D (рис. 3) с шагами $\Delta\xi = \Delta\eta = 0.02$. Эволюция каждой тройной системы прослеживалась вплоть до ухода одного из тел. В результате была получена выборка 4063 пар “сближение-выброс”. Состояния тройного сближения и выброса определялись по критериям Агеяна и Мартыновой (1973). Оказалось, что существует статистически значимая корреляция между параметрами p и I , с одной стороны, и длиной выброса, с другой стороны. Соответствующие коэффициенты корреляции равны -0.207 ± 0.015 и -0.178 ± 0.015 .

Однако теснота сближения — не единственный параметр, влияющий на длину выброса. В частности, рассмотрим геометрический параметр тройного сближения

$$\beta = \frac{\min r_{ij}}{\max r_{ij}}. \quad (124)$$

Определим значение β в момент, когда расстояние от удаленного тела до центра масс тройной системы достигает минимума. Коэффициент корреляции между β и длиной последующего выброса равен 0.052 ± 0.016 . Таким образом, к более далеким выбросам статистически чаще приводят такие тройные сближения, когда все взаимные расстояния сравнимы между собой.

§6. Стохастичность и регулярность

Численные эксперименты показывают, что результат эволюции неустойчивой тройной системы (время жизни, характеристики финальной двойной и уходящего при распаде тела) бывают очень чувствительны к малым вариациям начальных условий (см., например, работы Агекяна и Аносовой 1977, Арсета и др. 1994, Чернина и Валтонена 1998). С другой стороны, имеются области начальных условий, в пределах которых параметры финального состояния являются гладкими функциями начальных условий.

Рассмотрим для примера эволюцию тройных систем с компонентами равных масс и нулевыми начальными скоростями. Проведем сканирование области D начальных условий (рис. 3) с шагами $\Delta\xi = \Delta\eta = 0.01$ и рассмотрим результат первого тройного сближения (Аносова и Завалов 1989).

Результаты представлены на рис. 6. Кружки соответствуют уходам после первого тройного сближения, согласно критерию Маршала и др. (1984); звездочками отмечены далекие выбросы с максимальными расстояниями от выброшенного тела до центра масс остающейся двойной $\rho > 20d$, где d — средний размер тройной системы, определяемый формулой

$$d = \frac{G \sum_{i < j} m_i m_j}{2|E|}; \quad (125)$$

плюсы соответствуют выбросам умеренной длины с $4d < \rho < 20d$;

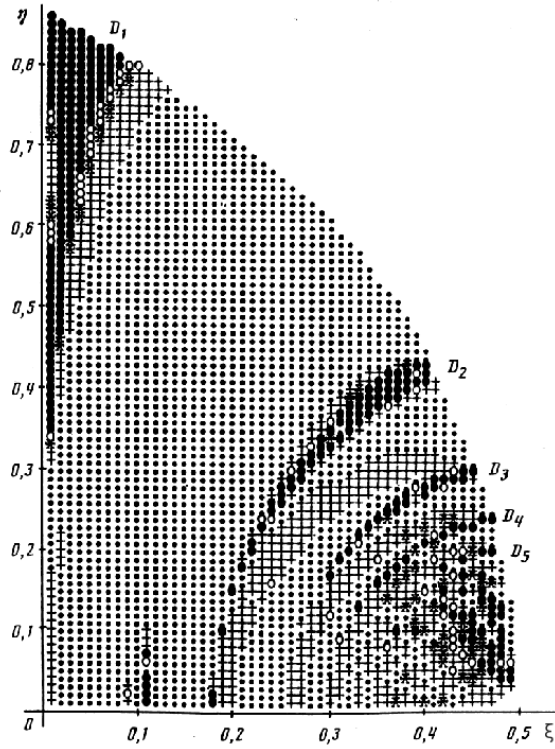


Рис. 6. Зависимость результата первого тройного сближения от начальных условий (Аносова и Завалов 1989).

точки — коротким выбросам с $\rho < 4d$ или состояниям простого взаимодействия.

Зоны уходов образуют регулярную структуру, состоящую из системы концентрических зон D_s ($s = 1, 2, 3, \dots$), которые сходятся к правому нижнему углу области D . Зоны D_s располагаются вблизи изолиний величины

$$\kappa = \frac{r_{AP}}{r_{BP}} \approx s. \quad (126)$$

Зоны D_s динамически подобны друг другу, поскольку сходны начальные условия для тройных сближений, соответствующих каж-

дой из зон. Различие состоит в числе двойных сближений тел B и P , предшествующих тройному сближению. Это число равно $s - 1$.

Интересна тонкая структура зон D_s . При сканировании какой-либо из зон слева направо вдоль оси ξ эта зона разделяется на 5 участков:

1. уход компонента B ;
2. промежуточная зона без уходов;
3. уход компонента P ;
4. промежуточная зона без уходов;
5. уход компонента A .

Тройные сближения, соответствующие 1-му, 3-му и 5-му участкам зоны D_2 , показаны на рис. 4. Зона D_1 симметрична относительно оси ординат.

В пределах этих участков время жизни тройной системы и параметры финального состояния являются непрерывными функциями начальных условий (ξ, η) . При подходе к границе орбита уходящего тела приближается к параболической, а уносимая этим телом избыточная энергия стремится к нулю. Границы соответствуют уходам по параболическим орбитам с нулевой асимптотической скоростью.

Если мы приближаемся к границе с другой стороны, мы имеем все более далекие выбросы с возвратом. При возвращении выброшенного тела истинная аномалия ϑ_{in} орбиты компонентов внутренней двойной является быстро изменяющейся переменной, поскольку период внешней двойной много больше, чем период внутренней пары ($P_{ex} \gg P_{in}$). Следовательно, можно рассматривать ϑ_{in} как случайную переменную. А поскольку результат следующего тройного сближения может сильно зависеть от ϑ_{in} , то он становится практически непредсказуем. Чем длиннее выброс, тем труднее предсказать результат следующего за ним тройного сближения. Существуют принципиальные трудности повышения точности вычислений:

1. ограниченность разрядной сетки;
2. конечность порядка метода численного интегрирования;

3. лимиты оперативной памяти и процессорного времени.

Эти три ограничения принципиального характера делают невозможным прогноз динамической эволюции тройных систем с далекими выбросами. В то же время, мы можем рассматривать зависимости финальных параметров тройных систем от их начальных состояний на ограниченных интервалах времени.

Так, например, Агемян и Аносова (1977) построили зависимости времени жизни тройных систем от начальных координат $T(\xi, \eta)$ для двух зон в области D (рис. 3):

1. вытянутая полоса вдоль оси η ;
2. небольшой участок в правом нижнем углу области D .

Подробное сканирование этих зон с шагами $\Delta\xi = \Delta\eta = 0.0001$ показало, что исследуемые зоны состоят из областей, внутри которых функция $T(\xi, \eta)$ непрерывна. На границах этих областей $T(\xi, \eta) \rightarrow \infty$ (разрыв второго рода). В свою очередь, области непрерывности могут состоять из подобластей, внутри которых постоянно число тройных сближений, предшествующих уходу. На границах этих подобластей функция $T(\xi, \eta)$ непрерывна, а число тройных сближений меняется на единицу — одно из сближений переходит в простое взаимодействие или, наоборот, из простого взаимодействия рождается тройное сближение.

Еще одно исследование зависимости результатов эволюции тройных систем от начальных условий провели Арсет и др. (1994). Эти авторы рассмотрели окрестность так называемой пифагорейской задачи (рис. 7).

Вокруг каждого из тел были проведены 6 окружностей с радиусами

$$\delta = 5 \cdot 10^{-8}, 5 \cdot 10^{-7}, \dots, 5 \cdot 10^{-3} r_u, \quad (127)$$

где r_u — единица расстояния на рис. 7. На каждой окружности было выбрано 100 равноотстоящих точек; угловое расстояние между соседними точками равно 3.6° . Соответствующее тело помещалось в каждую из точек и прослеживалась динамическая эволюция тройной системы при выбранных начальных условиях. Начальные скорости тел брались равными нулю.

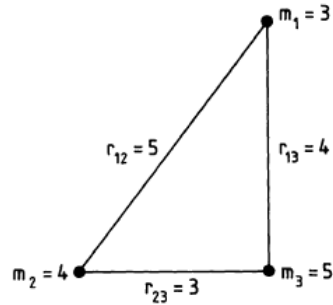


Рис. 7. Начальные условия для пифагорейской задачи (Арсет и др. 1994).

Контроль точности вычислений осуществлялся с помощью “обратного пересчета” и сравнения результатов этого пересчета с начальными условиями. Если отклонения координат и скоростей не превышали 10^{-3} , то этот вариант рассматривался как “предсказуемый”. Зависимости времени жизни от начальных условий для “предсказуемых” вариантов показаны на рис. 8.

На рис. 8 использованы следующие обозначения: кружки — $T \in (40, 50) t_u$ единиц времени; треугольники — $T \in (50, 60) t_u$; звездочки — $T \in (60, 70) t_u$; крестики — $T > 70 t_u$. Пустоты соответствуют “непредсказуемым” вариантам.

На рисунках можно заметить “острова регулярности”, в которых время жизни меняется непрерывно. Один из этих “островов” находится в окрестности исходного пифагорейского решения. Мы можем наблюдать явление перемежаемости областей регулярности и “непредсказуемости”.

Для того, чтобы различать регулярные и стохастические орбиты, в литературе существует целый ряд индикаторов (см., например, работу Скокоса и др. 2004 и ссылки в ней). Как правило, эти индикаторы используют поведение соседних фазовых траекторий. В случае стохастических орбит близкие траектории расходятся с экспоненциальной скоростью.

В применении к проблеме трех тел исследования свойств стохастичности и регулярности траекторий проводились в работах Хейнмяки и др. (1998, 1999). Эти авторы рассматривали эволюцию как отдельных тройных систем, так и ансамблей траекторий с близкими начальными условиями. Начальные конфигурации тройных

систем выбирались в области D (рис. 3), которую авторы называют картой гомологий (homology map). Начальные скорости нулевые, массы тел равны.

Хейнмяки и др. (1998) провели анализ временных рядов $h(t)$, где h — расстояние от точки A до точки P в области D (см. рис. 3). Примеры таких рядов представлены на рис. 9.

Слева мы видим сильно нерегулярное поведение функции $h(t)$. Тройная система основное время проводит в состоянии простого взаимодействия или испытывает короткие выбросы. На правой ча-

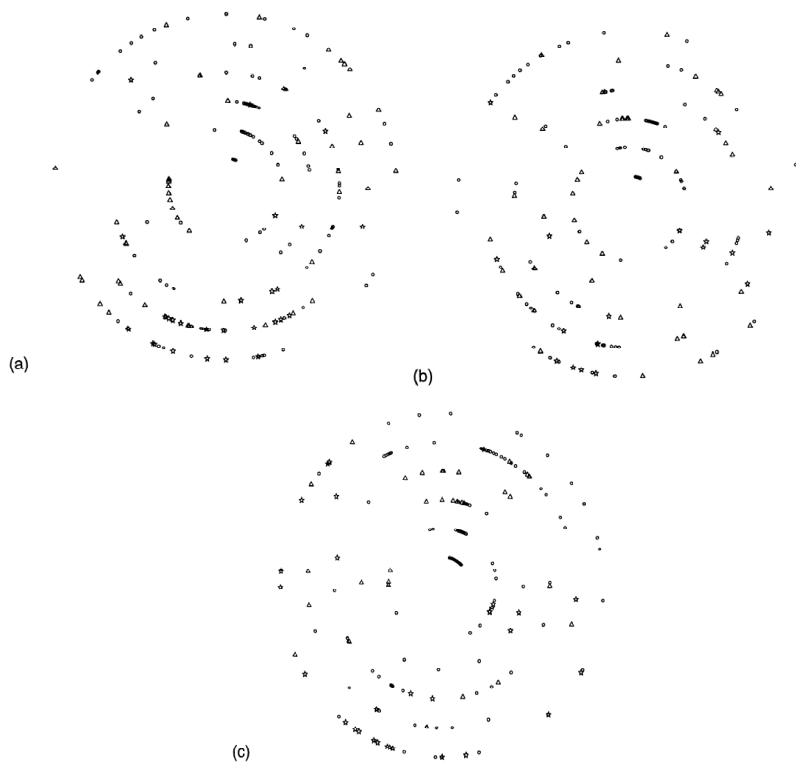


Рис. 8. Зависимости времени жизни от начальных условий для пифагорейской задачи при вариации положений $m_1 = 3$ (a), $m_2 = 4$ (b), $m_3 = 5$ (c), согласно результатам Арсета и др. (1994).

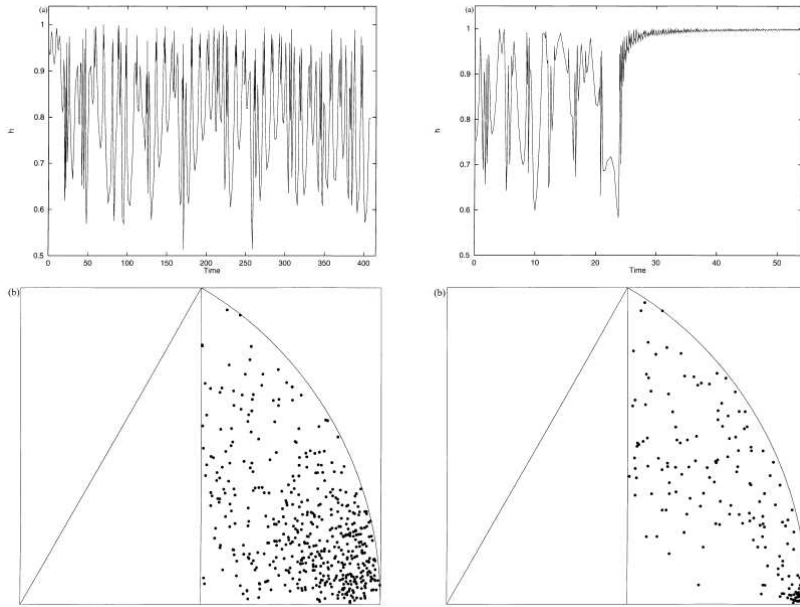


Рис. 9. Примеры зависимостей $h(t)$ (а) и последовательности точек, отображающих конфигурацию тройной системы в области D (б), из работы Хейнямяки и др. (1998).

сти рис. 9 показан другой пример — в начале эволюции в тройной системе также происходят тройные сближения, простое взаимодействие и короткие выбросы. Однако после тройного сближения при $t \approx 25$ единиц времени одно из тел испытывает далекий выброс — отображающая точка P в области D приближается к точке B в правом нижнем углу. Анализ временных рядов $h(t)$ с помощью корреляционного интеграла показывает наличие странного аттрактора с фрактальной размерностью $D = 2.05 \pm 0.01$. Авторы проводят аналогию с другими физическими системами, проявляющими признаки стохастичности (в частности, с аттрактором Лоренца), и приходят к выводу о том, что имеет место перемежаемость хаотических и квазирегулярных состояний.

Другой индикатор стохастичности — энтропия Колмогорова-Синая (КС-энтропия) — был применен в работе Хейнямяки и др.

(1999) к ансамблям тройных систем с близкими начальными условиями. КС-энтропия характеризует степень “размывания” “фазовой капли”, содержащей ансамбль. Рассматривается эволюция ансамблей на области D .

Заметим, что из-за уходов тел фазовое пространство динамической системы, состоящей из ансамбля триплетов, не компактно. Поэтому к тройным системам нельзя непосредственно применить целый ряд результатов, полученных в нелинейной физике для систем с компактным фазовым пространством. Однако общие идеи нелинейной физики можно пытаться распространить и на этот случай. В частности, согласно общим представлениям нелинейной физики (см., например, книгу Лихтенберга и Либермана 1992), система со стохастическим поведением фазовых траекторий обладает следующими двумя свойствами:

1. результат эволюции сильно чувствителен к малым вариациям начальных условий;
2. система со временем “забывает” свое начальное состояние.

Чувствительность к начальным условиям можно описать, например, с помощью показателей Ляпунова, а способность “забывать” начальные условия — посредством КС-энтропии.

Первоначально круглая “капля”, представляющая ансамбль близких начальных условий, со временем вытягивается и постепенно заполняет значительную часть области D .

Миккола (1994) провел статистический анализ результатов численного моделирования сближений одиночной звезды с тесной двойной. На гиперповерхности начальных условий он выделил области, соответствующие регулярным движениям. Эти области характеризуются коротким временем взаимодействия тел и гладкой зависимостью результатов эволюции от начальных условий.

В зонах стохастических движений взаимодействие тел протекает длительное время. Если мы выберем небольшой участок внутри зоны стохастичности и определим статистические характеристики финальных состояний, то получим, что эти величины в пределах ошибок согласуются со статистикой по всем зонам стохастических движений. То есть отдельные участки хаоса воспроизводят все множество хаотических орбит в статистическом плане.

§7. Динамическая устойчивость

Численные эксперименты, проведенные для тройных систем с отличным от нуля моментом вращения (см., например, Аносова и др. 1984, Миккола и Валтонен 1986, Аносова и Орлов 1986, Валтонен и др. 2003), показали, что в ряде случаев тройные системы не распадаются в течение длительного времени (до нескольких тысяч средних времен пересечения), и компоненты не испытывают далеких выбросов. Возможно, движения тел в некоторых из этих систем устойчивы по Лагранжу, то есть остаются ограниченными в течение неограниченного времени при $t \rightarrow \pm\infty$.

Детальный анализ траекторий показывает, что устойчивые тройные системы можно разделить на три типа:

1. иерархические системы;
2. равновесные конфигурации;
3. периодические орбиты.

Устойчивые равновесные конфигурации и периодические орбиты порождают множества траекторий с ограниченными движениями в своей окрестности.

Рассмотрим устойчивые системы, которые реализовались при случайном задании начальных условий. Аносова и Орлов (1986) исследовали эволюцию 3000 тройных систем в трехмерном пространстве. Начальные конфигурации выбирались равномерно случайно в области D (рис. 3) на плоскости XU . Массы тел равны. Начальные скорости задавались двумя способами:

1. изотропное распределение;
2. чисто трансверсальные движения вдоль оси Z .

В обоих случаях фиксировалось начальное значение вириального коэффициента

$$k_0 = \frac{T_0}{|U_0|}, \quad (128)$$

где T_0 и $|U_0|$ — начальные значения кинетической и потенциальной энергий тройной системы. Были рассмотрены следующие значения k_0 :

Таблица 3. Доли нераспавшихся тройных систем в зависимости от k_0 для двух способов выбора начальных скоростей.

k_0	ν_1	ν_2
0	0.000	0.000
0.1	0.024	0.064
0.3	0.066	0.286
0.5	0.050	0.190
0.7	0.004	0.016
0.9	0.000	0.002

$$k_0 = 0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.9. \quad (129)$$

Для каждого k_0 и каждого способа выбора начальных скоростей было рассмотрено 500 вариантов начальных условий.

В табл. 3 приведены доли ν_1 и ν_2 тройных систем, нераспавшихся в течение времени 500 τ , где τ — среднее время пересечения тройной системы.

Из таблицы видно, что максимальная доля устойчивых систем достигается при $k_0 = 0.3$, несколько меньшем соответствующего вириальному равновесию значения $k_0 = 0.5$. Как и ожидалось, в случае чисто трансверсальных движений доля устойчивых систем в несколько раз больше, чем при изотропном распределении начальных скоростей.

Как правило, устойчивые тройные системы имеют иерархическую структуру. В этих системах движения можно представить как суперпозицию двух возмущенных кеплеровых орбит — внутренней двойной, образованной близкими телами, и внешней двойной, которую образуют удаленное тело и центр масс близкой пары.

На основе теории возмущенной задачи двух тел можно получить критерии устойчивости иерархических тройных систем. Исторически первый критерий устойчивости по Хиллу в общей задаче трех тел был получен Голубевым (1967, 1968). Подробный вывод условий устойчивости дан в книге Голубева и Гребеникова (1985). Он основан на обобщении понятия поверхности Хилла для случая, когда массы всех трех тел ненулевые. Условие устойчивости можно

записать в следующем виде. Если в иерархической тройной системе выполнено неравенство

$$s = -\frac{L^2 E}{G^2 \bar{m}^5} > s_{cr}, \quad (130)$$

то в системе невозможен обмен компонентами. Здесь L и E — угловой момент и полная энергия тройной системы, G — гравитационная постоянная, \bar{m} — средняя масса тел. Критическое значение s_{cr} параметра устойчивости зависит только от отношения масс тел. Например, в случае равных масс $s_{cr} = 25/4$. Заметим, что критерий Голубева не дает никакой информации о возможности ухода удаленного тела без предшествующего нарушения иерархии. Этот вопрос остается открытым.

В дальнейшем был предложен целый ряд критериев устойчивости, как аналитических, так и основанных на численном моделировании (см., например, ссылки в книгах Маршала 1990, Арсета 2003, а также Валтонена и Карттунена 2006). Среди недавних критериев отметим полученные Мардлинг и Арсетом (1999), Токовининым (2004), а также Валтоненом и Карттуненом (2006). Эти критерии имеют форму, аналогичную (130), однако в некоторых случаях правая часть неравенства зависит не только от масс тел, но и от орбитальных элементов внутренней и внешней двойных. Простую форму имеет критерий Токовинина (2004), полученный из аппроксимации наблюдательных данных для иерархических тройных звезд с известными элементами орбит внутренней и внешней двойных,

$$\frac{P_{ex}(1 - e_{ex})^3}{P_{in}} > 5. \quad (131)$$

Здесь P_{ex} и P_{in} — периоды обращения внешней и внутренней пар, e_{ex} — эксцентриситет внешней двойной.

Следует отметить, что эмпирические критерии, основанные на результатах численного моделирования, обычно получаются, исходя из ограниченного набора начальных условий. Поэтому всегда остается вопрос об их универсальности и применимости к тройным системам с произвольными начальными условиями. В этом плане более перспективно использование аналитических или полуаналитических критериев. Хотя в некоторых случаях они могут давать завышенные оценки (см., например, обсуждение критерия Голубева

в работе Киселевой и др. 1994). Обычное численное решение уравнений движения может дать представление об устойчивости или неустойчивости тройной системы лишь на ограниченном интервале времени. Кроме того, результаты численного интегрирования отягощены ошибками.

Представляется перспективным использование полуаналитических критериев устойчивости (см., например, книгу Валтонена и Карттунена 2006), основанных на теории возмущений и параметризованных с помощью численного моделирования.

§8. Периодические орбиты

Периодические орбиты в общей задаче трех тел часто строятся как аналитические продолжения известных орбит в ограниченной задаче трех тел (см., например, обзор Хаджидеметриу 1984). Аналитические методы поиска периодических орбит нередко используют разложение в ряд Фурье или сходные ему. В последнее время развиваются топологические методы поиска периодических решений (см., например, работы Мура 1993, Шенсинье и Монтгомери 2000, Симо 2002, Вандербея 2003). Поиск периодических орбит в этих работах осуществляется посредством минимизации функционала действия

$$A = \int (T - U) dt. \quad (132)$$

На практике искомое решение представляют в виде отрезка ряда Фурье, подставляют его в (132) и решают задачу на оптимизацию, определяя начальные условия, доставляющие минимум функционалу (132).

Таким образом, в частности, были найдены так называемые “хореографии” в задаче N тел, когда тела движутся друг за другом вдоль одной и той же замкнутой кривой. Один из примеров хореографий для задачи трех тел — орбита “восьмерка” (Мур 1993, Шенсинье и Монтгомери 2000) — показан на рис. 10. В этом случае тела равных масс движутся друг за другом вдоль замкнутой кривой, имеющей форму восьмерки. Тела не испытывают тесных сближений. Симо (2002) показал, что орбита “восьмерка” является устойчивой — малые вариации начальных условий и масс тел не

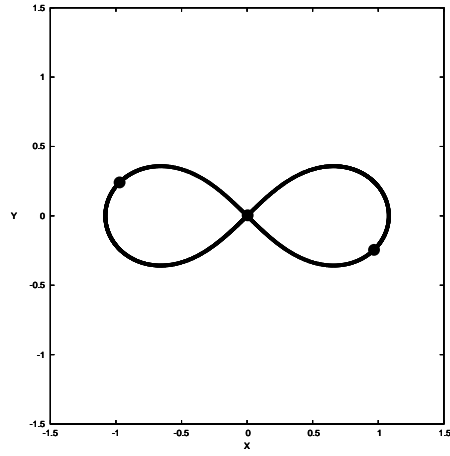


Рис. 10. Орбита “восьмерка” (Мур 1993).

меняют общий характер движений. Хотя может происходить прецессия “восьмерки” (рис. 11).

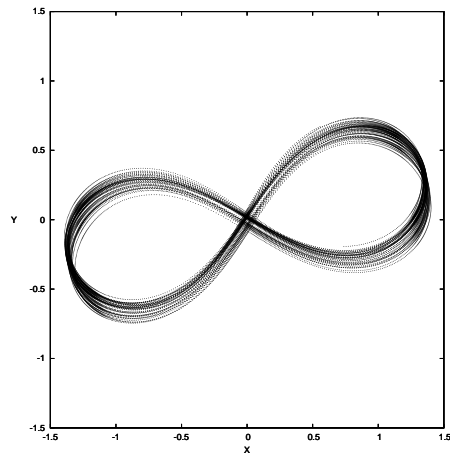


Рис. 11. Прецессия “восьмерки” при небольшой вариации начальных условий.

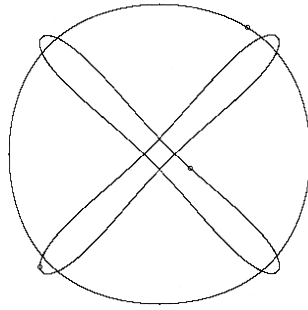


Рис. 12. Периодическая орбита Ducati3 с резонансом 2 : 1 (Вандербей 2003).

Наряду с хореографиями применение принципа минимизации функционала действия (132) позволяет находить ряд других периодических орбит в общей плоской задаче трех тел (см., например, работу Вандербея 2003). Два примера таких орбит показаны на рис. 12 и 13 для случая равных масс тел.

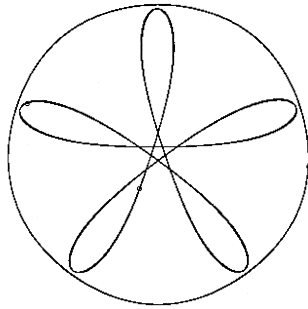


Рис. 13. Периодическая орбита Hill3 с резонансом 5 : 2 (Вандербей 2003).

Периодическая орбита Ducati3 (рис. 12) обладает резонансом 2 : 1. Здесь одно тело движется вдоль кривой, близкой к окружности, а два других тела — по вытянутым замкнутым взаимно ортогональным кривым. В случае орбиты Hill3 с резонансом 5 : 2 (рис. 13) два тела движутся друг за другом вдоль одной замкнутой кривой, напоминающей пятиконечную звезду, а третье тело обращается по замкнутой выпуклой кривой, охватывающей звезду. В работе Ван-

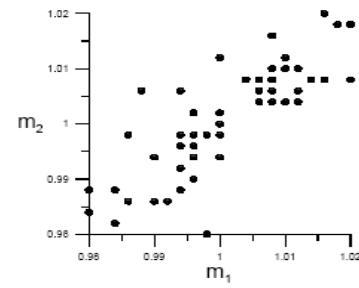
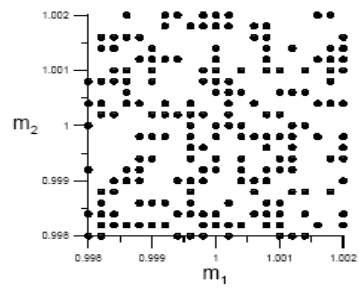
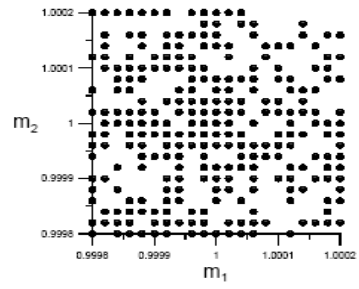


Рис. 14. Зависимость устойчивости орбит в окрестности “восьмерки” от вариаций масс тел с шагами $\Delta m_1 = \Delta m_2 = 2 \cdot 10^{-5}$; $2 \cdot 10^{-4}$; $2 \cdot 10^{-3}$ (Орлов и др. 2003).

дербея (2003) приведен еще ряд периодических орбит, найденных с помощью минимизации функционала действия (132), в том числе и для разных масс тел.

Представляет интерес исследование устойчивости найденных периодических орбит. Как правило, такое исследование проводится в линейном приближении (см., например, монографию Маршала 1990). Другой способ — численное моделирование движений трех тел при малых вариациях начальных условий и масс тел (см., например, работы Симо 2002, Орлова и др. 2003 для орбиты “восьмерка”). Для устойчивых периодических орбит имеются множества траекторий с ограниченными движениями в окрестности орбит. Такие множества были обнаружены в окрестности “восьмерки” в работах Симо (2002), а также Орлова и др. (2003). Оказалось, что устойчивость “восьмерки” наиболее чувствительна к вариациям масс тел (рис. 14).

На рисунке нанесены точки, в которых движения оставались ограниченными в течение 1000τ : максимальное расстояние между телами в течение этого времени не превышало $5 d$. Видно, что при малых изменениях масс и сохранении остальных начальных условий имеется непрерывная область устойчивости в окрестности исходного периодического решения. С увеличением вариаций масс доля вариантов с ограниченными движениями уменьшается, причем множество таких точек в трехмерном пространстве масс обладает свойствами фрактальности. Фрактальная размерность D_F варьируется в пределах от 2 до 3 в зависимости от шага сканирования.

Устойчивые периодические орбиты во многом определяют эволюцию и неустойчивых систем. Это происходит посредством явления “прилипания”, известного для многих динамических систем (см., например, работы Чирикова 1979, 1991). В работе Мартыновой и др. (2003) был обнаружен ряд тройных систем с компонентами равных масс и нулевыми начальными скоростями, в которых движения длительное время происходят в окрестностях устойчивых периодических орбит. Так, например, на рис. 15 показан фрагмент движений в окрестности “восьмерки”. Такие траектории были названы метастабильными. В конце концов, фазовая траектория выходит из окрестности периодической орбиты и эволюция тройной системы завершается уходом одного из компонентов.

Две другие устойчивые периодические орбиты, к которым “при-

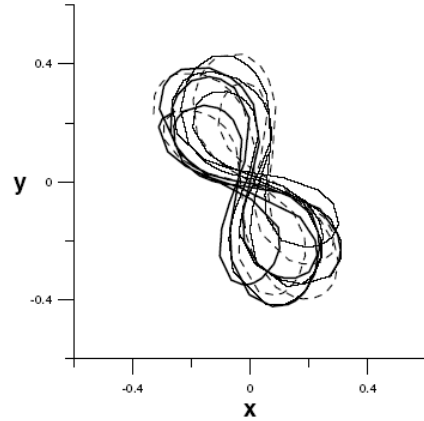


Рис. 15. Фрагмент эволюции метастабильной системы в окрестности “восьмерки” (Мартынова и др. 2003).

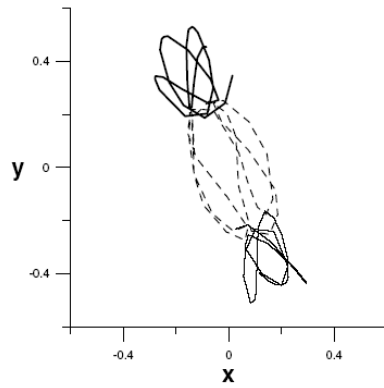


Рис. 16. Фрагмент траекторий в окрестности орбиты фон Шубарта (Мартынова и др. 2003).

“прилипают” траектории в этой задаче, были обнаружены фон Шубартом (1956) и Бруком (1979) в двух частных случаях задачи трех тел с равными массами — прямолинейной и плоской равнобедренной задачах (см. § 9). Примеры траекторий, “прилипающих” к этим орбитам, показаны на рис. 16 и 17. Иногда может происходить “перескок” траектории из окрестности одной периодической орбиты в

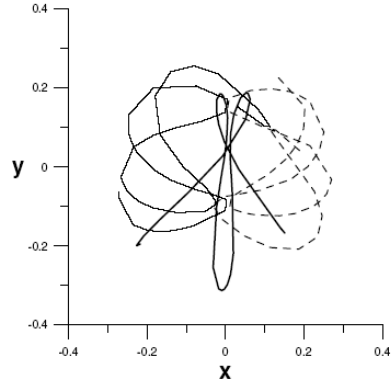


Рис. 17. Фрагмент траекторий в окрестности орбиты Брука (Мартынова и др. 2003).

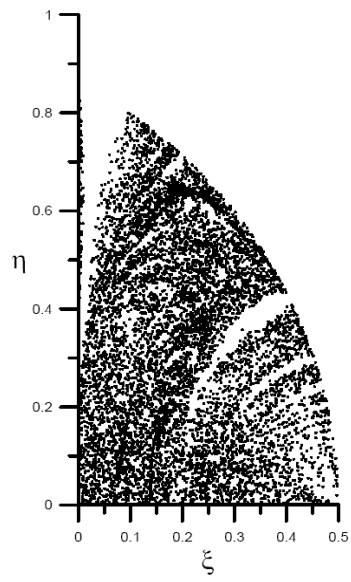


Рис. 18. Начальные условия для метастабильных тройных систем (Орлов и др. 2004).

окрестность другой орбиты. В некоторых случаях в ходе эволюции тройной системы происходит несколько “прилипаний” к периодическим орбитам. В промежутках времени между “прилипаниями” в тройной системе происходят выбросы тел и тройные сближения.

На рис. 18 представлены начальные положения в области D для тройных систем, в ходе эволюции которых происходят переходы в метастабильный режим на время не менее 100τ .

Из рисунка видно, что, как и ожидалось, метастабильные системы избегают зон быстрых уходов, как показывает сопоставление с рис. 6. Есть области повышенной концентрации метастабильных систем. Однако в целом они встречаются по всей области D . Повидимому, само явление “прилипания” носит в значительной мере случайный характер.

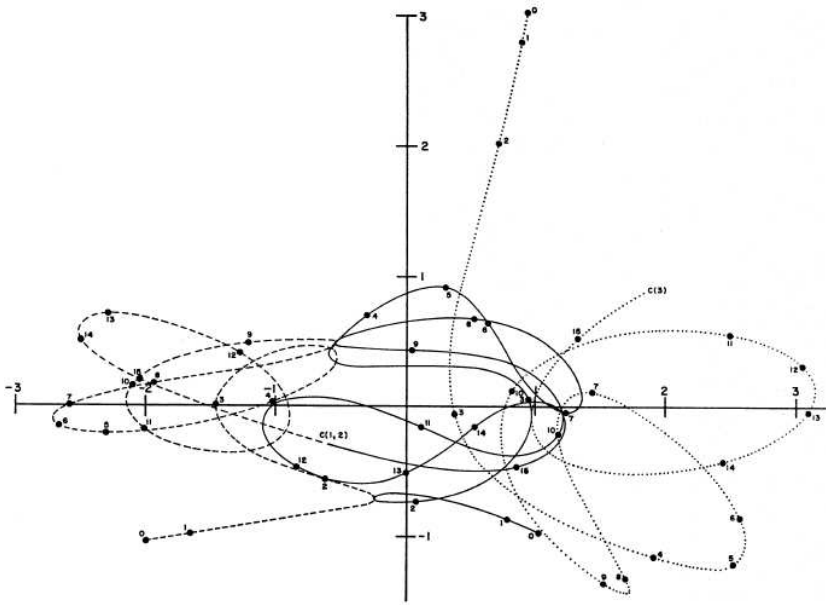


Рис. 19. Периодическая орбита в окрестности пифагорейской задачи (Себехей и Петерс 1967). Происходит соударение двух тел в точке $C(1,2)$, при этом третье тело останавливается в точке $C(3)$. Дальше движения повторяются.

Описанные выше устойчивые периодические орбиты имеют довольно простую структуру. В ряде работ (см., например, Себехей и Петерс 1967; Энон 1974; Маркеллос 1980, 1981; Даву и Брук 1982) были найдены начальные условия для ряда более сложных периодических орбит и их семейств. Одна из таких орбит располагается в окрестности пифагорейского решения (Себехей и Петерс 1967). Пример эволюции показан на рис. 19. Эта орбита, вероятно, неустойчива. В окрестности этого решения проявляются признаки стохастичности движений (см. § 6).

§9. Некоторые частные случаи задачи трех тел

В общем случае задача трех тел не поддается решению. В то же время некоторое представление о поведении решений общей задачи трех тел можно получить из рассмотрения отдельных частных случаев. Известны равновесные частные решения Эйлера и Лагранжа, когда три тела все время располагаются на одной вращающейся прямой или в вершинах равностороннего треугольника.

Можно рассмотреть и другие частные случаи задачи трех тел. Например, можно исследовать случай, когда все три тела все время находятся на одной прямой (прямолинейная задача трех тел). Второй частный случай достигается, когда одно из тел движется вдоль прямой, проходящей через центр масс двойной системы, образованной телами равных масс, перпендикулярно плоскости орбиты этой двойной (равнобедренная задача трех тел). Использование дополнительных ограничений и симметрий позволяет свести обе эти задачи к динамическим системам с двумя степенями свободы.

Подробный численный анализ прямолинейной задачи трех тел проведен в работе Хьетаринты и Микколы (1993). Эти авторы выделяют три основных типа движений в этой задаче:

1. быстрый уход одного из крайних тел;
2. хаотическое рассеяние — уход одного из крайних тел после длительной эволюции;
3. квазипериодические ограниченные движения.

Если зафиксировать отношение масс тел, то при отрицательной полной энергии E тройной системы глобальное поведение траекторий определяется устойчивостью или неустойчивостью периодической орбиты фон Шубарта (1956). Устойчивая орбита фон Шубарта порождает области начальных условий, соответствующих квазипериодическим траекториям с ограниченными движениями и хаотическому рассеянию. Эти множества вытесняют зоны быстрых уходов. Потеря устойчивости орбиты фон Шубарта приводит к увеличению доли траекторий с быстрыми уходами. Таким образом, периодическая орбита “управляет” поведением всего множества решений.

Классификацию орбит можно выполнить средствами символической динамики (см. работы Таникавы и Микколы 2000а, б). Каждой траектории эти авторы ставят в соответствие последовательность символов (целых чисел), отмечающих двойные и тройные соударения тел. Поскольку тройные соударения представляют собой существенные особенности, то их аналитическое продолжение, как правило, невозможно. Двойные соударения допускают аналитическое продолжение и их можно регуляризовать (один из методов регуляризации описан, например, в работе Хиетаринты и Микколы 1993). Таникава и Миккола рассматривают множество всех допустимых символических последовательностей и показывают, что оно является канторовым множеством, а, следовательно, имеет мощность континуума. Среди всех допустимых последовательностей авторы выделяют периодические символические последовательности (их число бесконечно велико), которые соответствуют периодическим орбитам.

Траектории движения в прямолинейной задаче трех тел можно представлять в координатах (r, ρ) , где r — расстояние между крайним левым и центральным телами, а ρ — расстояние от центрального тела до крайнего правого. Периодическая орбита фон Шубарта на плоскости (r, ρ) для тел равных масс имеет следующий вид (рис. 20).

В этом случае периодическая орбита устойчива (Энон 1977). Поэтому, согласно КАМ-теории, существует множество траекторий ненулевой меры с начальными условиями, взятыми в окрестности этой орбиты, которые будут обладать ограниченными движениями. Пример такой траектории показан на рис. 21. На границе множе-

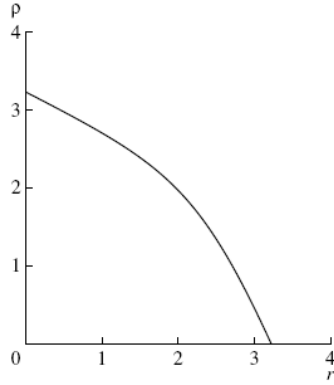


Рис. 20. Периодическая орбита фон Шубарта (1956) в прямолинейной задаче трех тел равных масс (Орлов и др. 2002а).

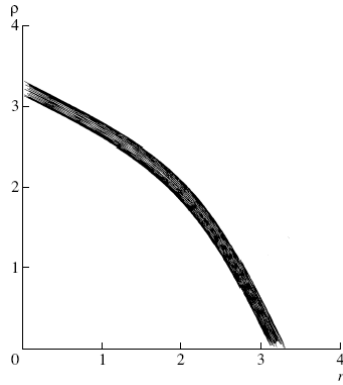


Рис. 21. Устойчивая по Лагранжу траектория в окрестности орбиты фон Шубарта (Орлов и др. 2002а).

ства траекторий с ограниченными движениями находятся неустойчивые периодические орбиты (Хиетаринта и Миккола 1993).

Другой частный случай — равнобедренная задача трех тел. Ее еще иногда называют обобщенной задачей Ситникова, поскольку именно для этой задачи Ситников (1960) обнаружил новый класс движений — осциллирующие движения — в случае, когда центральное тело имеет нулевую массу. Алексеев (1969) исследовал

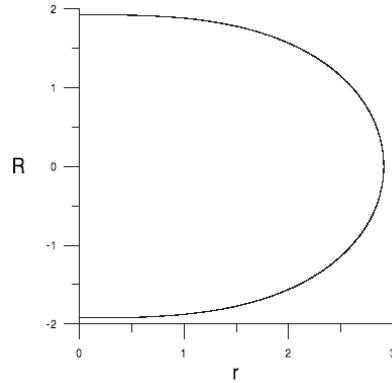


Рис. 22. Периодическая орбита Брука (1979) для тел равных масс (Орлов и др. 2002б).

задачу Ситникова методами символической динамики и показал, что структура семейства орбит носит квазислучайный характер: сколь угодно малые вариации начальных условий могут приводить к сильно различающимся результатам динамической эволюции.

Можно еще более упростить равнобедренную задачу, если допустить, что все три тела всегда движутся в одной и той же плоскости. Для этой задачи Брук (1979) нашел несколько однопараметрических семейств периодических орбит (параметр — отношение масс тел), а также орбит с тройными соударениями. Траектории можно изображать на плоскости (r, R) , где r — расстояние между крайними телами, а R — расстояние от центрального тела до центра масс крайних тел. Так, например, самая простая орбита, найденная Бруком, на плоскости (r, R) имеет следующую форму (рис. 22) в случае равных масс тел.

Устойчивая периодическая орбита Брука окружена множеством орбит с ограниченными движениями. Одна из таких траекторий показана на рис. 23.

В этой задаче была обнаружена еще одна устойчивая периодическая орбита более сложной формы (рис. 24) в работах Заре и Чесли (1998), а также Орлова и др. (2002б).

Глобальный анализ плоской равнобедренной задачи трех тел проведен Заре и Чесли (1998), а также Чесли (1999). Эти авторы

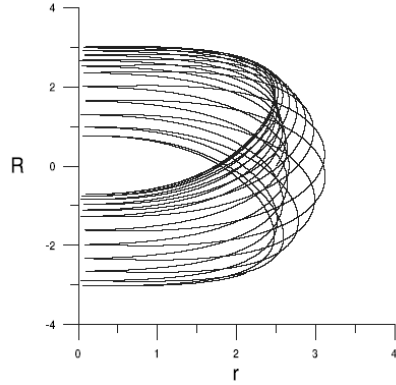


Рис. 23. Устойчивая по Лагранжу траектория в окрестности орбиты Брука (Орлов и др. 2002б).

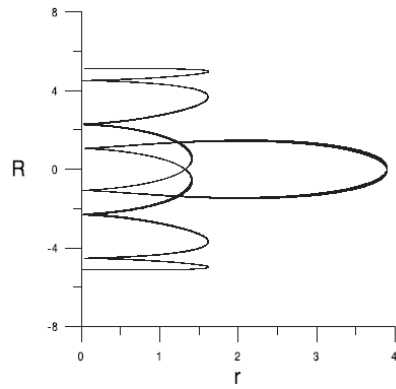


Рис. 24. Устойчивая периодическая орбита второго типа в случае тел равных масс (Орлов и др. 2002б).

использовали классический метод сечений Пуанкаре в сочетании с построением символических последовательностей. На множестве начальных условий выделяются подмножества, соответствующие уходам центрального тела после определенного числа сизигий (пересечений этим телом линии, соединяющей крайние тела). В свою очередь, эти подмножества могут разделяться на зоны с определенным числом двойных соударений крайних тел, предшествующие

щих очередной сизигии. В фазовом пространстве выделены “острова” устойчивости, погруженные в стохастическое “море”. Были найдены области устойчивости в окрестности периодической орбиты Брука в зависимости от отношения масс тел и углового момента тройной системы.

Глава III

Динамика звездных групп и скоплений

§1. Динамическая эволюция кратных звезд

Согласно современным представлениям о процессе звездообразования (см., например, обзор Ларсона 2001), большинство звезд окрестности Солнца (одиночных, двойных и устойчивых кратных) могло образоваться в результате распада неиерархических малых групп звезд, содержащих от нескольких до нескольких десятков объектов. Эти представления восходят еще к работам ван Альбады (1968b и ссылки в ней), в которых была показана возможность формирования широких двойных и кратных звезд с характерными размерами ~ 10 а.е. и более в результате распада небольших звездных групп с размерами от $\sim 10^2$ до $\sim 10^5$ а.е.

Ван Альбада провел серию численных экспериментов, моделирующих динамическую эволюцию групп, содержащих $N = 10$ и 24 звезды, в рамках гравитационной задачи N тел. Эти группы разрушаются за характерные времена от $\sim 10^3$ до $\sim 10^8$ лет. В процессе динамической эволюции из групп происходит диссипация одиночных, двойных и даже тройных звезд. В финале эволюции остается кратная система. В то же время число вариантов начальных условий в работах ван Альбады было невелико (несколько десятков вариантов), как и время прослеживания эволюции (20 средних времен пересечения). Поэтому статистический анализ результатов этих экспериментов весьма затруднителен.

На основе своих численных экспериментов ван Альбада (1968a)

сформулировал основные механизмы диссипации звезд из малых групп (см. также книгу Арсета 2003):

1. кратные сближения звезд (двойные, тройные и большей кратности);
2. сближение одиночной звезды с двойной типа пролет (в результате такого сближения двойная становится теснее, а одиночная звезда покидает скопление);
3. выброс одного из компонентов из связанной тройной подсистемы;
4. обмен при сближении двойной с одиночной звездой.

В большинстве случаев уход происходит в результате сильного взаимодействия трех звезд, поэтому закономерности, выявленные при численном моделировании динамики изолированных тройных систем (см. Главу II), могут быть существенны и для изучения динамики малых групп. Более того, численные исследования динамики звездных скоплений (см., например, работу Арсета 1972б) показали, что те же процессы играют существенную роль в диссипации звезд из скоплений (см. также § 2 в этой главе).

Среди ранних исследований динамики неиерархических кратных систем следует отметить работы Харрингтона (1974, 1975). В этих работах рассмотрена динамическая эволюция 200 четверных и 120 пятикратных систем при случайных распределениях начальных конфигураций систем, скоростей компонентов и их масс. Основным интересом для автора представляются финальные состояния. Показано, что в 30-50% случаев эволюция заканчивалась образованием финальной двойной системы и в 15-30% случаев формировалась тройная система. В остальных случаях эволюция не завершалась в течение рассмотренного времени. В нескольких случаях формировались иерархические четверные системы, состоящие из двух двойных. Для двойных систем было построено распределение эксцентриситетов; оказалось, что оно согласуется с законом Амбарцумяна-Хегги $f(e) = 2e$. Также Харрингтон сравнивает относительные частоты реализации двойных и тройных систем в численных экспериментах и наблюдениях и показывает их согласие (они составляют около 20%).

Более обстоятельные исследования динамической эволюции неиерархических кратных звезд были проведены на рубеже XX и XXI веков. Так, в работе Стерзика и Дурисена (1998) рассматривалась динамическая эволюция групп, состоящих из $N = 3, 4, 5$ звезд, для нескольких начальных спектров масс. Эволюция групп прослеживалась в течение 300 начальных времен пересечения. За это время большинство групп достигает устойчивого финального состояния. Эти авторы предложили метод исследования финальных состояний, основанный на выделении изолированных подсистем (одиночных, двойных и кратных). Они назвали такой подход “иерархическим анализом виртуальных частиц”. В результате все финальные состояния разделяются на несколько классов. Основной класс — тесная двойная и $N - 2$ одиночных звезды. Хотя и другие варианты (например, тройная система и $N - 3$ одиночных звезд, две двойных и $N - 4$ одиночных) также реализуются.

Для систем с компонентами различных масс Стерзик и Дурисен (1998) обнаружили так называемый “динамический байсинг” (dynamical biasing), состоящий в том, что финальные двойные системы, как правило, формируют более тяжелые компоненты. Образующиеся двойные, как правило, в несколько раз теснее, чем первоначальная система N тел. Выброшенные из системы одиночные звезды могут иметь значительные скорости. Например, для групп с характерным начальным размером ~ 100 а.е. модуль характерной скорости составляет несколько км/с. Заметим, что распределение модулей скоростей асимметрично — наблюдается “хвост” из звезд с высокими скоростями, достигающими до десятков км/с.

Исследования динамики малых групп звезд получили развитие в работах Рубинова и др. (2002, 2004), Стерзика и Токовина (2002), Стерзика и Дурисена (2003), Рубинова (2004). В этих работах рассмотрена динамическая эволюция групп с N от 3 до 18 для широкого диапазона начальных условий. Исследованы системы с различными начальными спектрами масс, размерами, формой, дисперсией скоростей, энергией вращения и т.д.

Оказалось, что имеется ряд свойств финальных состояний, устойчивых по отношению к выбору начальных условий:

1. как правило, эволюция завершается формированием тесной финальной двойной;

2. довольно высока вероятность образования финальной устойчивой тройной системы (5-20%);
3. распределение эксцентриситетов финальных двойных согласуется с законом Амбарцумяна-Хегги $f(e) = 2e$;
4. финальные устойчивые тройные, как правило, обладают сильной иерархией (среднее отношение больших полуосей внешней и внутренней двойных составляет примерно 20 : 1);
5. в устойчивых тройных эксцентриситеты внешних двойных в среднем меньше, чем эксцентриситеты внутренних пар ($\bar{e}_{ex} \approx 0.5$, $\bar{e}_{in} \approx 0.7$);
6. орбиты внешней и внутренней двойных, как правило, некомпланарны и преобладают системы с прямыми движениями (вращение внутренней и внешней пар чаще происходит в одну сторону);
7. скорости уходящих звезд в среднем увеличиваются с ростом N и с уменьшением начального размера системы, они могут составлять от нескольких км/с до нескольких десятков км/с.

Орбитальные параметры образующихся двойных и устойчивых тройных систем в целом не противоречат наблюдательным данным для широких двойных и тройных звезд (см., например, Рубинов и др. 2002, Стерзик и Токовинин 2002).

Представляет интерес сравнить скорости уходящих звезд со скоростями молодых звезд-“бегунов”, которые имеют значительные peculiar скорости и могут находиться на больших расстояниях от областей звездообразования, концентрирующихся к плоскости Галактики (см., например, Стерзик и Дурисен 1995, Киселева и др. 1998). В этих работах строятся распределения модулей скоростей звезд, выброшенных из малых групп, содержащих изначально от 3 до 10 звезд. Распределения скоростей ухода имеют максимум в интервале от 0 до 10 км/с. В ряде случаев скорости могут составлять несколько десятков км/с, а в исключительных случаях даже превышают 100 км/с. При начальном размере группы в 100 а.е. примерно в 1% случаев скорость выброса превосходит 30 км/с. Выброшенные звезды могут удаляться на значительные расстояния от плоскости Галактики (примерно до 2-3 кпк).

§2. Динамика рассеянных звездных скоплений

Рассеянные скопления содержат сотни и тысячи объектов. Подробный анализ методов численного моделирования динамики звездных скоплений в рамках гравитационной задачи N тел проведен в книге Арсета (2003). Первые обширные численно-экспериментальные исследования динамики звездных скоплений были выполнены в 70-е годы XX века в работах Арсета и Вилена (см., например, Арсет 1974, Вилен 1975).

При задании начальных условий для звездных скоплений мы можем использовать функцию фазовой плотности, то есть распределение координат и скоростей тел, а также начальную функцию масс. Например, Вилен в своих экспериментах использовал модель Пламмера (1911). Пространственная плотность звезд в этой модели задается следующей формулой

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi r_0^3} \frac{1}{[1 + (r/r_0)^2]^{5/2}}, \quad (133)$$

где M — полная масса скопления, r_0 — проективный медианный радиус. Радиус полумассы скопления для модели Пламмера равен $r_h \approx 1.3r_0$ (см., например, Арсет и Фолл 1980). Распределение скоростей часто задается изотропным. В некоторых случаях скопление обладает дифференциальным вращением.

Начальная функция масс звезд в скоплении часто имеет степенной закон

$$f(m) \propto m^{-\alpha}, \quad (134)$$

причем рассматривается определенный интервал масс $[m_1, m_N]$. Значение $\alpha = 2.35$ соответствует классическому закону Солпитера (1955), предложенному им для звезд окрестности Солнца. Рассматриваются и другие значения α , в том числе и разные значения α для разных интервалов масс (см., например, Кроупа 2001). Нередко для сравнения рассматривается случай равных масс.

Основные результаты численного моделирования эволюции рассеянных звездных скоплений можно сформулировать следующим образом:

1. центральная плотность скопления систематически увеличивается со временем;
2. на периферии скопления образуется гало, состоящее из более легких звезд, выброшенных из ядра;
3. более массивные звезды “оседают” в ядре скопления — имеет место так называемая сегрегация масс;
4. в ядре скопления формируется одна или несколько тесных двойных, которые содержат значительную долю энергии связи скопления;
5. дисперсия скоростей звезд в скоплении убывает с ростом расстояния от центра — скопления неизотермичны;
6. распределение скоростей звезд в ядре скопления приблизительно изотропно, а на периферии преобладают радиальные движения;
7. после нескольких пульсаций в скоплении устанавливается приблизительное вириальное равновесие;
8. центральная двойная со временем становится в среднем теснее;
9. релаксация скопления происходит, главным образом, за счет двойных сближений;
10. диссипация звезд из скопления происходит, в основном, в результате тесных кратных сближений звезд в центральных частях скопления.

Длительные вычисления (Шпурцем и Арсет 1996) показали, что коллапс ядра может быть остановлен, если формируется несколько центральных двойных систем. На рис. 25 приведена зависимость логарифма радиуса скопления, содержащего от 1 % до 75% его массы, от времени интегрирования из работы (Шпурцем и Арсет 1996). Результаты авторов в случае числа звезд $N=10000$ показаны линиями, на которых видны флуктуации. Сглаженные линии соответствуют результатам моделирования, в котором скопление представлялось меньшим числом тел ($N=1000$). Видно, что после формирования нескольких центральных двойных систем коллапс ядра

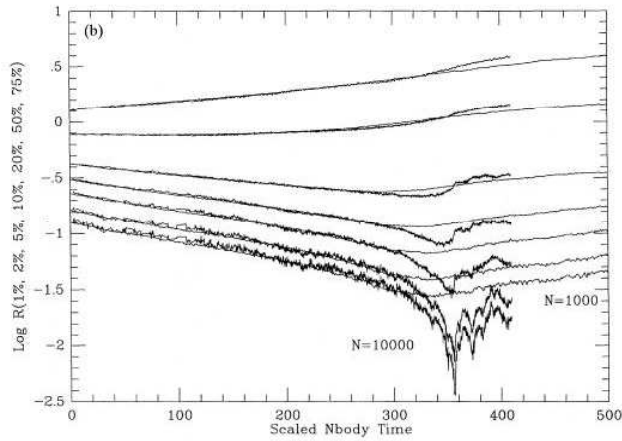


Рис. 25. Эволюция логарифма радиуса рассеянного скопления со временем (Шпурцем и Арсет 1996).

останавливается, и в дальнейшем наблюдается небольшое расширение скопления.

Увеличение начальной дисперсии масс звезд в среднем ускоряет эволюцию скопления и темп диссипации звезд из него. Так, для случая равных масс средний темп диссипации звезд (число звезд, покинувших скопление в течение одного времени пересечения τ) равен

$$\left| \frac{dN}{dt} \right| \tau \approx 0.1, \quad (135)$$

а для начального спектра масс Солпитера

$$\left| \frac{dN}{dt} \right| \tau \approx 1. \quad (136)$$

Эти оценки, полученные из численных экспериментов, в несколько раз превышают теоретические оценки (см., например, Энон 1969), полученные с учетом только двойных сближений. Таким образом, в диссипации звезд из скоплений важную роль играют кратные сближения, в которых участвуют три и более звезды. Кроме того, относительный темп диссипации звезд разных масс не столь сильно

различается, как предсказывает теория Энона, в которой не учитывается сегрегация масс. Дело в том, что сегрегация масс приводит к погружению более массивных звезд в ядро скопления, откуда диссипация происходит наиболее эффективно, поскольку именно там больше вероятность сближения трех и более звезд (в том числе, сближений одиночных звезд с двойными и сближений двух двойных систем). Маломассивные звезды значительную часть времени проводят на периферии скопления, что в результате уменьшает вероятность их ухода из скопления. Таким образом, двойные и кратные звезды играют существенную роль в процессе диссипации звезд из скопления.

В скоплении могут существовать две популяции двойных и кратных систем:

1. первичные (primeval) системы, компоненты которых сформировались совместно;
2. системы, образовавшиеся в результате динамической эволюции.

Динамическая эволюция звездных скоплений с первичными двойными будет обсуждаться в следующем параграфе. Здесь мы рассмотрим двойные и кратные подсистемы, формирующиеся в ходе эволюции скопления.

Арсет (1971) исследовал модели скоплений, состоящих из $N = 250$ и 500 звезд, без первичных двойных с начальным спектром масс $f(m) \propto m^{-2}$. Он фиксировал изолированные двойные, формировавшиеся в ходе эволюции скопления.

Двойная характеризуется параметром тесноты

$$\lambda = \left| \frac{E_B}{E} \right|, \quad (137)$$

где E_B — полная энергия двойной, E — полная энергия скопления. Кроме того, двойная должна быть изолирована от других звезд скопления, то есть параметр

$$\gamma = \frac{|\mathbf{F}_k - \mathbf{F}_l|R^2}{G(m_k + m_l)} \ll 1, \quad (138)$$

где R — расстояние между компонентами, m_k и m_l — их массы, \mathbf{F}_k и \mathbf{F}_l — ускорения, сообщаемые компонентам пары остальными

звездами скопления. При $\gamma \sim 1$ и более двойная быстро разрушается.

Как правило, тесные двойные с $\gamma < 1$ образуются в ядре скопления в результате серии взаимодействий с формированием временных широких пар и обменов компонентов в них с другими звездами скопления. В конце концов, может сформироваться тесная двойная, модуль полной энергии которой превышает среднюю кинетическую энергию одиночных звезд скопления. Эта двойная способствует уходам звезд из скопления в результате сближений с одиночными звездами и широкими двойными. При этом сама тесная двойная, как правило, становится еще теснее. Тесные двойные формируются на временах $t \approx (20 \div 50) \tau$. Они имеют большую по модулю энергию связи ($\lambda > 0.5$) и сильно вытянутые орбиты (эксцентриситеты $e > 0.6$).

Хегги (1975) обобщил результаты численного моделирования звездных скоплений и построил приближенную теорию формирования и эволюции широких и тесных пар в поле скопления. Он исследовал влияние сближений двойных с одиночными звездами на распределения эксцентриситетов и энергий широких и тесных пар, а также сопоставил теоретические результаты с результатами численных экспериментов. Он показал, что распределения эксцентриситетов как широких, так и тесных двойных можно аппроксимировать законом $f(e) = 2e$. Распределения $f(|E_B|)$ модулей полных энергий двойных не удается представить единой аналитической функцией. Для не очень широких и не слишком тесных пар допустима аппроксимация

$$f(|E_B|) \propto |E_B|^{-5/2}. \quad (139)$$

Широкие двойные со временем разрушаются, а тесные пары становятся в среднем все теснее. Поэтому “равновесные” распределения по энергиям для них недостижимы.

§3. Звездные скопления с первичными двойными

В процессе формирования звездного скопления могли образовываться не только одиночные, но и двойные звезды. Популяция этих первичных двойных может повлиять на общую эволюцию звездного

скопления. Ряд авторов рассматривал динамику звездных скоплений с первичными двойными (см., например, работы МакМиллана и др. 1990, 1991; Хегги и Арсета 1992; Герша и Шпурцема 2000).

МакМиллан и др. (1990, 1991) рассмотрели несколько моделей Пламмера с $N = 256, 512, 1024$ компонентов, причем в начальный момент времени 10-20% компонентов входят в состав двойных систем. Для сравнения рассматривались системы одиночных звезд. Присутствие двойных приводит к сегрегации в скоплениях — концентрация двойных в ядре скопления выше, чем концентрация одиночных звезд. Около половины массы ядра составляют первичные двойные.

После фазы первоначального коллапса происходит общее расширение скопления. При этом первичные двойные становятся в среднем теснее и способствуют общему разогреву — ядро скопления оказывается значительно больше, чем в случае одиночных звезд. Это показано на рис. 26, на котором представлена эволюция радиуса ядра скопления со временем по данным работы (МакМиллан и др. 1991). Верхняя часть рисунка соответствует результатам моделирования эволюции скопления, состоявшего в начальный момент исключительно из одиночных звезд, нижняя часть соответствует результатам моделирования скопления, в котором примерно 20% звезд входило в состав первичных двойных. Затем большинство двойных разрушается в результате сближений их друг с другом. Выжившие двойные становятся более тесными.

Наблюдаются “вспышки” выделения энергии в ядре скопления в результате коллективных взаимодействий, в которых может участвовать несколько десятков звезд. В ходе этих “вспышек” имеют место тройные сближения и сближения двух двойных, которые приводят к сильному перераспределению энергии и выбросам звезд из скопления.

В работе Хегги и Арсета (1992) рассмотрено большее число тел $N = 2500$, но меньшая доля двойных (только 6% звезд в начале эволюции являются членами двойных). Кроме того, эти авторы предлагают простую теорию коллапса скопления с учетом сегрегации двойных в скоплении и показывают, что теория согласуется с численными экспериментами.

Герш и Шпурцем (2000) представляют модификацию метода Монте-Карло, учитывающую кроме двойных сближений тесные тройные и четверные сближения тел. Распределение $N = 300000$

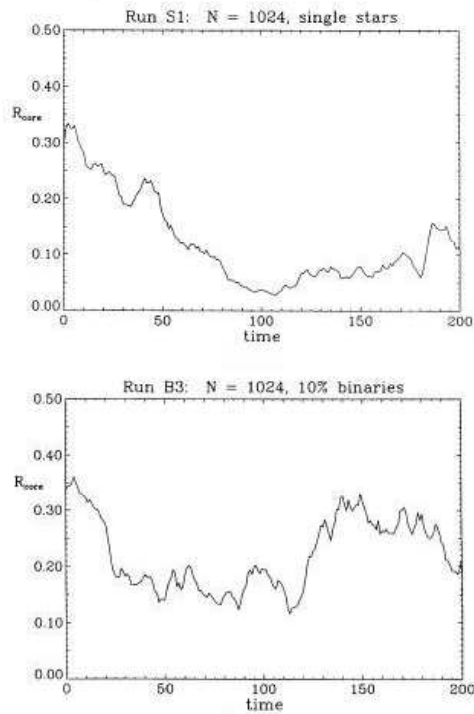


Рис. 26. Эволюция радиуса ядра рассеянного скопления со временем в зависимости от доли первичных двойных (МакМиллан и др. 1991).

одиночных звезд равных масс представляет газовую сферу. Популяция 30000 первичных двойных накладывается на распределение одиночных звезд. Моделируется миграция двойных в скоплении, их формирование, изменение тесноты за счет сближений с одиночными звездами и другими двойными. При этом используются сечения для различных исходов сближений одиночных звезд с двойными и двух двойных, полученные при моделировании изолированных тройных и четверных систем. Таким образом, можно построить реалистичные модели шаровых скоплений, не используя специализированные компьютеры.

§4. Звездная динамика и звездная эволюция

На динамическую эволюцию звездных скоплений могут влиять различного рода эффекты звездной эволюции: потеря массы в виде звездного ветра и в результате вспышек сверхновых; обмен веществом в полуразделенных и контактных двойных; приливные взаимодействия звезд при тесных сближениях и в тесных двойных; столкновения и слияния звезд; гравитационное излучение в тесных двойных, состоящих из компактных объектов, и т.д. Все эти эффекты требуют специального рассмотрения в сравнении с чисто гравитационным взаимодействием компонентов.

Эффект потери массы рассматривался во многих работах (см., например, Вилен 1968; Арсет и Вулф 1972; Арсет 1973; Терлевич 1987). В случаях вспышки сверхновой или сброса планетарной туманности предполагается мгновенная потеря массы. Время жизни звезды на главной последовательности и масса остатка зависят от начальной массы звезды (см., например, аппроксимации в работе Терлевич 1987). При вспышке сверхновой остаток получает добавочную скорость толчка (kick). Обычно предполагается, что модуль этой скорости распределен по закону Максвелла (см., например, работу Хансена и Финни 1997). В книге Арсета (2003) описан алгоритм генерации случайных скоростей толчка. Потеря массы вследствие вспышек приводит к общему расширению скопления и к дополнительным выбросам звезд.

Потеря массы вследствие звездного ветра не приводит к столь радикальным последствиям. Тем не менее, общее расширение скопления и сопутствующее увеличение времени релаксации несколько продлевают время жизни скопления (см., например, работу де ля Фуенте Маркоса и де ля Фуенте Маркос 2002). Это увеличение даже компенсирует влияние уходов звезд из скопления за счет приливного поля Галактики.

Эволюция тесных двойных с перетеканием вещества между компонентами учитывается в современных программах численного моделирования динамики звездных скоплений (см. § 9 в Главе I и раздел 11.10 в книге Арсета 2003). При этом рассматриваются различные экзотические объекты, такие как рентгеновские двойные и объекты Торна-Житковой. Нестабильный обмен массой в тесных двойных может приводить к слиянию компонентов (см., например,

Портегис Цварт и др. 2004). Примерно 70% продуктов слияния в реалистичных моделях скоплений являются следствием обмена массой. Тесные рентгеновские двойные в скоплениях, как правило, состоят из белого карлика (аккретора) и обычной звезды главной последовательности. Иногда в качестве аккретора выступает нейтронная звезда или черная дыра. Однако из-за толчков при вспышках сверхновых и из-за малой доли массивных звезд такие двойные встречаются гораздо реже.

Другой механизм формирования продуктов слияния — столкновения звезд. В качестве критериев слияния можно использовать результаты гидродинамических расчетов столкновений двух одиночных звезд (см. работы Бенца и Хиллса 1987, 1992, а также ссылки в книге Арсета 2003). Физические столкновения и последующие слияния звезд, наряду со слияниями компонентов в тесных двойных, приводят к образованию голубых бродяг, особенно на поздних стадиях эволюции скоплений. Таким образом, можно объяснить обилие голубых бродяг в старых рассеянных скоплениях типа М 67 (см., например, работу Харли и др. 2001), комбинируя два возможных сценария образования этих объектов (слияния компонентов за счет эволюции в первичных двойных и слияния звезд при столкновениях в ходе тесных сближений одиночных звезд с двойными и двух двойных систем).

Приливные взаимодействия между звездами при тесных сближениях могут приводить к образованию двойных систем посредством приливного захвата (см., например, работу Мардлинг и Арсета 2001 и ссылки в ней). Обычно звезды рассматриваются как политропные модели, причем индекс политропы может меняться со временем, что отражает эволюцию звезды. Наряду с приливным захватом приливные взаимодействия в тесных двойных (как первичных, так и сформировавшихся динамическим путем) способствуют циркуляризации орбит двойных и синхронизации вращения звезд с орбитальным движением. В двойных со значительными эксцентриситетами ($e > 0.2$) при определенных условиях приливное взаимодействие может приводить к хаотическим изменениям элементов орбиты двойной. Столь бурные приливные взаимодействия могут иметь место при тесных кратных сближениях или во временных кратных системах (как устойчивых, так и неустойчивых), формирующихся в ходе эволюции скопления.

Влияние таких взаимодействий на эволюцию отдельных подси-

стем в скоплении может быть весьма разнообразно. С одной стороны, двойные с сильно вытянутыми орбитами могут “округляться”. С другой стороны, приливные взаимодействия могут способствовать слияниям компонентов. Как и ожидалось, большинство изолированных пар начинают активную циркуляризацию, когда один из компонентов переходит на ветвь гигантов. Тогда расстояние между компонентами становится сравнимо с радиусом гиганта. Пока еще не вполне ясно, как влияют приливные взаимодействия между звездами на эволюцию скопления в целом.

В тесных двойных, состоящих из релятивистских объектов (белых карликов, нейтронных звезд или черных дыр) существенную роль может играть торможение, вызванное излучением гравитационных волн (см., например, работу Таута и др. 1997). Для эволюции тесных двойных, состоящих из маломассивных звезд главной последовательности существенно может быть также торможение магнитным полем. Специальных исследований влияния гравитационного излучения и магнитного торможения на эволюцию скоплений пока не проводилось, но, по-видимому, эффект будет небольшой. В основном, будут происходить слияния объектов — компонентов тесных двойных.

Еще один эффект, связанный со звездной эволюцией, — выметание газа из скопления после формирования в нем первых звезд высокой светимости. Эволюция равновесного звездного скопления, содержащего $2/3$ вещества в виде газа, была рассмотрена Кроупой и др. (2001). По мере уменьшения массы газа (время истечения $\approx 0.4 \cdot 10^6$ лет) скопление начинает расширяться. Однако значительная часть звезд остается гравитационно связанной. Формируется лишь медленно расширяющееся гало. Остающееся после выметания газа звездное скопление содержит примерно $1/3$ первоначального состава звезд. По своим структурно-кинематическим характеристикам оно сходно с Плеядами, в то время как в начале эволюции скопление было похоже на скопление в туманности Ориона (ОНС). Таким образом, прослеживается эволюционная связь между очень молодыми скоплениями, содержащими большое количество газа, и более старыми скоплениями типа Плеяд.

Кроме того, показано, что экстремально молодые рассеянные скопления в диске Галактики представляют собой ядра расширяющихся ОВ ассоциаций. Расширяющаяся популяция звезд формирует движущуюся группу звезд. Эта группа по своим характери-

стикам отличается от движущегося скопления, формирующегося из звезд, диссипирующих из скопления в результате динамической эволюции. Звезды расширяющейся популяции расходятся примерно изотропно по всем направлениям. Размер группы может достигать до 1 кпк. Диссипирующие в дальнейшем звезды уходят, главным образом, в окрестности точек Лагранжа системы “Галактика – скопление – звезда”. В результате формируются “шлейфы” у скоплений (см. работу Чумака и др. 2005). Будущие космические наблюдения, возможно, позволят разделить упомянутые выше две популяции звезд в Плеядах и других звездных скоплениях.

§5. Влияние внешних полей на динамику скопления

Звездные скопления существуют не изолированно — они подвергаются силовым воздействиям со стороны других объектов Галактики (соседних скоплений, газовых облаков, гипотетических черных дыр и т.п.), а также со стороны регулярного поля Галактики в целом. Уже в ранних работах по моделированию динамики звездных скоплений так или иначе оценивался вклад поля Галактики (см., например, работы Хэйли 1970, Вилена 1972, Арсета 1973).

Звезды с небольшим избытком энергии могут ускользать из скопления только в окрестности точек Лагранжа L_1 и L_2 (см. также работу Портегис Цварга и др. 2001). Перед этим они совершают блуждания в пределах области возможных движений. Подробный анализ этого процесса был выполнен Хегги (2001).

Введение приливного поля Галактики характерно для большинства реалистичных моделей звездных скоплений. В то же время, как правило, эффект внешнего поля рассматривается наряду с другими дополнительными эффектами, поэтому трудно выделить его в чистом виде. Можно только утверждать, что внешнее поле способствует уходу из скопления звезд, выброшенных на значительные расстояния от ядра. В результате темп диссипации звезд из скопления может увеличиться в несколько раз. Кроме того, нарушается сферическая симметрия, характерная для невращающихся изолированных скоплений. Периферийные части скопления вытягиваются в направлении центр-антицентр Галактики и сплющиваются к плоскости Галактики.

С другой стороны, внешние воздействия уменьшают анизотропию в гало скопления и снижают эффект гравитационной фокусировки ядра скопления. Часть звезд гало, выброшенных из ядра по вытянутым орбитам, может не вернуться в ядро и образует корону скопления, состоящую из нескольких десятков звезд в пределах от одного до двух приливных радиусов (Терлеви́ч 1987). Уходы звезд из скоплений чаще происходят под небольшими углами к плоскости Галактики.

§6. Взаимодействие скоплений с газовыми облаками и друг с другом

Наряду с приливным воздействием внешних полей звездные скопления могут испытывать гравитационные удары при тесных сближениях с массивными объектами — газовыми облаками или (гипотетическими) черными дырами.

Для корректного рассмотрения сближений звездных скоплений с газовыми облаками необходимо сочетать две численные схемы:

1. интегрирование уравнений движения задачи N тел для звезд скопления;
2. интегрирование гидродинамических уравнений для газового облака.

Такой комбинированный подход был развит в работах Тенса (1992а, б). Для численного решения уравнений движения N тел использовалась программа *NBODY2*, составленная С. Арсетом (см. § 3 в Главе I). При численном решении гидродинамических уравнений применялась *SPH*-схема (гидродинамика сглаженных частиц — см., например, обзор Монахана 1988). Также учитывались дополнительные вклады от газовой и звездной составляющих в потенциалы, фигурирующие в гидродинамических уравнениях и в уравнениях движения звезд.

Рассматривались сближения скопления, состоящего из $N = 500$ звезд равных масс (модель Пламмера), с облаком, состоящим из 2500 сглаженных частиц газа. Характерный размер скопления в формуле (133) равен $r_0 = 1$ пк. Были рассмотрены гигантские молекулярные облака (ГМО) с массами 10^5 солнечных масс и радиусами 10 пк, а также диффузные облака с массами 500 солнечных

масс и радиусами 5 пк. Изучались лобовые столкновения скоплений с облаками с асимптотическими скоростями, равными 2 км/с.

Оказалось, что сближения с ГМО и диффузными облаками приводят к сильно различающимся результатам. В первом случае звездное скопление вытягивается вдоль своей орбиты и сжимается в ортогональных направлениях, образуя иглообразную структуру. Эта структура, в свою очередь, сильно неоднородна. Она разрушается на несколько несвязанных друг с другом групп звезд. Большинство этих групп неустойчиво по отношению к регулярному полю Галактики, поэтому они будут постепенно разрушаться. Двойные звезды концентрируются преимущественно в более плотных группах. ГМО практически не ощущает воздействия со стороны скопления. Рис. 27 из работы Тенса (1992а) иллюстрирует описанный выше процесс взаимодействия скопления с ГМО.

При сближении скопления с диффузным облаком ситуация меняется. Звездное скопление в целом сохраняет свою структуру и состав. Облако начинает сжиматься. Из центра облака ортогонально направлению на скопление распространяется ударная волна. При этом облако сжимается в тех же направлениях. На рис. 28 из работы Тенса (1992а) показаны направления распространения ударной волны в диффузном облаке в результате его столкновения со скоплением.

Таким образом, поведение облака в этом случае на качественном уровне сходно с поведением скопления при сближении с ГМО. Однако облако оказывается более устойчивым. Оно теряет лишь около 20% массы, в то время как при сближении с ГМО скопление разрушается практически полностью. Вероятно, сохранение облака связано с ударной волной, которая уносит значительную часть кинетической энергии. В целом диффузное облако после сближения становится более разреженным, чем до него.

Отметим еще работы де Оливейры и др. (1998, 2000), в которых проводится численное моделирование процессов сближения и слияния двух звездных скоплений. Использовался древесный алгоритм с $N \sim 10^3 \div 10^4$. При тесных сближениях возможно слияние скоплений сравнимых масс. Продукт слияния обычно имеет сплюснутую форму. Релаксация продукта слияния происходит в течение $\sim 2 \cdot 10^8$ лет, при этом сжатие сохраняется. Во всех моделях продукт слияния имеет расширяющееся гало. При сближении скоплений с

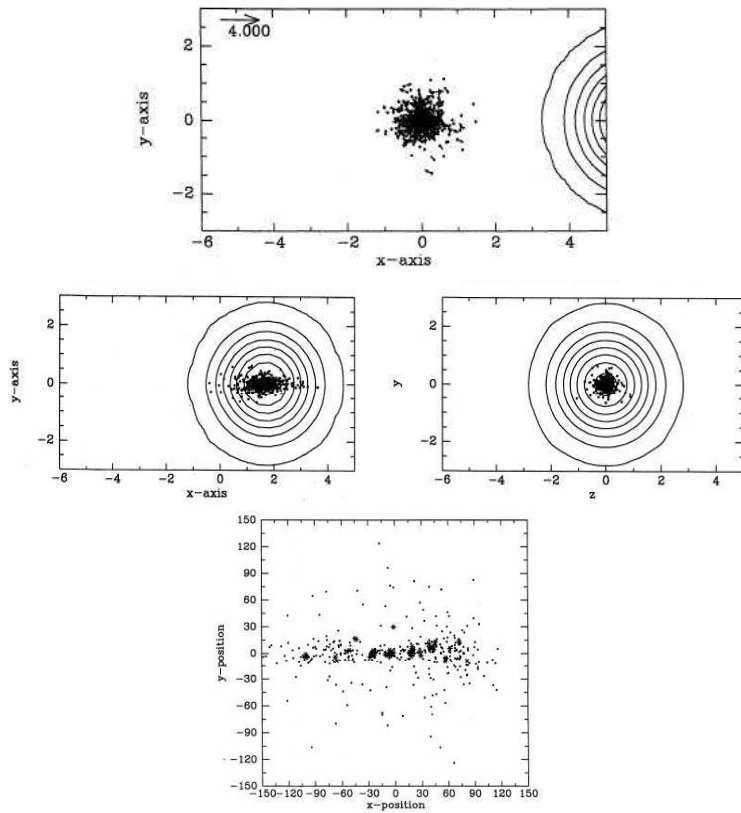


Рис. 27. Взаимодействие скопления с ГМО (Тенс 1992а).

сильно различающимися массами происходит разрушение скопления меньшей массы — до 50% его звезд может быть потеряно.

Авторы проводят сравнение результатов моделирования с наблюдениями звездных скоплений в Магеллановых Облаках. Некоторые из сплюснутых скоплений, наблюдаемых в БМО, могут быть продуктами слияния.

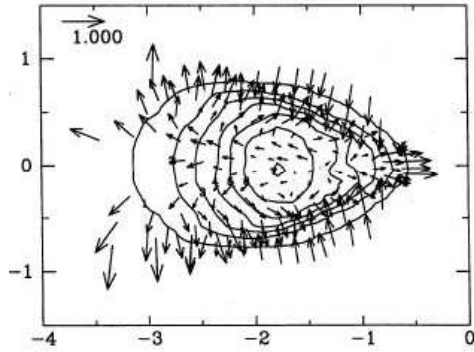


Рис. 28. Распространение ударной волны в диффузном облаке при его взаимодействии со скоплением (Тенс 1992а).

§7. Динамика шаровых скоплений

Шаровые скопления содержат $N \sim 10^4 \div 10^7$ звезд и занимают промежуточное положение между рассеянными скоплениями и карликовыми галактиками по своим размерам и массам. Возраст шаровых скоплений в нашей Галактике составляет $(10 \div 15) \cdot 10^9$ лет, они являются одними из старейших объектов Галактики. Происхождение и динамическая эволюция этих объектов представляют значительный интерес для звездной динамики (см., например, книгу Бинни и Тремейна 1987). Обзор методов и результатов численного моделирования динамики шаровых скоплений можно найти в обзоре Эльсона и др. (1987), а также в книге Арсета (2003).

До последнего времени прямое численное решение задачи $N \sim 10^4 \div 10^6$ тел было невозможно из-за чрезмерно больших затрат вычислительных ресурсов. Поэтому применялись различные упрощения и комбинированные схемы. Один из подходов — попытка экстраполяции результатов моделирования систем $N \sim 10^2 \div 10^3$ тел на случай большего числа тел — был рассмотрен в работе МакМиллана и др. (1990). В то же время авторы замечают, что динамика может качественно измениться при $N \sim 10^4$ (Гудман 1987). Причина этих изменений — ожидаемая неустойчивость гравитермических колебаний при $N \approx 4 \cdot 10^4$ и более. При очень больших N

эта неустойчивость в пределе переходит в обычную гравитермическую катастрофу (см., например, книгу Бинни и Тремейна 1987).

Другой комбинированный подход предложили МакМиллан и Лайтман (1984а, б). Их гибридный метод численного изучения динамики шаровых скоплений состоит в следующем. Динамика ядра скопления, содержащего $N \approx 100 \div 150$ звезд, изучается в рамках обычной задачи N тел. Динамика переходной области от ядра к гало рассматривается в рамках задачи $N_2 \approx 200 \div 300$ гравитирующих сферических бесконечно тонких оболочек. Гало скопления исследуется с помощью численного решения уравнения Фоккера-Планка (детали такого решения изложены, например, в книге Бинни и Тремейна 1987). Предполагается, что внешние части скопления не действуют на ядро радиусом R_N . Если какая-либо из звезд выходит за пределы сферы радиусом R_N , то она превращается в сферическую оболочку той же массы, движущуюся с той же радиальной скоростью, что и звезда. Аналогично происходят и обратные переходы оболочек в звезды, появляющиеся в случайных точках сферы радиусом R_N при движении внутрь.

МакМиллан и Лайтман (1984б) выделяют несколько стадий эволюции скопления:

1. начальный коллапс (останавливается после формирования в ядре тесной двойной);
2. фаза расширения (центральная двойная выбрасывается из ядра после сближения с одиночной звездой за счет отдачи — эффект “гравитационной рогатки”);
3. повторный коллапс (в ядре образуются новые двойные системы).

Начальный коллапс ядра происходит приблизительно гомологично — сохраняется подобие структуры с изменением масштаба.

Более длительная эволюция скопления прослежена в работе МакМиллана (1986). Наблюдается ряд осцилляций ядра скопления. Характерные периоды колебаний равны $\sim 10^5$ лет. Эти колебания связаны с формированием, эволюцией и выбросами тесных двойных в ядре скопления. За время жизни скопления образуется несколько сотен таких двойных. Перечисленные стадии эволюции скопления и осцилляции его ядра иллюстрирует рис. 29 из рабо-

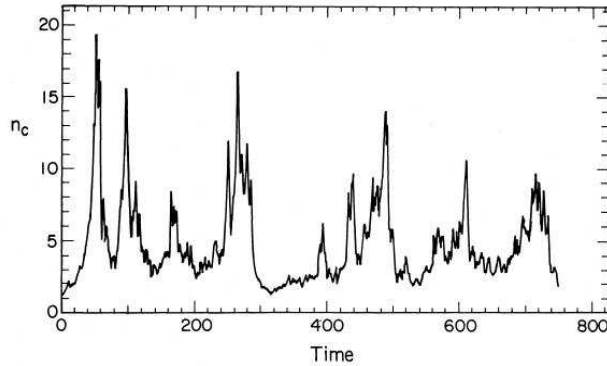


Рис. 29. Зависимость центральной плотности шарового скопления от времени (МакМиллан 1986).

ты МакМиллана (1986). На нем показаны изменения центральной плотности шарового скопления со временем.

В последние годы появились работы по моделированию шаровых скоплений в рамках гравитационной задачи $N \sim 10^5$ тел (Баумгардт и др. 2003а, б). Расчеты выполнены на специализированном компьютере *GRAPE-6* (см. § 16 в Главе I) по программе *NBODY4*, составленной С. Арсетом (см. Арсет 1999). Время интегрирования $13 \cdot 10^9$ лет сравнимо с возрастaми шаровых скоплений в Галактике и М 31. Начальные функции масс звезд в скоплениях выбирались в соответствии с законом Кроуи (2001). Распределение плотности в начальный момент времени соответствует одной из моделей Кинга (1962). Учтено влияние внешнего галактического поля.

Результаты численного моделирования сравниваются с наблюдениями галактического шарового скопления М 15 и одного из наиболее массивных шаровых скоплений в Местной Группе галактик — скопления G 1 в галактике М 31. Рассматриваются профили светимости и дисперсии скоростей скоплений. Результаты наблюдений и численных экспериментов можно согласовать с моделями Кинга. Еще лучше согласие с наблюдениями достигается в том случае, если скопление G 1 является продуктом слияния двух моделей Кинга. Для центральных частей скопления М 15 также имеет место согласие с моделью Кинга.

Еще один интересный вопрос — присутствие в шаровых скоплениях массивных черных дыр. В работах Баумгардта и др. (2003а, б) показано, что не требуется привлекать такие экзотические объекты, чтобы объяснить наблюдаемые профили светимости и дисперсии скоростей в скоплениях М 15 и G 1. В то же время наблюдения не исключают наличия в скоплениях компактных объектов с массами, не превышающими $\sim 10^3$ солнечных масс. Заметим, что в недавней работе Киселева и др. (2008) была получена оценка массы центрального компактного объекта в скоплении М 15 $(1 \div 9) \cdot 10^3 M_{\odot}$ по внутренней кинематике звезд в этом скоплении.

Глава IV

Динамика галактик и систем галактик

§1. Эллиптические галактики

На следующей ступени иерархии после звездных скоплений стоят галактики, объединяющие $N \sim 10^7 \div 10^{12}$ звезд, большое количество газа и, возможно, так называемой темной материи. Моделирование динамики галактик посредством прямого решения гравитационной задачи N тел весьма затруднительно, поскольку оно требует больших затрат вычислительных ресурсов. Поэтому при моделировании динамики галактик прибегают к различным ухищрениям (см., например, § 15 в Главе I). Изложим некоторые результаты, полученные при моделировании галактик.

Начнем с более простых моделей, описывающих динамическую эволюцию эллиптических галактик. Профиль поверхностной яркости эллиптической галактики можно приближенно представить законом де Вокулера (1948)

$$\Sigma(r) = \Sigma_e \cdot e^{-7.67[(r/r_e)^{1/4} - 1]}, \quad (140)$$

где r_e — эффективный радиус, в пределах которого исходит половина потока излучения галактики; Σ_e — поверхностная яркость на расстоянии r_e от центра галактики. В центральных частях эллиптических галактик изофоты — приблизительно окружности. На периферии они могут уплощаться. В некоторых галактиках отношение осей изофот во внешних районах доходит до ≈ 0.5 . В ряде случаев наблюдается искривление (twisting) изофот (см., например, книгу Горбацкого 1986).

Можно предложить, по меньшей мере, два сценария формирования эллиптических галактик:

1. бездиссипативный или диссипативный коллапс протогалактики;
2. слияние двух галактик.

Вторая возможность будет рассмотрена позже (см. § 5 в этой Главе). Остановимся более подробно на первой возможности.

Этим вопросом в рамках гравитационной задачи N тел занимался целый ряд исследователей (см., например, работы Карлберга и др. 1986; Лейка и Карлберга 1988; Агилара и Мерритта 1990; Мерритта и Стиавелли 1990; Мерритта и Квинлана 1998).

Диссипативный коллапс рассматривался в работах Карлберга и др. (1986), а также Лейка и Карлберга (1988). В этих моделях были использованы четыре ключевых параметра:

- отношение массы газа к массе темной материи,
- начальный угловой момент системы,
- начальная дисперсия скоростей темной материи,
- число столкновений, предшествующих эпохе звездообразования (диссипация происходит в результате столкновений частиц, моделирующих газовую составляющую).

Морфологический тип формирующейся галактики зависит от начальной дисперсии скоростей частиц темной материи. Если эта величина меньше, чем 20% от финальной дисперсии скоростей, соответствующей вириальному равновесию гало, то образуется эллиптическая галактика с медленным вращением (“холодный” коллапс). В противном случае формируется дисковая галактика с быстрым вращением (“теплый” коллапс) и близкими к круговым орбитам частиц газовой составляющей. На рис. 30 из работы Лейка и Карлберга (1988) представлен пример эллиптической галактики, образовавшейся в результате “холодного” коллапса. Слева показана проекция галактики на плоскость x - y , справа проекция на плоскость x - z . При этом в начальный момент времени вращение системы происходит вокруг оси z . Рис. 31 из той же работы иллюстрирует образование дисковой галактики.

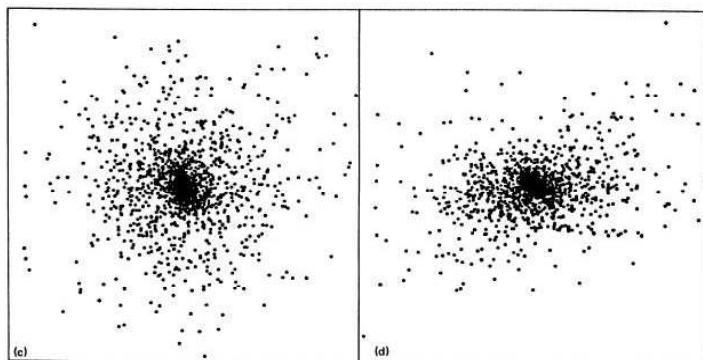


Рис. 30. Образование эллиптической галактики (Лейк и Карлберг 1988).

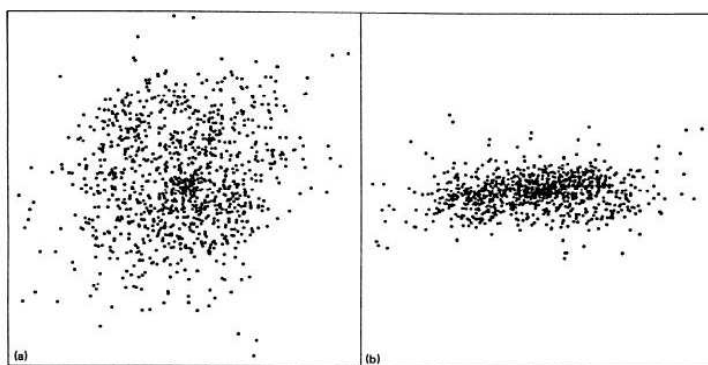


Рис. 31. Образование дисковой галактики (Лейк и Карлберг 1988).

Бездиссипативный коллапс изучался в работе Агилара и Мерритта (1990). Рассмотрен широкий диапазон начальных форм и кинетических энергий системы. Исследовались как твердоотельно вращающиеся, так и невращающиеся модели систем N тел. Основные результаты моделирования можно сформулировать следующим образом:

1. галактика принимает вытянутую или трехосную форму с характерным отношением большой и малой осей $\approx 2 : 1$;

2. профили поверхностной плотности $\Sigma(r)$ согласуются с законом де Вокулера (140);
3. в результате бурной релаксации устанавливается фазовое распределение, зависящее только от двух интегралов (энергии E и площадей J), следующего вида

$$f(E, J^2) = f_* \cdot |E|^{3/2} e^{-\beta E - \alpha J^2}, \quad (141)$$

где α , β , f_* — постоянные параметры;

4. если вокруг эллиптической галактики имеется темное гало, то оно также принимает трехосную форму из-за неустойчивости радиальных орбит.

В работе Мерритта и Квинлана (1998) рассмотрены модели эллиптических галактик с центральными массивными объектами (черными дырами). Отношение M_h/M_g массы черной дыры к массе галактики является одним из параметров задачи. Во всех случаях достигается равновесное состояние с приблизительно сферическим распределением вещества вблизи центра и примерно осесимметричным на периферии. Темп достижения этого состояния зависит от параметра M_h/M_g : при $M_h/M_g > 0.025$ галактика принимает осесимметричную форму за время, немного превышающее среднее время пересечения; при $M_h/M_g < 0.003$ это время превышает $\sim 10^2$ орбитальных периодов. Появление осесимметричных структур при больших отношениях M_h/M_g приводит к ограничению роста массы центральной черной дыры, поскольку ограничивает доступ вещества в ядро галактики.

§2. Диск

Численное моделирование динамики галактических дисков в рамках бесстолкновительной гравитационной задачи N тел было начато еще в 60-е годы XX века (см., например, работы Хокни и Хола 1969, а также Миллера и др. 1970). Особое внимание в этих и последующих работах уделялось проблеме устойчивости диска по отношению к формированию различных крупномасштабных структур, в частности перемишки (бар-моды), спирального узора, изгиба и т.д. В большинстве моделей оказывалось, что для устойчиво-

сти диска необходима либо высокая дисперсия скоростей (горячий диск), либо массивная сферическая составляющая (гало).

Большую дискуссию вызвали оценки критических значений дисперсии скоростей в диске и массы гало, обеспечивающих устойчивость (см., например, обзоры Селлвуда 1999, а также Фридмана и Хоружего 2003).

С другой стороны, диски наблюдаемых галактик холодные. Поэтому для объяснения их устойчивости требуется предположить наличие массивных гало у дисковых галактик. В то же время во многих дисковых галактиках обнаруживаются признаки неустойчивостей — центральные бары, спиральные ветви, изгибы дисков и т.п. Формирование подобных структур может быть связано как с внутренней неустойчивостью диска, так и с внешними возмущениями со стороны соседних галактик (см. § 5 в этой Главе).

Рассмотрим примеры развития различных неустойчивостей в галактических дисках. Одним из распространенных видов неустойчивостей является формирование перемычки (бара) в центральной части дисковой галактики. Изучение формирования и эволюции баров проводилось в ряде работ (см., например, Раутиайнен и др. 2002, Валенсуела и Клышин 2003, Шен и Селлвуд 2004, а также ссылки в этих статьях). Современные модели $N \sim 10^6$ тел позволяют достигнуть разрешения $\sim 20\text{--}40$ пк. В этих экспериментах даже при наличии массивных гало появляются бары, обладающие быстрым вращением, с большими гало появляются, близкими по величине к характерному масштабу длины экспоненциального диска.

Важную роль в вековой эволюции диска и бара играет перенос углового момента между внутренними и внешними частями диска. Образование бара приводит к увеличению характерной длины диска в $\approx 1.2 \div 1.5$ раза. С другой стороны, возрастает масса звездной составляющей вблизи центра галактики (примерно в пределах 2 кпк от центра). На промежуточных масштабах (3–10 кпк) диск доминирует.

Наблюдения показывают, что более 2/3 дисковых галактик обладают перемычками той или иной степени интенсивности. С другой стороны, в центральных частях галактик наблюдается повышенная концентрация вещества (газовые конденсации, сверхмассивные черные дыры, плотные звездные скопления). Представляет интерес рассмотреть взаимодействие бара с центральной концен-

трацией. Такая задача рассматривалась в нескольких работах (см., например, Шен и Селлвуд 2004 и ссылки в ней).

Оказалось, что бары довольно устойчивы по отношению к гравитационному воздействию центральной массы. Для того, чтобы полностью разрушить бар за время, сравнимое с хаббловским, центральная масса должна составлять несколько процентов от полной массы диска. Разрушение бара происходит в два этапа. На первом этапе за счет тесных сближений с центральной массой рассеиваются звезды на низкоэнергетических орбитах, составляющих основу перемычки. На втором этапе происходят вековые изменения глобального потенциала системы, что приводит к дальнейшим изменениям орбит составляющих перемычку звезд. Наблюдаемых в ряде дисковых галактик центральных концентраций газа, звезд и черных дыр, как правило, не достаточно, чтобы разрушить бар за время, сравнимое с хаббловским.

Наряду с бароподобными структурами в галактических дисках возникают другие интересные структуры — двойные бары, спирали вблизи ядра, кольцевые структуры (см., например, работы Раутиайнена и Сало 2000, Раутиайнена и др. 2002, а также ссылки в них). Многие морфологические особенности связаны с петлеобразными орбитами в потенциалах двойных баров. Интересно, что для появления второго бара с быстрым вращением не обязательно присутствие диссипативного компонента.

Кольцевые структуры обычно связаны с резонансами во вращении бара и диска. В отсутствие бара сходные эффекты могут давать резонансы во вращении диска и балджа или диска и спиралей. Внешнее кольцо, как правило, образуется вблизи внешнего линдбладовского резонанса, а внутреннее и ядерное кольца — вблизи внутреннего резонанса 4 : 1 и внутреннего линдбладовского резонанса. Однако могут быть и исключения. Характерные структуры показаны на рис. 32.

В системах с сильными и/или быстро вращающимися барами ядерные и внутренние кольца могут не формироваться. В некоторых SB галактиках с молодыми барами внешнее кольцо еще не могло образоваться. Кольцевые структуры, как и бары, иногда могут иметь форму овалов.

Наряду с перемычками, спиралями и кольцами в дисковых галактиках могут возникать изгибные неустойчивости (см., например, работы Бинни и др. 1998, Идеты и др. 2000, Реваза и Пфен-

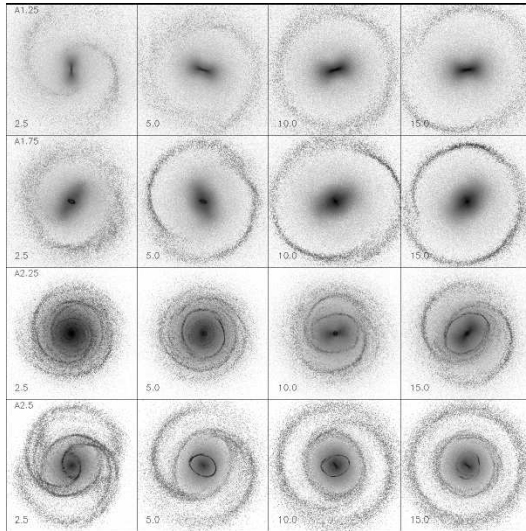


Рис. 32. Характерные примеры эволюции структур, образующихся в моделях дисков, согласно Раутиайнену и Сало (2000).

нигера 2004, а также ссылки в этих статьях). Как правило, изгибы дисков могут быть связаны с прохождением галактик (см. § 5 в данной Главе). Внешние возмущения дают затравку для развития изгибной неустойчивости в диске.

Дальнейшая эволюция изгиба зависит от формы потенциала гало (Идета и др. 2000). В случае сжатого гало происходит постепенное “рассасывание” изгиба. В вытянутом гало изгиб “выживает”, причем линия узлов изгиба становится почти прямолинейной. Примеры эволюции изгибов дисков показаны на рис. 33.

Это различие эволюционного поведения изгиба диска в сжатом и вытянутом гало можно объяснить приливным взаимодействием гало и диска, а также внутренней и внешней частей диска. В случае вытянутого гало в результате происходит саморегуляция прецессии внутренней и внешней частей диска, что препятствует появлению дифференциальной прецессии и, как следствие, разрушению изгиба. В случае сплюснутого гало прецессия внешней части диска отстает от прецессии его внутренней части, что приводит к усилению

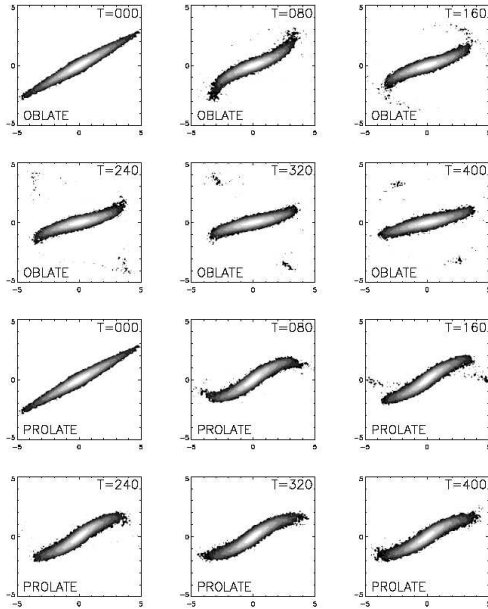


Рис. 33. Примеры эволюции изгибов дисков в сжатом и вытянутом гало, согласно работе Идеты и др. (2000).

различия в скорости прецессии и, в конце концов, к “смазыванию” изгиба.

Взаимодействие гало и диска галактики может приводить к изменению ориентации внешних частей гало по отношению к диску, что, в свою очередь, вызывает изгиб наружных частей диска в форме знака интеграла (Бинни и др. 1998, Джианг и Бинни 1999). В данном случае динамика внешних частей диска отражает динамику “живого” гало. Характерные масштабы изменения наклона диска (в пределах 10°) сравнимы с величинами изгиба, наблюдаемыми в реальных галактиках.

Численное моделирование изгибной неустойчивости в дисках, погруженных в массивное гало, показывает, что возможно формирование S -образных, U -образных и асимметричных изгибов (Реваз и Пфеннигер 2004). S -образные изгибы могут сохраняться в течение нескольких оборотов диска и при этом сохраняют почти пря-

мую линию узлов. В то же время амплитуды изгибов обычно невелики: как правило, наклон изгиба к плоскости симметрии диска не превышает 5° .

Таким образом, в моделированных дисках галактик проявляются различные структуры — перемычки, кольца, изгибы и др. Сходные структуры наблюдаются и в реальных галактиках — эти структуры могут быть вызваны развитием тех или иных гравитационных неустойчивостей. В следующем параграфе мы рассмотрим более подробно еще один вид неустойчивости — формирование спирального узора.

§3. Спиральная структура

Проблемы формирования, эволюции и устойчивости спиральной структуры в дисках галактик давно привлекают внимание специалистов по численному моделированию динамики галактик. Уже в первых работах по моделированию эволюции вращающихся галактических дисков в рамках гравитационной задачи N тел было отмечено образование спиралей (см., например, Миллер и др. 1970, Хол 1971). Пример формирования и эволюции спирального узора показан на рис. 34.

Причиной появления спиральной структуры является дифференциальное вращение диска галактики. В чисто дисковых моделях формирующийся спиральный узор обладает коротким временем жизни, сравнимым с периодом вращения галактики (см. рис. 34).

Для стабилизации спирального узора требуется массивное гало. Этот факт может служить косвенным аргументом в пользу присутствия массивных темных гало у спиральных галактик. Другая возможная причина наличия спиральных рукавов у галактик — повторяемость событий возникновения и “размывания” спирального узора в одной и той же галактике. В большинстве случаев генерируется многорукавная спиральная структура (см., например, Миллер и др. 1970). Спиральный узор может генерироваться спонтанно, а может возбуждаться приливным взаимодействием с соседними галактиками (см. § 5 в этой Главе).

С другой стороны, в некоторых численных моделях N тел формируются долгоживущие спиральные узоры (см., например, Томассон и др. 1990, 1991; Элмегрин и Томассон 1993; Доннер и Томассон 1994). В этих моделях “живой” диск, состоящий из $N \sim 10^4 \div 10^5$

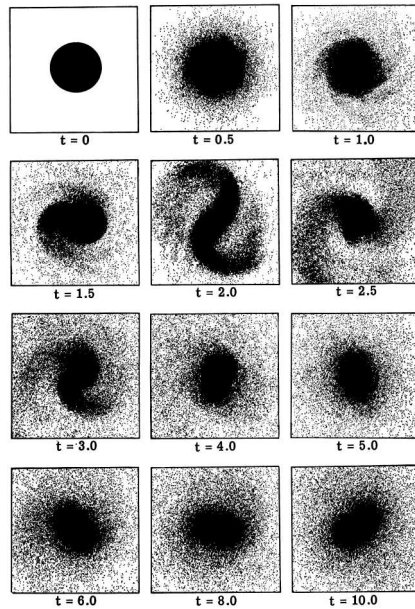


Рис. 34. Пример формирования и эволюции спирального узора в диске (Хол 1971).

тел, эволюционирует в фиксированном сферически симметричном поле гало и балджа. В начальный момент времени частицы диска образуют две популяции:

1. бесстолкновительная звездная составляющая, содержащая 80% частиц и имеющая сравнительно высокую дисперсию остаточных скоростей (стандарт $\sigma \approx 50$ км/с);
2. столкновительная газовая среда, содержащая 20% частиц диска (молекулярных облаков) с низкой дисперсией скоростей.

Между частицами диска, представляющими газовую подсистему, могут происходить неупругие столкновения и слияния.

Разогрев газового диска за счет возмущений со стороны формирующейся спиральной структуры и вязкости компенсируется охлаждением за счет неупругих столкновений облаков в спиральных

ветвях. В результате дисперсия скоростей в газовом диске становится практически независимой от радиуса и для ансамбля облаков величина $\sigma \approx 3$ км/с в согласии с наблюдениями межзвездной среды нашей Галактики.

Дисперсия скоростей звездной составляющей резко возрастает с удалением от центра диска, достигает максимума ($\sigma_{max} \approx 50 - 70$ км/с) и затем убывает приблизительно линейно.

Отметим, что для звездной составляющей в большей части диска примерно постоянен параметр устойчивости Тумре (1964)

$$Q = \frac{\kappa \sigma_r}{3.36 G \mu}, \quad (142)$$

где κ — эпициклическая частота, σ_r^2 — дисперсия радиальных скоростей, μ — полная поверхностная плотность диска.

В зависимости от значения Q формируется тот или иной тип спиральной структуры. При $Q \geq 2$ образуются клочковатые (flocculent) спирали, при $Q < 2$ — отчетливые (grand design) двухрукавные или многорукавные узоры. С уменьшением Q усиливается гравитационное влияние спиралей на звездную и газовую составляющие диска. Если величина $Q \geq 2.5$, спирали в звездной составляющей не образуются вовсе (Элмегрин и Томассон 1993).

Спиральная структура формируется и в звездном, и в газовом дисках. Она может существовать длительное время (по крайней мере, в течение нескольких оборотов диска), причем нередки случаи, когда спирали “размываются”, а затем образуются вновь.

Важную роль в формировании и эволюции спирального узора играют резонансы (см., например, работу Патсиса и Кауфманна 1999 и ссылки в ней). В частности, двухрукавная спиральная структура, как правило, “размывается” снаружи за пределами резонанса 4 : 1, хотя в некоторых случаях спирали могут простираться и за пределы этого резонанса. Иногда наблюдается более одной доминирующей моды в спиральном узоре. В этих случаях разные моды располагаются на разных интервалах галактоцентрических расстояний. Тогда каждой моде соответствует своя система резонансов.

§4. Устойчивость

В рамках гравитационной задачи N тел проводятся исследования устойчивости как теоретических моделей галактик, так и от-

дельных реальных галактик. Такие работы выполнялись для эллиптических и дисковых галактик. Некоторые вопросы, связанные с устойчивостью моделей галактик, затронуты в обзоре Пфеннигера (1998). Ранее в §§ 2 и 3 уже обсуждались вопросы устойчивости дисковых галактик по отношению к формированию перемычек и спирального узора.

Численные эксперименты в рамках задачи N тел использовались также для анализа устойчивости сферических систем (см., например, работы Мерритта и Агилара 1985; Мерритта 1985; Дейонге и Мерритта 1988; Месы и Саморано 1997; Месы 2002). В частности, Мерритт и Агилар (1985) исследовали устойчивость сферических систем с чисто радиальными орбитами. Они рассмотрели коллапс системы с профилем плотности $\rho(R) \propto R^{-1}$. Оказалось, что устойчивость такой системы по отношению к образованию бара зависит от начального значения вириального отношения $k_0 = T_{rnd}/|U|$, где T_{rnd} — кинетическая энергия случайных движений, U — потенциальная энергия системы. При $k_0 < 0.05$ галактика приобретает вытянутую форму, характерную для перемычек в дисковых галактиках. При больших значениях k_0 система сохраняет приблизительно сферическую форму.

Интересно отметить, что построенная Ньютоном и Бинни (1984) сферическая модель гигантской эллиптической галактики М 87, имеющей форму круга в проекции на картинную плоскость, неустойчива по отношению к формированию бара в центральной части (см. Мерритт 1987). Таким образом, можно было бы ожидать наличие трехосных структур в центральной части М 87. В то же время наблюдения показывают, что изофоты в этой галактике — почти окружности. Это противоречие удается снять, если предположить, что в центре М 87 находится массивный объект (например, черная дыра), который рассеивает звезды и устанавливает приблизительно сферическое распределение поверхностной яркости в этой галактике.

По-видимому, только неустойчивость радиальных движений играет существенную роль в реалистичных моделях сферически симметричных галактик (Дейонге и Мерритт 1988). Эти авторы исследовали устойчивость по отношению к радиальным и нерадиальным возмущениям ряда сферических моделей Пламмера. Показано, что модели с орбитами, близкими к круговым, по-видимому, устойчи-

вы по отношению к формированию бара. В то же время модели с преобладанием радиальных движений могут быть неустойчивы.

Устойчивость ряда реалистичных моделей невращающихся и вращающихся сферических систем изучена в работах Месы и Саморано (1997) и Месы (2002). Для невращающихся систем определена граница устойчивости

$$\frac{2T_r}{T_t} = 2.31 \pm 0.27, \quad (143)$$

где T_r и T_t — кинетические энергии радиальных и трансверсальных движений. Системы с бóльшим отношением неустойчивы. Вращающиеся модели с изотропным распределением скоростей и реалистичными профилями плотности устойчивы по отношению к радиальным и нерадиальным возмущениям. При этом вращение может быть довольно быстрым, а система сохраняет форму, близкую к сферической.

В нескольких работах (см., например, Бертин и Стиавелли 1989; Мерритт и Стиавелли 1990; Стиавелли и Спарк 1991) исследовалась устойчивость сплюснутых моделей E галактик. Устойчивость таких невращающихся моделей достигается в определенном интервале анизотропии скоростей (отношения стандарта радиальных скоростей к круговой скорости). Интервал устойчивости зависит от сжатия модели. С увеличением сплюснутости модели он уменьшается. Например, для галактик типа E5 это отношение должно быть в интервале $\approx (1/4 \div 1/3)$. Галактики типа E6 (отношение осей $\approx 2 : 5$) и более сжатые становятся неустойчивы. Они расщепляются в тонкие искривленные цилиндры на временах, сравнимых с временем пересечения.

Стиавелли и Спарк (1991) исследовали влияние массивного гало из темной материи на устойчивость E галактик. Рассматривались гало как с фиксированным потенциалом, так и состоящие из “живых” частиц с изотропным распределением скоростей. Оказалось, что присутствие гало слабо сказывается на устойчивости системы по отношению к формированию бара. Такого рода неустойчивость может значительно уменьшить плотность вещества в центральной части галактики.

Условия устойчивости эллиптических галактик связаны с характеристиками (толщина и ориентация) так называемой фундаментальной плоскости в пространстве параметров: эффективный

радиус – светимость – центральная дисперсия скоростей для E галактик (см., например, Нипоти и др. 2002). Толщина фундаментальной плоскости определяется условиями устойчивости. Галактики со слишком большой дисперсией радиальных скоростей теряют устойчивость и покидают фундаментальную плоскость.

В сильно сплюснутых E галактиках, как и в галактических дисках, при определенных условиях могут развиваться изгибные (bending) неустойчивости (см., например, Мерритт и Селлвуд 1994; Джессон и др. 1997). Такого рода неустойчивости приводят к утолщению диска или сжатию сфероида. В работе Джессона и др. (1997) показано, что сплюснутые эллиптические галактики, более сжатые, чем галактики типа E7, являются неустойчивыми по отношению к изгибу сфероида. В результате эволюции они приобретают форму седла или S-образную форму. В сильно сплюснутых системах с быстрым вращением наряду с формированием изгиба может возникнуть центральная перемычка. В дальнейшем седло или S-форма размывается и образуется структура с изоботами в форме ящика или земляного ореха. Развитие неустойчивости происходит в течение $\approx 7 \tau$ (τ — время пересечения) и заканчивается за времена $\sim (10 \div 20) \tau$. Таким образом, отсутствие эллиптических галактик, более сжатых, чем E7, вероятно, обусловлено действием изгибной неустойчивости.

Подробное исследование изгибной неустойчивости галактических дисков проведено Сотниковой и Родионовым (2003, см. также ссылки в этой статье). Отметим три механизма разогрева диска в вертикальном направлении: изгибная неустойчивость всего диска, изгибная неустойчивость бара и разогрев на неоднородностях в распределении вещества по вертикали. Масштаб возмущений оказывается больше характерных масштабов изменения плотности в диске галактики, то есть все моды являются глобальными. С уменьшением отношения масс гало и диска возрастает уровень насыщения неустойчивости и отношение дисперсий скоростей в вертикальном σ_z^2 и радиальном σ_R^2 направлениях. Этот результат численного моделирования согласуется с наблюдениями спиральных галактик, которые показывают, что в галактиках ранних типов в среднем меньше отношение масс темного и светящегося вещества и больше отношение σ_z/σ_R , чем в галактиках поздних типов (см., например, Шапиро и др. 2003).

Исследования глобальной устойчивости дисковых галактик про-

водились многими авторами (см., например, работы Острайкера и Пиблса 1973; Селлвуда 1985; Селлвуда и Афанассолы 1986; Левина и Спарк 1994, 1998). Острайкер и Пиблс (1973) на основе численных моделей $N = 150 \div 500$ тел получили эмпирический критерий устойчивости дисковой галактики по отношению к формированию бара. Для устойчивости необходимо, чтобы отношение кинетической энергии вращения диска к полной гравитационной энергии было больше, чем 0.14 ± 0.02 . Присутствие темного гало способствует стабилизации диска.

Селлвуд (1985) исследовал устойчивость модели нашей Галактики (Бакалл и др. 1982). Он показал, что в модели развивается двухрукавная спиральная структура, однако модель устойчива по отношению к формированию бара. Эти свойства модели определяются, главным образом, центральным балджем. Гало играет меньшую роль в формировании бара, однако именно оно определяет форму спирального узора. Следует заметить, что бар в нашей Галактике был обнаружен (см., например, Биссанс и Герхард 2002).

В работе Селлвуда и Афанассолы (1986) предложен метод определения собственных частот и форм глобальных неустойчивых мод в численных моделях дисковых галактик.

Глобальная устойчивость “совершенных (perfect) эллиптических дисков” была исследована в работах Левина и Спарк (1994, 1998). Функция распределения модели зависит от двух изолирующих интегралов — энергии и углового момента. Начальные условия выбираются так, что частицы размещаются на орбитах равномерно в переменных действие-угол. Обнаружен интервал значений отношения полуосей эллипсов $0.305 \leq b/a \leq 0.570$, в котором диски устойчивы. При меньших отношениях b/a (близкие к круговым модели) диски становятся более вытянутыми — поведение напоминает эволюцию неустойчивых сферических систем с орбитами, близкими к радиальным. Сильно эксцентричные системы проявляют изгибающую неустойчивость. В результате системы становятся более округлыми.

Во многих галактиках присутствуют центральные компактные объекты (например, черные дыры), которые могут повлиять на устойчивость диска. Исследование устойчивости карликовой E галактики M 32 (спутника галактики M 31) с центральным объектом массой $\sim 3 \cdot 10^6$ масс Солнца было проведено в работе ван ден Марела и др. (1997). Оказалось, что присутствие центрального массив-

ного объекта обеспечивает устойчивость галактики по отношению к формированию бара.

§5. Сближения и слияния галактик

Большинство галактик входит в системы различной кратности — пары, группы и скопления (см., например, монографию Горбацкого 1986). Расстояния между галактиками в этих системах сравнимы с их размерами, поэтому взаимодействие между галактиками существенно влияет на их внутреннюю структуру и кинематику.

Рассмотрим вначале взаимодействие двух галактик. Массы галактик могут быть сравнимы, или одна из галактик может быть существенно массивнее другой (взаимодействие гигантской галактики с галактикой-спутником).

При сближении галактик основную роль играют два эффекта: приливное взаимодействие и динамическое трение (см., например, работы Виллумсена 1982, 1983). Оба эти эффекта приводят к торможению орбитального движения, сближению компонентов по спиралевидным орбитам и слиянию. Периферийные частицы образуют приливные “хвосты”, волочащиеся за галактиками. После слияния эти “хвосты” разрушаются и формируют гало продукта слияния. При лобовых столкновениях слияние происходит после нескольких проходов ядер галактик сквозь друг друга. В результате формируется вытянутая бароподобная структура, которая затем постепенно “размывается”. Продукты слияния имеют профили пространственной плотности, близкие к хаббловскому $\rho(r) \propto r^{-3}$, и одновершинные кривые вращения. При малых орбитальных моментах сливающихся галактик продукты слияния имеют вытянутую форму, а при больших — сплюснутую, причем малая ось ориентирована приблизительно вдоль вектора орбитального момента.

При слиянии галактик с различными массами ситуация может отличаться от случая одинаковых масс, поскольку пропадает симметрия (см., например, Виллумсен 1983, Веласкес и Уайт 1999, Бурно и др. 2004). Результат зависит от морфологии галактик и отношения масс. Если сближающиеся галактики имеют отношение масс 3 : 1 и менее, то продукт слияния имеет эллипсоидальную форму с профилем плотности, соответствующим хаббловскому или изотермическому ($\rho(r) \propto r^{-2}$) закону (Виллумсен 1983). По сравнению

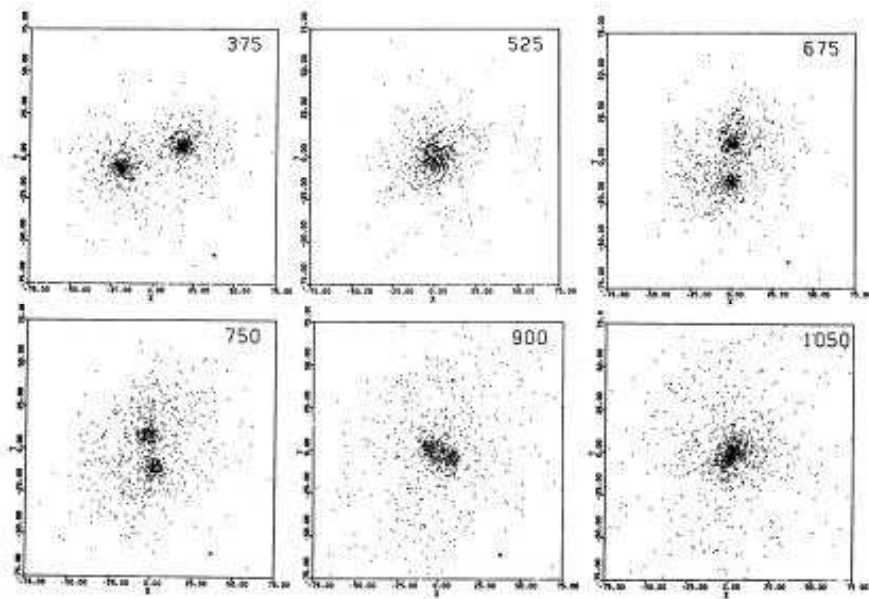


Рис. 35. Слияние галактик равных масс (Виллумсен 1982).

со случаем равных масс продукт слияния имеет менее протяженное гало и форму, более близкую к сферически симметричной. На рис. 35 и 36 приведены результаты моделирования слияний галактик из работы Виллумсена (1982). Рис. 35 иллюстрирует слияние галактик одинаковых масс. На рис. 36 отношение масс галактик составляет 2 : 1.

Погружение (*sinking*) карликовой галактики внутрь гигантской дисковой галактики (отношение масс 10 : 1 и более) приводит к разогреву и утолщению диска гигантской галактики (Веласкес и Уайт 1999). Отклик диска зависит от движения спутника по отношению к вращению диска. Если орбитальное движение спутника направлено так же, как и вращение диска (прямые движения), то происходит разогрев диска. В случае обратного движения диск сохраняется, но может изменить наклон как целое. Массивный балдж стабилизирует диск и уменьшает степень разогрева и наклона. Рис. 37 из работы (Веласкес и Уайт 1999) иллюстрирует влияние

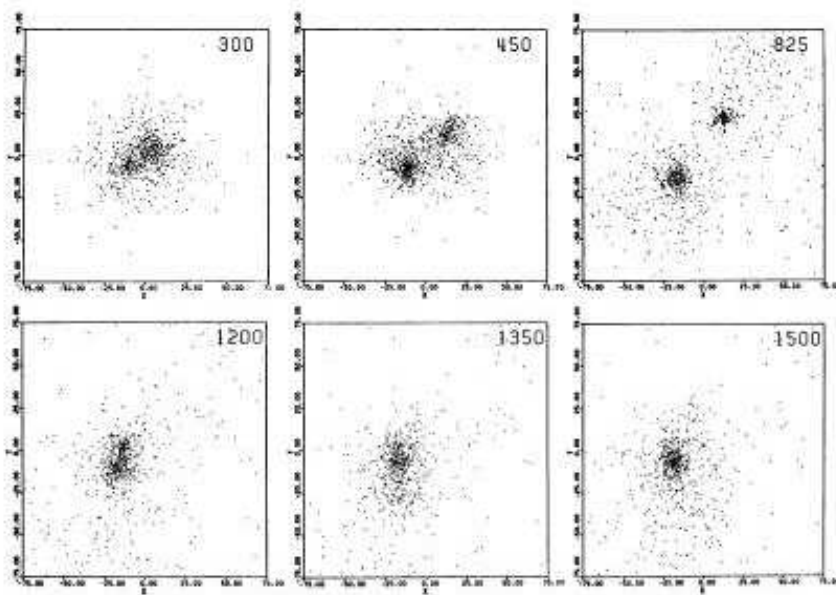


Рис. 36. Слияние галактик с отношением масс 2 : 1 (Виллумсен 1982).

погружения карликовой галактики на глобальную структуру гигантской галактики. В этой модели диск гигантской галактики вращается в направлении обращения спутника. Из рисунка видно, что взаимодействие с карликовой галактикой приводит к деформации и утолщению диска. К моменту времени $t = 252$ единиц времени карликовая галактика была практически полностью разрушена.

При промежуточных отношениях масс в диапазоне от 4 : 1 до 10 : 1 слияния могут приводить к формированию систем с весьма специфическими свойствами (Бурно и др. 2004). По своей структуре продукт слияния напоминает дисковую галактику с экспоненциальным профилем плотности, а по кинематике — эллиптическую галактику. Подобные объекты найдены и среди наблюдаемых галактик — вероятных продуктов слияния (см., например, Джог и Читр 2002).

Погружение спутника внутрь эллиптической галактики приводит к формированию системы оболочек вокруг галактики в резуль-

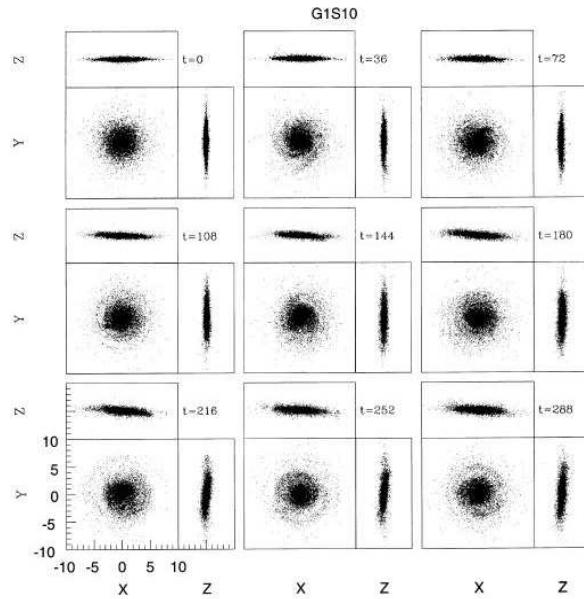


Рис. 37. Эволюция гигантской дисковой галактики в процессе погружения в нее карликовой галактики (Веласкес и Уайт 1999).

тате полного или частичного разрушения спутника (Сегин и Дюпра 1996).

Для эллиптических галактик представляет интерес проверить, как слияния могут повлиять на положение продукта слияния относительно фундаментальной плоскости в пространстве параметров: эффективный радиус – светимость – центральная дисперсия скоростей (см., например, Дьёрговский и Дэвис 1987). Этот вопрос рассматривали, в частности, Евстигнеева и др. (2002), а также Гонсалес-Гарсия и ван Альбада (2003а, б). Значительные изменения глобальных параметров системы происходят в течение сравнительно короткого промежутка времени ($\sim 10^7 \div 10^8$ лет) непосредственно перед окончательным слиянием (Евстигнеева и др. 2002). Оказалось, что продукты слияния лежат практически на той же фундаментальной плоскости, что и галактики — участники процесса слияния, причем повторные слияния самих продуктов слияний также не ме-

няют ситуации (Гонсалес-Гарсия и ван Альбада 2003б). Значимый “видимый” разброс относительно фундаментальной плоскости может быть обусловлен эффектами проекции.

При слияниях часть вещества галактик может быть потеряна (см., например, оценки в работе Верне и Муссио 1995). Потеря массы больше (доходит до 20%) в случае сближения и слияния галактик сравнимых масс. Главным образом, теряется вещество с периферии галактик. Продукты слияния, как правило, имеют более протяженные гало, чем галактики-предшественники, с более пологими профилями плотности.

Наблюдения показывают, что эллиптические галактики могут содержать центральные сверхмассивные черные дыры (см., например, Бегельман и др. 1980). Поэтому представляет интерес рассмотреть процесс слияния галактик с центральными массивными компактными объектами (см., например, Макино 1997 и ссылки в этой работе). За счет динамического трения и гравитационного излучения черные дыры образуют двойную систему в центральной части продукта слияния. Распределение плотности окружающих двойную черную дыру частиц имеет центральный пик с профилем $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$ с $\alpha \in (0.5, 1)$. При повторных слияниях могут формироваться системы, содержащие в ядрах кратные черные дыры. Динамическая эволюция таких систем может приводить к выбросам массивных объектов из ядер галактик, что является одним из проявлений галактической активности. Косвенным указанием на такой механизм активности может служить обнаружение квазаров на некотором удалении от ядер родительских галактик (см., например, Бакалл и др. 1995).

Кратные слияния галактик могут происходить как последовательно, так и одновременно (например, в пределах компактной группы галактик). Лима-Нето и Комб (1995) рассмотрели структуру продуктов слияния двух дисковых галактик и для сравнения 15 галактик равных масс (“каннибализм” галактик). Продукт слияния двух галактик может в проекции на картинную плоскость иметь изофоты в форме ящичков. С другой стороны, галактика-каннибал, являющаяся продуктом слияния многих галактик, имеет изофоты нерегулярной формы. В то же время изофоты ящичкообразного вида не являются прерогативой продуктов слияния. Как показано в той же работе Лима-Нето и Комб (1995), галактики, формирующиеся

путем бездиссипативного коллапса, даже чаще имеют ящикообразные изофоты, чем продукты слияния галактик.

На форму изофот галактики влияет ориентация галактики по отношению к лучу зрения. Для изучения этого эффекта проекции Хейл и др. (1994) рассматривали продукты слияния галактик разных типов под различными углами. Оказалось, что разнообразие форм изофот модельных продуктов слияния примерно соответствует наблюдаемому многообразию форм для реальных галактик. Среди модельных и наблюдаемых изофот встречаются как дискообразные, так и ящикообразные. Сжатия изофот варьируются от $E0$ до $E7$.

Слияния галактик являются финальной стадией их взаимодействия. Они, как и сближения галактик без слияния, могут приводить к различным своеобразным изменениям морфологии галактик. Одно из таких изменений — формирование кольцевых структур (см., например, работы Мадзея и др. 1995, Бурно и Комб 2003). Морфологические особенности кольцевых структур хорошо воспроизводятся при лобовом столкновении дисковой и сферической галактик. Структура кольца зависит от относительной скорости галактик. Если эта скорость не превышает параболическую, то кольцевая структура временная, эволюция системы завершается слиянием галактик. В качестве примера такого взаимодействия Мадзей и др. (1995) приводят галактику $VV\ 32$. Более быстрые столкновения приводят к формированию пустых колец (типа $VV\ 787$).

Для галактик с полярными кольцами можно предложить два сценария формирования колец: 1) слияние галактик; 2) приливная аккреция вещества с соседней галактики. Бурно и Комб (2003) моделируют оба эти сценария формирования колец с учетом динамики газа и звездообразования и приходят к выводу, что сценарий аккреции более вероятен и лучше согласуется с данными наблюдений.

Приливные взаимодействия между галактиками приводят к формированию разнообразных, порой причудливых, структур у галактик (см., например, работы Герхарда 1981, Ногучи 1987, Томассона и др. 1989). Образуются приливные “хвосты”, “мосты” между галактиками, спиральные ветви (в частности, лидирующие спирали), бароподобные структуры. Эти структуры могут быть временными — через некоторое время после прохождения они “размываются”. Рис. 38 из работы (Ногучи 1987) иллюстрирует прилив-

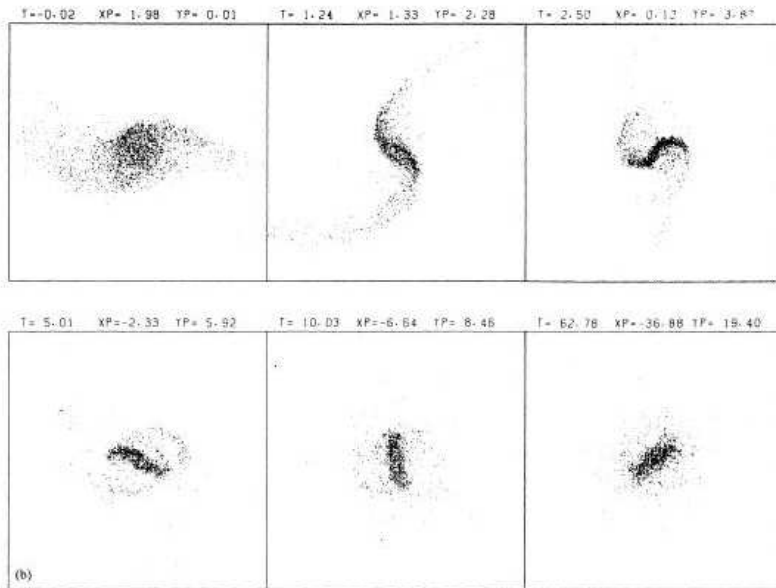


Рис. 38. Приливная деформация галактики (Ногучи 1987).

ную деформацию галактики под действием пролетающего объекта точечной массы.

В некоторых работах авторы моделируют динамику конкретных наблюдаемых взаимодействующих галактик: системы Галактика-БМО-ММО (Гардинер и Ногучи 1996); *NGC 3395/6* (Клеменс и др. 1999); *M 51* (Сало и Лаурикайнен 2000а, б). Авторы пытаются подобрать начальные условия таким образом, чтобы воспроизвести особенности структуры галактик, принимающих участие во взаимодействии.

Гардинер и Ногучи (1996) рассматривают эволюцию ММО с учетом внешних полей Галактики и БМО. Наилучшая подобранная авторами модель воспроизводит структуру и кинематику Магелланова Потока как приливного “пера”, которое образовалось примерно $1.5 \cdot 10^9$ лет назад в результате тесного тройного сближения Галактики, БМО и ММО. Одновременно образовалась лидирующая спиральная ветвь на противоположной стороне ММО. Тесное двойное

сближение МО примерно $0.2 \cdot 10^9$ лет назад привело к образованию еще одного приливного хвоста и моста между этими галактиками. В ММО образуется перемычка, вытянутая вдоль луча зрения относительно наблюдателя. В то же время некоторые черты структуры и кинематики ММО (в особенности, связанные с газом и молодыми звездами) не удается воспроизвести в рамках использованной авторами модели.

В тесной системе взаимодействующих галактик *NGC 3395/6* происходит сближение компонентов, которое началось $\sim 5 \cdot 10^7$ лет назад. Наблюдающиеся вспышки звездообразования в галактиках, возможно, инициированы этим сближением. Некоторые сгущения газа в приливном хвосте могут в будущем сформировать карликовые галактики.

В тесной двойной системе галактик *M 51 (NGC 5194/5)* могут иметь место два варианта эволюции: 1) одиночное сближение галактик по близкой к параболической орбите; 2) несколько проходов спутника через плоскость диска главной галактики. Оба варианта могут объяснить наблюдаемую структуру и кинематику системы.

§6. Группы галактик

Следующими по кратности системами после пар галактик являются малые группы. Примерно половина всех галактик входит в состав групп, содержащих от 3 до 20 членов (см., например, Талли 1987).

При моделировании динамической эволюции групп галактик возможны два подхода (см., например, обзор Киселевой и Орлова 1993 и ссылки в нем): 1) самосогласованный (*self-consistent*), когда каждая галактика представляется как система N тел; 2) явный физический (*explicit-physics*), когда каждый член группы представляется как одиночное протяженное тело, а дополнительные эффекты (динамическое трение, слияния галактик, приливное обдирание и т.п.) задаются с помощью различных аналитических аппроксимаций (см., например, Мамон 1987). Эти два подхода дополняют друг друга. Первый подход позволяет строить более реалистичные модели групп, но не дает возможности рассмотреть большое число вариантов начальных условий. Вторым способом можно исследовать зависимость динамической эволюции групп от их начальных

характеристик, используя при этом результаты самосогласованного моделирования.

Один из важных результатов численных экспериментов состоит в том, что компоненты групп, как правило, сливаются в единый объект (см., например, Барнис 1986, Киселева и Орлов 1993, Беуд и др. 1993, Говернато и др. 1996) за время порядка нескольких времен пересечения группы. С другой стороны, в некоторых численных экспериментах темп слияния галактик не столь высок (см., например, Асевес 2001, Асевес и Веласкес 2002). Оставшиеся члены первоначально широкой группы могут формировать более компактные системы, по своим свойствам напоминающие компактные группы галактик Хиксона (1982). Такие группы формировались примерно в 10% случаев. На протяжении $\approx 10 \cdot 10^9$ лет “выжило” около 40% групп.

Другой существенный результат численного моделирования динамики групп галактик — оценки динамических параметров групп, в частности, их масс, характерных размеров и дисперсий скоростей (см., например, Джуричин и др. 1984, Хейслер и др. 1985) в зависимости от времени. Результаты сопоставляются с параметрами наблюдаемых групп галактик различной степени компактности. При этом необходимо учесть эффекты проекции, поскольку из наблюдений можно определить только конфигурацию группы на небесной сфере и лучевые скорости компонентов. Одна из задач подобных исследований — поиск параметров, наименее чувствительных к эффекту проекции. Численное моделирование используется для решения этой задачи. Ситуация усугубляется тем, что группы галактик в ходе эволюции принимают различные формы и различные динамические состояния. Для одной и той же группы, наблюдаемой вдоль разных “лучей зрения”, динамические оценки массы могут различаться более, чем на три порядка величины (см., например, Аносова и др. 1991).

Поэтому представляет интерес оценивать динамические характеристики не отдельных групп галактик, а их ансамблей (см., например, Аносова и др. 1992). Среди представительного набора модельных каталогов групп выбираются те, которые лучше других воспроизводят характеристики выборки наблюдаемых групп (например, медианы среднего проективного размера и среднеквадратичной лучевой скорости компонентов). Такой подход, примененный к выборке 46 вероятно физических триплетов галактик из ка-

талога Караченцева и др. (1989), показал, что в триплетах галактик должна быть значительная скрытая масса (hidden mass) (Аносова и др. 1992). В пределах триплета она примерно в 5 раз превышает сумму масс компонентов.

Самосогласованные численные эксперименты Асевеса (2001) показывают, что динамические массы триплетов могут недооцениваться. С другой стороны, не обязательно наличие общего темного гало группы для объяснения динамических и конфигурационных свойств наблюдаемых триплетов галактик. Хотя исключить присутствие гало также не удастся. Особенно высокое отношение масса-светимости (≈ 250 солнечных единиц) получается для компактных групп Хиксона. Эта величина согласуется с оценками для скоплений галактик. Таким образом, в компактных группах и скоплениях галактик может быть примерно одинаковое отношение масс светящейся и темной материи.

В последние годы появилась новая космологическая модель, в которую наряду с темной и барионной материей включается расталкивающая галактики субстанция — вакуум (см., например, обзор Чернина 2001). Эта субстанция в значительной степени определяет динамику систем галактик на масштабах ~ 1 Мпк и более. Такие масштабы характерны для широких (loose) групп галактик и их близкого окружения. Наличие вакуума с отрицательным давлением может объяснить распределение лучевых скоростей галактик в окружении Местной Группы и других близких широких групп галактик (см., например, работу Минца и Орлова 2004).

§7. Изолированные скопления галактик

Следующие по кратности после малых групп галактик системы — скопления и сверхскопления галактик. Они содержат $N \sim 10^2 \div 10^3$ членов и имеют характерные размеры $\sim 1 \div 10$ Мпк (см., например, книгу Горбацкого 1986). При численном моделировании динамики скоплений галактик следует учитывать космологическое расширение, темную материю (dark matter) и темную энергию-вакуум (dark energy) (так называемые Λ CDM-модели).

В ранних работах (см., например, Арсет 1963, 1966; ссылки в книге Арсета 2003) каждая галактика представлялась как сфера Пламмера. Тогда уравнения движения галактик имеют вид (2) с добавками, ответственными за влияние темной материи (внешнее

поле) и темной энергии (“расталкивание” галактик). В работах второй половины XX века, как правило, учитывалось только космологическое расширение, а темная материя размещалась в гало галактик или в пределах всего скопления. В дальнейшем появились работы, где каждая галактика представлена как система N тел (см., например, Беуд и др. 1994, Лима-Нето и Байер 1997).

Динамическая эволюция моделированных скоплений галактик в общих чертах напоминает эволюцию звездных скоплений.

Сближения галактик носят неупругий характер, в отличие от сближений звезд, и слияния галактик в скоплениях происходят существенно чаще, чем слияния звезд в звездных скоплениях (если в качестве единицы времени использовать среднее время пересечения). Экстремальной формой слияния галактик в скоплениях является “каннибализм”, когда формируется массивная центральная галактика-“каннибал”, пожирающая падающие на нее (в потенциальную яму) менее массивные галактики скопления. Такие объекты с кратными ядрами (так называемые cD галактики) наблюдаются во многих скоплениях галактик.

Выпадение галактик к центру скопления происходит как за счет их гравитационного взаимодействия друг с другом, так и в результате динамического трения о темную материю, распределенную в пределах скопления. При тесных сближениях галактик происходит приливное “обдирание” их внешних частей, в том числе и темных гало, окружающих светящееся вещество галактик. Приливное обдирание и слияния галактик конкурируют между собой. Первый процесс удаляет вещество из галактик, а второй приводит к формированию более массивных объектов. Продукты слияния галактик поглощают значительную энергию, что приводит к общему расширению скопления. Скопление может даже стать несвязанным — его полная энергия становится положительной, и некоторые галактики покидают скопление (см., например, Аллен и Ябушита 1985).

Во многих скоплениях галактик наблюдаются субструктуры (см., например, Байер и др. 1996). Формирование подсистем в скоплениях галактик может быть связано со сближениями и слияниями двух или нескольких скоплений. Моделирование этого процесса проводилось, например, в работах Лима-Нето и Байера (1997), Ройттигера и др. (1997), Лайне и др. (2004). Как правило, в продукте слияния образуется cD галактика, причем ее положение обычно не совпадает с положением наиболее глубокой потенциальной

ямы. Эта галактика совершает колебательные движения в окрестности центра масс скопления – продукта слияния (Лима-Нето и Байер 1997). Сами скопления – продукты слияния вытянуты вдоль направления сближения компонентов. Распределение скоростей галактик, темной материи и газовой составляющей в пределах продукта слияния анизотропно (Ройттигер и др. 1997). Распределение газа не вполне отслеживает распределение темной материи в скоплении — газ образует более вытянутые структуры, чем темная материя. Анизотропия в распределениях положений и скоростей галактик сохраняется в течение $\sim 5 \cdot 10^9$ лет после слияния скоплений.

Для отдельных скоплений галактик (например, для богатого скопления *Coma*) можно подобрать начальные условия сближения двух скоплений, которые дают в результате распределения поверхностной плотности и лучевых скоростей галактик, согласующиеся с наблюдениями (Лайне и др. 2004). Использование теоремы вириала для оценки массы скопления дает величину, завышенную примерно в 3 раза. Внесение соответствующей поправки дает величину отношения масса-светимость, равную примерно 100 солнечных единиц, что согласуется с данными рентгеновских наблюдений.

Следует отметить, что субструктура в скоплениях галактик не обязательно связана со слиянием скоплений. Она может формироваться и в изолированных скоплениях, хотя и не столь сильно выражена (см., например, Лима-Нето и Байер 1997).

§8. Скопления и сверхскопления галактик как фрагменты крупномасштабной структуры

Представляет интерес проблема формирования скоплений и сверхскоплений галактик. Можно предположить, что эти структуры образуются как фрагменты общей крупномасштабной структуры Вселенной. Обычно изучаются свойства областей повышенной плотности вещества в космологических моделях N тел, и эти свойства (профили плотности, особенности структуры и распределения скоростей) сравниваются с характеристиками наблюдаемых скоплений и сверхскоплений галактик (см., например, Вест и др. 1987, Наварро и др. 1996, Буот и Ксю 1997, Граманн и Сухоненко 2002, Рид и др. 2005, а также ссылки в этих статьях).

Одной из важных характеристик скопления галактик является профиль плотности. В работе Наварро и др. (1996) было показано, что в рамках стандартной CDM -модели (космологическая модель с холодной темной материей) реализуется некоторый “универсальный” профиль плотности $\rho(r)$, характерный для систем с разными размерами: от карликовых галактик до богатых скоплений. Этот профиль в целом не сильно отличается от изотермического $\rho(r) \propto r^{-2}$. Однако он более пологий вблизи центра системы и более круто спадает на периферии.

Зависимость формирующихся скоплений галактик от принятой космологической модели была исследована Буотом и Ксю (1997). Были рассмотрены три модели:

- 1) стандартная $SCDM$ -модель (космологический параметр плотности $\Omega_0 = 1$);
- 2) открытая $OCDM$ -модель ($\Omega_0 = 0.35$);
- 3) модель с Λ -членом — ΛCDM -модель ($\Omega_0 = 0.35$, $\lambda_0 = \Lambda/(3H_0^2) = 0.65$);
- 4) модель со смещением (biasing) — $BCDM$ -модель ($\Omega_0 = 1$).

Также варьировался спектральный индекс $n = -2, -1, 0$ в спектре мощности $P(k) \propto k^n$ начальных флуктуаций плотности. Сравнивались контурные карты распределения рентгеновского излучения скоплений галактик, наблюдавшихся на КА ROSAT, и скоплений, выделяемых в рассмотренных CDM -моделях. Показано, что наблюдения согласуются с $OCDM$ - и ΛCDM -моделями и противоречат $SCDM$ - и $BCDM$ -моделям.

В современной космологии ΛCDM -модели становятся общепринятыми, поэтому в последние годы численные исследования эволюции крупномасштабной структуры проводятся, главным образом, в рамках этих моделей. Большой объем вычислений выполнен группой исследователей, называющих себя Virgo Consortium (см. Дженкинс и др. 1998). Результаты этих численных экспериментов для разных космологических моделей используются для изучения структуры формирующихся скоплений и сверхскоплений галактик (см., например, Граманн и Сухоненко 2002). Сверхскопления выделяются по контрасту плотности галактик на масштабах до $R = 10h^{-1}$ Мпк (при $h = 0.7$), где h — безразмерное значение постоянной Хаббла в единицах $H_0 = 100$ км/с/Мпк. Все сверхскопления, выделенные на масштабе $R = 10h^{-1}$ Мпк, в современную эпоху расширяются. Среди более компактных скоплений с $R = 5h^{-1}$ Мпк

имеется небольшая доля скоплений, которые уже достигли радиуса поворота (“turnaround radius”), когда самогравитация скопления останавливает космологическое расширение, и скопление начинает сжиматься. Среднеквадратичные пекулярные скорости галактик в скоплениях слабо зависят от массы и радиуса скопления (Сухоненко и Граманн 2003).

Кроме характеристик отдельных группировок галактик представляет интерес исследовать корреляционные связи между соседними группировками. Статистический анализ данных наблюдений показывает, что скопления галактик часто представляют собой вытянутые структуры, причем большие оси соседних скоплений направлены приблизительно навстречу друг другу (см., например, Бинджели 1981, Плионис 1994). Сильная статистически значимая (на уровне $\sim 4\sigma$) тенденция к выстраиванию в линию (alignment) видимых больших осей скоплений прослеживается до масштабов $\sim 10h^{-1}$ Мпк. Более слабая тенденция отмечена вплоть до $\sim 60h^{-1}$ Мпк (Плионис 1994). Возможно, эта тенденция связана с особенностями формирования скоплений галактик в пределах более крупных структур типа волокон.

Численные космологические модели показывают сходные тенденции (см., например, Декель и др. 1984; Вест и др. 1989, 1991; Фальтенбахер и др. 2002). Масштабы, на которых проявляется выстраивание в линию, согласуются с данными наблюдений и слабо зависят от принятой космологической модели. По-видимому, они также отражают тенденцию к формированию группировок галактик в пределах вытянутых волокон.

Как показано в численных моделях ван Харлема и ван де Вейгарта (1993), скопления галактик, формирующиеся на масштабах нескольких Мегарсек, имеют, как правило, трехосную форму с отношением осей от ≈ 0.6 до ≈ 0.8 . Ориентация большой оси скопления определяется, главным образом, характером сжатия структуры на малых масштабах. Если сжатие происходит в пределах волокна, то наблюдается выстраивание в линию больших осей соседних скоплений. В противном случае, распределение ориентаций больших осей группировок галактик более изотропно. Ориентация главных осей скопления может значительно меняться со временем из-за падения на него соседних галактик и их групп. Скопление, как правило, вытягивается в направлении падения на него последней группы галактик. Такие слияния субскоплений в более массив-

ные скопления галактик приводят к сильным возмущениям поля скоростей во внешних частях скопления.

§9. Крупномасштабная структура Вселенной

Численному моделированию динамической эволюции крупномасштабной структуры Вселенной в последнее время посвящаются все больше работ. Только за последние 10 лет опубликовано несколько сотен статей на эту тему. Следует упомянуть монографии Колиса и Луккина (1995), а также Плиониса и Котсакиса (2002), где этому вопросу уделяется значительное внимание.

Одной из основных характеристик сгущивания галактик является двухточечная корреляционная функция $\xi(r)$. Способы определения этой функции, а также многоточечных корреляционных функций подробно описаны в монографии Пиблса (1980). Функцию $\xi(r)$ можно определить с помощью следующего соотношения

$$dP = n_g[1 + \xi(r)]dV, \quad (144)$$

где dP — вероятность встретить галактику в шаровом слое объемом dV с радиусами $[r, r + dr]$ и центром в случайно выбранной галактике поля; n_g — средняя объемная плотность галактик.

Наблюдения галактик и скоплений галактик показывают, что функцию $\xi(r)$ можно аппроксимировать степенным законом

$$\xi(r) = (r/r_0)^{-\gamma}, \quad (145)$$

где длина корреляции r_0 и показатель степени γ могут зависеть от выбранного масштаба (см., например, работу Бакалл и др. (2003) и ссылки в ней). Величина $r_0 \approx 5h^{-1}$ Мпк для галактик и $r_0 \approx 25h^{-1}$ Мпк для богатых скоплений галактик. Группы галактик и бедные скопления имеют промежуточные значения r_0 . Величина γ слабо зависит от богатства скоплений и равна $\gamma = 2.0 \pm 0.2$.

Сравнение данных наблюдений с результатами численных экспериментов для космологических CDM -моделей показало, что наименьшая длина корреляции достигается в $SCDM$ -моделях, а наибольшая — в ΛCDM -моделях ($\Omega_m = 0.3$, $h = 0.7$). Лучшее согласие с наблюдениями достигается для ΛCDM -моделей; стандартная

модель с $\Omega_m = 1$ не согласуется со свойствами сгущивания скоплений галактик. Бакалл и др. (2003) находят соотношение между r_0 и средним расстоянием d между скоплениями $r_0 \approx 2.6\sqrt{d}$ на масштабах $d \in (20 \div 90)h^{-1}$ Мпк. Эта зависимость отмечена как для наблюдаемых, так и для моделированных скоплений галактик.

Отметим, что корреляционный анализ — далеко не единственный метод изучения крупномасштабного распределения галактик и их скоплений в пространстве. В литературе используется целый ряд подходов к изучению сгущивания галактик (см., например, Бернардо и ван де Вейгарт 1996; Дорошкевич и др. 1998, 1999; Сани и др. 1998; Шпрингель и др. 1998; Хаттон 1999; Колли и др. 2000; Шмальцинг и Дьяферио 2000; Бенсон и др. 2001; Уеда и др. 2003, а также ссылки в этих работах).

Те или иные методы классификации и количественного анализа структур основаны на характерных особенностях, которые наблюдаются в распределении галактик, их групп, скоплений и сверхскоплений. Распределение этих объектов сильно неоднородно, в нем выделяются волокна (filaments), стенки (walls), пустоты (voids — области пониженной плотности объектов). Сходные структуры обнаруживаются и в космологических моделях N тел. Для примера на рис. 39 представлены распределения галактик в обзоре *CfA* и в численной *CDM*-модели Парка (1990). Общие характеристики структуры (волокна, стенки, пустоты) сходны.

Опишем кратко несколько подходов к анализу структур, реализуемых как в моделях, так и в наблюдаемом распределении галактик. Один из методов — оценка фрактальной размерности D (см., например, Вальдарнини и др. 1992, Хаттон 1999). Для равномерно случайного распределения галактик в пространстве $D \approx 3$. Подсчеты галактик в обзоре красных смещений Stromlo–APM (SARS) дают оценку $D = 2.1 \pm 0.1$ на масштабах до $\sim 40h^{-1}$ Мпк (Силос Лабини и Монтуори 1998). С другой стороны, на больших масштабах (до $\approx 60h^{-1}$ Мпк) распределение галактик для того же обзора SARS становится ближе к однородному ($D = 2.76 \pm 0.10$) (Хаттон 1999). Сравнение с Λ CDM-моделями показывает согласие поведения D : с увеличением предельного красного смещения обзора величина D стремится к трем, что соответствует однородному распределению объектов в пространстве.

Другой часто используемый топологический параметр g — так называемый род поверхности (genus), разделяющей области высо-

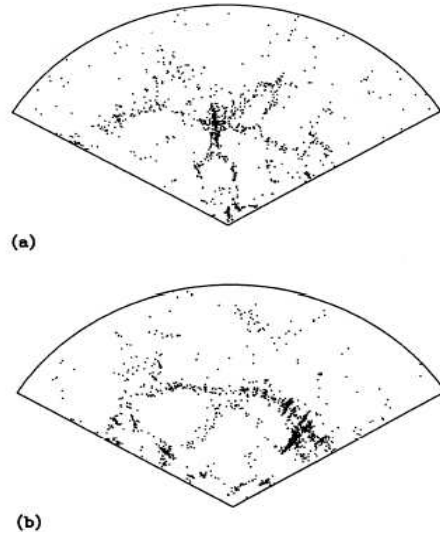


Рис. 39. Распределения галактик из выборки *CfA* (a) и в модели Парка (1990) (b).

кой и низкой плотности галактик (см., например, Готт и др. 1986; Шпрингель и др. 1998; Сани и др. 1998; Колли и др. 2000; Бенсон и др. 2001). Готт и др. (1986) предложили алгоритм вычисления параметра g , который формально определяется из соотношения

$$I = \int K dA = 4\pi(1 - g), \quad (146)$$

где K — гауссова кривизна поверхности, I — интеграл по поверхности. Неформально говоря, g равно числу дыр, которые имеет поверхность. Например, для сферы с N ручками величина $g = N$. Параметр g можно использовать для того, чтобы сравнивать наблюдаемое распределение галактик с различными моделями. Так, например, Шпрингель и др. (1998) сравнивают распределение ИК галактик и несколько *CDM*-моделей. Показано, что стандартная *SCDM*-модель отвергается на уровне значимости 99%. С другой стороны, авторам не удалось сделать выбор между τ *CDM*, Λ *CDM* и *OCDM*-моделями. Эти три модели не противоречат наблюдательным данным.

По-видимому, для изучения крупномасштабной структуры необходим комплексный подход с использованием нескольких методов. Наряду с традиционным корреляционным анализом, фрактальной размерностью и родом поверхности целесообразно применять и другие характеристики, например, функционалы Минковского и связанные с ними индикаторы форм (Сани и др. 1998, Шмальцинг и Дьяферрио 2000); теорию графов (Уеда и др. 2003); спектр мощности (Падилла и Баух 2003, Смит и др. 2003); мозаики Вороного и Дирихле (Бернардо и ван де Вейгарт 1996) и др.

Крупномасштабное модельное распределение галактик может быть бимодальным (см., например, Дорошкевич и др. 1998, 1999). Одна структура представлена системой волокон с характерными расстояниями между ними $\approx 10 h^{-1}$ Мпк. Вторая структура представляет собой систему “стенок” с характерными расстояниями между ними $\approx (30 \div 80) h^{-1}$ Мпк. Характерные размеры областей пониженной плотности (“пустот”), окруженных системой стенок, составляют $\approx (50 \div 70) h^{-1}$ Мпк. Эти результаты качественно согласуются с данными обзоров красных смещений галактик.

Особый интерес представляет исследование структуры и эволюции пустот, которые появляются в распределении галактик в *CDM*-моделях (см., например, Дубински и др. 1993, Готтлебер и др. 2003, Голдберг и Вогили 2004 и ссылки в этих статьях). Характерные размеры пустот в наблюдаемом распределении галактик составляют $\approx 25 h^{-1}$ Мпк и они занимают не менее 40% объема (см., например, Хойл и Вогили 2002). В численных моделях наблюдается следующая глобальная эволюция системы пустот (Дубински и др. 1993).

1. Небольшие пустоты сливаются и формируют пустоты большего объема.
2. Взаимодействие пустот приводит к формированию тонких стенок между ними.
3. Вектора пекулярных скоростей галактик, образующих стенки, ориентированы преимущественно вдоль стенок, причем модули скоростей приблизительно линейно возрастают с увеличением расстояния от центра стенки. Максимальные значения пекулярных скоростей достигают $\approx (0.1 \div 0.3) HR$, где R — характерный размер пустоты.

4. Распределение пустот по размерам довольно узкое, причем его форма зависит от индекса n в спектре мощности начальных флуктуаций плотности.
5. Пустоты сравнимых размеров примыкают друг к другу и в результате заполняют большую часть объема Вселенной.

В пустотах распределения видимого вещества могут находиться темные гало (Готтлебер и др. 2003). Однако их спектр масс отличается от общего спектра масс гало — он гораздо круче спадает при больших массах, что приводит к практическому отсутствию гигантских галактик в пустотах. Распределение темных гало в пределах пустот напоминает Вселенную в миниатюре — гало формируют волокна и пустоты, причем гало максимальных размеров и масс формируются в местах пересечения волокон и концентрируются, главным образом, вблизи границ пустот. Изучение наблюдаемых галактик в пределах пустот показывает, что они в среднем голубее, слабее, дискообразнее и имеют более высокий темп звездообразования, чем галактики вне пустот (см., например, Рохас и др. 2004). Эти различия, по-видимому, обусловлены задержкой процессов звездообразования в галактиках, располагающихся в областях с низкой плотностью окружения.

Еще один аспект космологических численных экспериментов — изучение поля пекулярных скоростей галактик и скоплений галактик (см., например, Колберг и др. 2000, Домингес и Мелотт 2004). Пекулярные скорости выделяемых группировок галактик определяются с помощью сглаживания. Отмечено систематическое превышение (примерно на 40%) среднеквадратичных пекулярных скоростей скоплений над значениями, предсказанными линейной теорией сгущивания для современной эпохи ($z = 0$). Кроме того, скопления, входящие в состав сверхскоплений, имеют в среднем большие (на 20–30%) пекулярные скорости, чем изолированные скопления.

Наблюдается примерно политропное соотношение между средней дисперсией скоростей (кинетической энергией) и плотностью $\sigma^2 \propto \rho^{2-\eta}$. Величина η определяет отклонение от вириального равновесия (в равновесном состоянии $\eta = 0$). Для самоподобных фрактальных моделей величина η зависит от индекса n начального спектра мощности (Домингес и Мелотт 2004).

Таким образом, космологические модели N тел позволяют установить ряд особенностей крупномасштабного сгущивания галак-

тик. Основные характеристики структур в целом согласуются с особенностями скучивания галактик и их группировок по данным современных обзоров красных смещений типа $2dF$ и $SDSS$. По-видимому, предсказания стандартной CDM -модели не согласуются с данными наблюдений. Однако выбор адекватной модели — вопрос будущих исследований (как численных экспериментов, так и наблюдений).

Литература

- Агемян Т.А., Аносова Ж.П. // Астрон. журн. 1967. Т. 44. С. 1261.
- Агемян Т.А., Аносова Ж.П. // Астрофизика. 1968. Т. 4. С. 196.
- Агемян Т.А., Аносова Ж.П. // Астрон. журн. 1971. Т. 48. С. 524.
- Агемян Т.А., Аносова Ж.П. // Труды АО ЛГУ. 1977. Т. 33. С. 52.
- Агемян Т.А., Аносова Ж.П. // Астрон. журн. 1991. Т. 68. С. 1099.
- Агемян Т.А., Мартынова А.И. // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. "Мат., Мех., Астрон." 1973. N 1. С. 122.
- Агемян Т.А., Примак Н.Л. // Астрофизика. 1968. Т. 4. С. 311.
- Агемян Т.А., Аносова Ж.П., Орлов В.В. // Астрофизика. 1983. Т. 19. С. 111.
- Агилар, Мерритт* (Aguilar L.A., Merritt D.) // *Astrophys. J.* 1990. V. 354. P. 33.
- Алексеев В.М. // Матем. сборник. 1969. Т. 78. С. 3.
- Аллен, Ябушита* (Allen A.J., Yabushita S.) // *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* 1985. V. 216. P. 155.
- Амад, Коэн* (Ahmad A., Cohen L.) // *J. Comp. Phys.* 1973. V. 12. P. 389.
- Амбарцумян В.А. // Астрон. журн. 1937. Т. 14. С. 207.
- Аносова Ж.П. // Итоги науки и техн. Сер. Астрон. 1985. Т. 26. С. 57.
- Аносова Ж.П., Завалов Н.Н. // Труды АО ЛГУ. 1981. Т. 36. С. 109.

- Аносова Ж.П., Завалов Н.Н. // Астрон. журн. 1989. Т. 66. С. 152.
- Аносова, Кирсанов* (Anosova J.P., Kirsanov N.O.) // Comments Astrophys. 1991. V. 15. P. 283.
- Аносова Ж.П., Орлов В.В. // Труды АО ЛГУ. 1985. Т. 40. С. 66.
- Аносова Ж.П., Орлов В.В. // Астрон. журн. 1986. Т. 63. С. 643.
- Аносова Ж.П., Бертов Д.И., Орлов В.В. // Астрофизика. 1984. Т. 20. С. 327.
- Аносова Ж.П., Киселева Л.Г., Орлов В.В., Чернин А.Д. // Астрон. журн. 1991. Т. 68. С. 449.
- Аносова Ж.П., Киселева Л.Г., Орлов В.В., Чернин А.Д. // Астрон. журн. 1992. Т. 69. С. 461.
- Аносова и др.* (Anosova J.P., Orlov V.V., Aarseth S.J.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1994. V. 60. P. 365.
- Арсет* (Aarseth S.J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1963. V. 126. P. 223.
- Арсет* (Aarseth S.J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1966. V. 132. P. 35.
- Арсет* (Aarseth S.J.) // Astrophys. Space Sci. 1971. V. 13. P. 324.
- Арсет* (Aarseth S.J.) // In “Gravitational N-body problem” (Ed. Lecar M.). Reidel. Dordrecht. 1972a. P. 88.
- Арсет* (Aarseth S.J.) // In “Gravitational N-body problem” (Ed. Lecar M.). Reidel. Dordrecht. 1972b. P. 373.
- Арсет* (Aarseth S.J.) // Vistas Astron. 1973. V. 15. P. 13.
- Арсет* (Aarseth S.J.) // Astron. Astrophys. 1974. V. 35. P. 237.
- Арсет* (Aarseth S.J.) // In “Multiple time scales” (Eds. Brackbill J.U., Cohen B.J.). Academic Press. New York. 1985. P. 377.
- Арсет* (Aarseth S.J.) // Publ. Astron. Soc. Pacif. 1999. V. 111. P. 1333.

Арсет (Aarseth S.J.). Gravitational N-body simulations. Tools and algorithms. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 2003.

Арсет, Вулф (Aarseth S.J., Wolf N.J.) // *Astrophys. Lett.* 1972. V. 12. P. 159.

Арсет, Заре (Aarseth S.J., Zare K.) // *Celest. Mech.* 1974. V. 10. P. 185.

Арсет, Фолл (Aarseth S.J., Fall S.M.) // *Astrophys. J.* 1980. V. 236. P. 43.

Арсет, Хегги (Aarseth S.J., Heggie D.C.) // *Astron. Astrophys.* 1976. V. 53. P. 259.

Арсет и др. (Aarseth S.J., Anosova J.P., Orlov V.V., Szebehely V.G.) // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1994. V. 58. P. 1.

Асевес (Aceves H.) // *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* 2001. V. 326. P. 1412.

Асевес, Веласкес (Aceves H., Velázquez H.) // *Rev. Mex. Astron. Astrofis.* 2002. V. 38. P. 199.

Байер и др. (Baier F.W., Lima Neto G.B., Wipper H., Braun M.) // *Astron. Nachr.* 1996. V. 317. P. 77.

Бакалл и др. (Bahcall J.N., Schmidt M., Soneira R.M.) // *Astrophys. J.* 1982. V. 258. P. L23.

Бакалл и др. (Bahcall J.N., Kirhakos S., Schneider D.P.) // *Astrophys. J.* 1995. V. 450. P. 486.

Бакалл и др. (Bahcall N.A., Dong F., Hao L., Bode P., Annis J., Gunn J.E., Schneider D.P.) // *Astrophys. J.* 2003. V. 599. P. 814.

Барнис (Barnes J.) // *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* 1985. V. 215. P. 517.

Барнис, Хут (Barnes J., Hut P.) // *Nature.* 1986. V. 324. P. 446.

Барнис, Хут (Barnes J., Hut P.) // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 1989. V. 70. P. 389.

Барнис и др. (Barnes J., Hernquist L., Hut P., Teuben P.) // Bull. Amer. Astron. Soc. 1988. V. 20. P. 706.

Баумгардт и др. (Baumgardt H., Hut P., Makino J., McMillan S.L.W., Portegies Zwart S.F.) // Astrophys. J. 2003a. V. 582. P. L21.

Баумгардт и др. (Baumgardt H., Makino J., Hut P., McMillan S.L.W., Portegies Zwart S.F.) // Astrophys. J. 2003b. V. 589. P. L25.

Бегельман и др. (Begelman M.C., Blandford R.D., Rees M.J.) // Nature. 1980. V. 287. P. 307.

Бенсон и др. (Benson A.J., Frenk C.S., Baugh C.M., Cole S., Lacey C.G.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2001. V. 327. P. 1041.

Бенц, Хиллс (Benz W., Hills J.C.) // Astrophys. J. 1987. V. 323. P. 628.

Бенц, Хиллс (Benz W., Hills J.C.) // Astrophys. J. 1992. V. 389. P. 546.

Бернардо, ван де Вейгарт (Bernardeau F., van de Weygaert R.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1996. V. 279. P. 693.

Бертин, Стиавелли (Bertin G., Stiavelli M.) // Astrophys. J. 1989. V. 338. P. 723.

Бевд и др. (Bode P.W., Cohn H.N., Lugger P.M.) // Astrophys. J. 1993. V. 416. P. 17.

Бевд и др. (Bode P.W., Berrington R.C., Cohn H.N., Lugger P.M.) // Astrophys. J. 1994. V. 433. P. 479.

Бевд и др. (Bode P., Ostriker J.P., Xu G.) // Astrophys. J. Suppl. 2000. V. 128. P. 561.

Бинджели (Binggeli B.) // Astron. Astrophys. 1982. V. 107. P. 338.

Бинни, Тремейн (Binney J., Tremaine S.). Galactic dynamics. Princeton Univ. Press. Princeton. 1987.

Бинни и др. (Binney J., Jiang I.-C., Dutta S.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1998. V. 297. P. 1237.

Биссанс, Герхард (Bissantz N., Gerhard O.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2002. V. 330. P. 591.

Брук (Broucke R.) // Astron. Astrophys. 1979. V. 73. P. 303.

Булриш, Штер (Bulirsch R., Stoer J.) // Num. Math. 1966. V. 8. P. 1.

Буот, Ксю (Buote D.A., Xu G.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1997. V. 284. P. 439.

Бурно, Комб (Bournaud F., Combes F.) // Astron. Astrophys. 2003. V. 401. P. 817.

Бурно и др. (Bournaud F., Combes F., Jog C.J.) // Astron. Astrophys. 2004. V. 418. P. L27.

Валенсуела, Клыпин (Valenzuela O., Klypin A.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2003. V. 345. P. 406.

Валтонен (Valtonen M.J.) // Mem. R. Astron. Soc. 1975a. V. 80. P. 61.

Валтонен (Valtonen M.J.) // Mem. R. Astron. Soc. 1975b. V. 80. P. 77.

Валтонен (Valtonen M.J.) // Vistas Astron. 1988. V. 32. P. 23.

Валтонен, Арсет (Valtonen M.J., Aarseth S.J.) // Rev. Mex. Astron. Astrofis. 1977. V. 3. P. 163.

Валтонен, Карттунен (Valtonen M.J., Karttunen H.). The three-body problem. Cambridge Univ. Press. Cambridge. 2006.

Валтонен, Миккола (Valtonen M.J., Mikkola S.) // Ann. Rev. Astron. Astrophys. 1991. V. 29. P. 9.

Валтонен М., Мюллери А.А., Орлов В.В., Рубинов А.В. // Письма в Астрон. журн. 2003. Т. 29. С. 50.

Вальдарнини и др. (Valdarnini R., Borgani S., Provenzale A.) // Astrophys. J. 1992. V. 394. P. 422.

- ван Альбада* (van Albada T.S.) // Bull. Astron. Inst. Netherlands. 1968a. V. 19. P. 479.
- ван Альбада* (van Albada T.S.) // Bull. Astron. Inst. Netherlands. 1968b. V. 20. P. 57.
- Вандербеи* (Vanderbei R.J.) // astro-ph/0303153. 2003.
- ван дер Марел и др.* (van der Marel R.P., Sigurdsson S., Hernquist L.) // Astrophys. J. 1997. V. 487. P. 153.
- ван Харлем, ван де Вейгарт* (van Haarlem M., van de Weygaert R.) // Astrophys. J. 1993. V. 418. P. 544.
- Веласкес, Уайт* (Velázquez H., White S.D.M.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1999. V. 304. P. 254.
- Верне, Муццио* (Vergne M.M., Muzzio J.C.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1995. V. 276. P. 439.
- Вест и др.* (West M.J., Dekel A., Oemler A.Jr.) // Astrophys. J. 1987. V. 316. P. 1.
- Вест и др.* (West M.J., Dekel A., Oemler A.Jr.) // Astrophys. J. 1989. V. 339. P. 46.
- Вест и др.* (West M.J., Villumsen J.V., Dekel A.) // Astrophys. J. 1991. V. 369. P. 287.
- Вилен* (Wielen R.) // Bull. Astron. 1968. V. 3. P. 127.
- Вилен* (Wielen R.) // In “Gravitational N-body problem” (Ed. Lecar M.). Reidel. Dordrecht. 1972. P. 62.
- Вилен* (Wielen R.) // In “Dynamics of stellar systems” (Ed. Hayli A.). IAU Symp. 69. Reidel. Dordrecht. 1975. P. 119.
- Виллумсен* (Villumsen J.V.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1982. V. 199. P. 493.
- Виллумсен* (Villumsen J.V.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1983. V. 204. P. 219.
- Гардинер, Ногучи* (Gardiner L.T., Noguchi M.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1996. V. 278. P. 191.

Герхард (Gerhard O.E.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1981. V. 197. P. 179.

Герш, Шпурцем (Giersz M., Spurzem R.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2000. V. 317. P. 581.

Говернато и др. (Governato F., Tozzi P., Cavaliere A.) // Astrophys. J. 1996. V. 458. P. 18.

Голдберг, Вогили (Goldberg D.M., Vogeley M.S.) // Astrophys. J. 2004. V. 605. P. 1.

Голубев В.Г. // Докл. АН СССР. 1967. Т. 174. С. 767.

Голубев В.Г. // Докл. АН СССР. 1968. Т. 180. С. 308.

Голубев В.Г., Гребеников Е.А. Проблема трех тел в небесной механике. Изд-во МГУ. Москва. 1985.

Гонсалес-Гарсия, ван Альбада (González-García A.C., van Albada T.S.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2003a. V. 342. P. L36.

Гонсалес-Гарсия, ван Альбада (González-García A.C., van Albada T.S.) // Rev. Mex. Astron. Astrofis. (Ser. Conf.). 2003b. V. 17. P. 142.

Горбачкий В.Г. Введение в физику галактик и скоплений галактик. Наука. Москва. 1986.

Готт и др. (Gott J.R. III, Melott A.L., Dickinson M.) // Astrophys. J. 1986. V. 306. P. 341.

Готтлебер и др. (Gottlöber S., Lokas E.L., Klypin A., Hoffman Y.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2003. V. 344. P. 715.

Граманн, Сушоненко (Gramann M., Suhhonenko I.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2002. V. 337. P. 1417.

Гудман (Goodman J.) // Astrophys. J. 1987. V. 313. P. 576.

Гуревич Л.Э., Левин Б.Ю. // Астрон. журн. 1950. Т. 27. С. 273.

Даву, Брук (Davoust E., Broucke R.) // Astron. Astrophys. 1982. V. 112. P. 305.

- Дейонге, Мерритт* (Dejonghe H., Merritt D.) // *Astrophys. J.* 1988. V. 328. P. 93.
- Декель, Аарсет* (Dekel A., Aarseth S.J.) // *Astrophys. J.* 1984. V. 283. P. 1.
- Декель и др.* (Dekel A., West M.J., Aarseth S.J.) // *Astrophys. J.* 1984. V. 279. P. 1.
- де Вокулер* (de Vaucouleurs G.) // *Ann. Astrophys.* 1948. V. 11. P. 247.
- де ля Фуенте Маркос, де ля Фуенте Маркос* (de la Fuente Marcos R., de la Fuente Marcos C.) // *Astrophys. Space Sci.* 2002. V. 280. P. 381.
- де Оливейра и др.* (de Oliveira M.R., Dottori H., Bica E.) // *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* 1998. V. 295. P. 921.
- де Оливейра и др.* (de Oliveira M.R., Bica E., Dottori H.) // *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* 2000. V. 311. P. 589.
- Дженкинс и др.* (Jenkins A. et al.) // *Astrophys. J.* 1998. V. 499. P. 20.
- Джессоп и др.* (Jessop C.M., Duncan M.J., Levison H.F.) // *Astrophys. J.* 1997. V. 489. P. 49.
- Джианг, Бинни* (Jiang I.-C., Binney J.) // *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* 1999. V. 303. P. L7.
- Джог, Читр* (Jog C.J., Chitre A.) // *Astron. Astrophys.* 2002. V. 393. P. L89.
- Джуричин и др.* (Giuricin G., Mardirossian F., Mezzetti M., Santangelo P.) // *Astrophys. J.* 1984. V. 277. P. 38.
- Домингес, Мелотт* (Domínguez A., Melott A.L.) // *Astron. Astrophys.* 2004. V. 419. P. 425.
- Доннер, Томассон* (Donner K.J., Thomasson M.) // *Astron. Astrophys.* 1994. V. 290. P. 785.

Дорошкевич и др. (Doroshkevich A.G., Fong R., Makarova O.) // Astron. Astrophys. 1998. V. 329. P. 14.

Дорошкевич и др. (Doroshkevich A.G., Müller V., Retzlaff J., Turchaninov V.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1999. V. 306. P. 575.

Дубински и др. (Dubinski J., Nicolaci da Costa L., Goldwirth D.S., Lecar M., Piran T.) // Astrophys. J. 1993. V. 410. P. 458.

Дьёрговский, Дэвис (Djorgovski S., Davis M.) // Astrophys. J. 1987. V. 313. P. 59.

Евстигнеева и др. (Evstigneeva E.A., Reshetnikov V.P., Sotnikova N.Ya.) // Astron. Astrophys. 2002. V. 381. P. 6.

Заре, Чесли (Zare K., Chesley S.) // Chaos. 1998. V. 8. P. 475.

Идета и др. (Ideta M., Hozumi S., Tsuchiya T., Takizawa M.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2000. V. 311. P. 733.

Караченцев И.Д., Караченцева В.Е., Лебедев В.С. // Изв. Спец. астрофиз. обс. 1989. Т. 27. С. 67.

Карлберг и др. (Carlberg R., Lake G., Norman C.) // Astrophys. J. 1986. V. 300. P. L1.

Кинг (King I.) // Astron. J. 1962. V. 67. P. 471.

Киселев А.А., Гнедин Ю.Н., Шахт Н.А., Грошева Е.А., Пиотрович М.Ю., Нацвлишвили Т.М. // Письма в Астрон. журн. 2008. Т. 34. С. 585.

Киселева, Орлов (Kiseleva L.G., Orlov V.V.) // Vistas Astron. 1993. V. 36. P. 1.

Киселева и др. (Kiseleva L.G., Eggleton P.P., Orlov V.V.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1994. V. 270. P. 936.

Киселева и др. (Kiseleva L.G., Colin J., Dauphole B., Eggleton P.P.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1998. V. 301. P. 759.

Клеменс и др. (Clemens M.S., Baxter K.M., Alexander P., Green D.A.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1999. V. 308. P. 364.

Кнебе и др. (Knebe A., Green A., Binney J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2001. V. 317. P. 630.

Колберг и др. (Colberg J.M. et al.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2000. V. 313. P. 229.

Коллис, Луккин (Coles P., Lucchin F.). Cosmology: the origin and evolution of cosmic structure. John Wiles & Sons. New York. 1995.

Колли и др. (Colley W.N., Gott J.R. III, Weinberg D.H., Park C., Berlind A.A.) // Astrophys. J. 2000. V. 529. P. 795.

Кроупа (Kroupa P.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2001. V. 322. P. 231.

Кроупа и др. (Kroupa P., Aarseth S.J., Hurley J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2001. V. 321. P. 699.

Ксю (Xu G.) // Astrophys. J. Suppl. 1995. V. 98. P. 355.

Кустаанхеймо, Штифель (Kustaanheimo P., Stiefel E.) // J. Reine Angew. Math. 1965. V. 218. P. 204.

Кучман (Couchman H.M.P.) // Astrophys. J. 1991. V. 368. P. L23.

Лайне и др. (Laine S., Zheng J.-Q., Valtonen M.J.) // Astron. J. 2004. V. 127. P. 765.

Лангер (Langer N.) // Astron. Astrophys. 1998. V. 329. P. 551.

Ларсон (Larson R.B.) // In "The formation of binary stars" (Eds. Zinneker H., Mathieu R.) IAU Symp. 200. ASP Ser. 2001. P. 93.

Левин, Спарк (Levine S.E., Sparke L.S.) // Astrophys. J. 1994. V. 428. P. 493.

Левин, Спарк (Levine S.E., Sparke L.S.) // Astrophys. J. 1998. V. 503. P. 125.

Леви-Чивита (Levi-Civita T.) // Acta Math. 1906. V. 30. P. 305.

Лейк, Карлберг (Lake G., Carlberg R.G.) // Astron. J. 1988. V. 96. P. 1581.

- Лима-Нето, Байер* (Lima-Neto G.B., Baier F.W.) // Astron. Astrophys. 1997. V. 320. P. 717.
- Лима-Нето, Комб* (Lima-Neto G.B., Combes F.) // Astron. Astrophys. 1995. V. 294. P. 657.
- Лихтенберг, Либерман* (Lichtenberg A.J., Lieberman M.A.). Regular and chaotic dynamics. Springer. Berlin. 1992.
- Мадзей и др.* (Mazzei P., Curir A., Bondi C.) // Astron. J. 1995. V. 110. P. 559.
- Макино* (Makino J.) // Astrophys. J. 1997. V. 478. P. 58.
- Макино, Арсет* (Makino J., Aarseth S.J.) // Publ. Astron. Soc. Japan. 1992. V. 44. P. 141.
- МакМиллан* (McMillan S.L.W.) // Astrophys. J. 1986. V. 307. P. 126.
- МакМиллан, Арсет* (McMillan S.L.W., Aarseth S.J.) // Astrophys. J. 1993. V. 414. P. 200.
- МакМиллан, Лайтман* (McMillan S.L.W., Lightman A.P.) // Astrophys. J. 1984a. V. 283. P. 801.
- МакМиллан, Лайтман* (McMillan S.L.W., Lightman A.P.) // Astrophys. J. 1984b. V. 283. P. 813.
- МакМиллан и др.* (McMillan S., Hut P., Makino J.) // Astrophys. J. 1990. V. 362. P. 522.
- МакМиллан и др.* (McMillan S., Hut P., Makino J.) // Astrophys. J. 1991. V. 372. P. 111.
- Мамон* (Mamon G.A.) // Astrophys. J. 1987. V. 321. P. 622.
- Мардлинг, Арсет* (Mardling R.-M., Aarseth S.J.) // In "The dynamics of small bodies in the Solar system, a major key to Solar system studies" (Eds. Steves B.A., Roy A.E.) Kluwer. Dordrecht. 1999. P. 385.
- Мардлинг, Арсет* (Mardling R.A., Aarseth S.J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2001. V. 321. P. 398.

- Маркеллос* (Markellos V.V.) // *Celest. Mech.* 1980. V. 21. P. 291.
- Маркеллос* (Markellos V.V.) // *Celest. Mech.* 1981. V. 25. P. 3.
- Мартынова А.И., Орлов В.В. // *Вестн. СПбГУ. Сер. "Мат., Мех., Астрон."* 2000. N 2. С. 130.
- Мартынова и др.* (Martynova A.I., Orlov V.V., Rubinov A.V.) // *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* 2003. V. 344. P. 1091.
- Маршал* (Marchal C.). *The three-body problem.* Elsevier. Amsterdam. 1990. (Перевод: Маршал К. Проблема трех тел. Изд-во Института компьютерных исследований. Москва–Ижевск. 2004).
- Маршал и др.* (Marchal C., Yoshida J., Sun Yi-Sui) // *Celest. Mech.* 1984. V. 34. P. 65.
- Мерритт* (Merritt D.) // *Astrophys. J.* 1987. V. 319. P. 55.
- Мерритт, Агилар* (Merritt D., Aguilar L.A.) // *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* 1985. V. 217. P. 787.
- Мерритт, Квинлан* (Merritt D., Quinlan G.D.) // *Astrophys. J.* 1998. V. 498. P. 625.
- Мерритт, Селлвуд* (Merritt D., Sellwood J.A.) // *Astrophys. J.* 1994. V. 425. P. 551.
- Мерритт, Стиавелли* (Merritt D., Stiavelli M.) // *Astrophys. J.* 1990. V. 358. P. 399.
- Меца* (Meza A.) // *Astron. Astrophys.* 2002. V. 395. P. 25.
- Меца, Саморано* (Meza A., Zamorano N.) // *Astrophys. J.* 1997. V. 490. P. 136.
- Миккола* (Mikkola S.) // *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* 1994. V. 269. P. 127.
- Миккола, Арсет* (Mikkola S., Aarseth S.J.) // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1990. V. 47. P. 375.
- Миккола, Арсет* (Mikkola S., Aarseth S.J.) // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1993. V. 57. P. 439.

Миккола, Арсет (Mikkola S., Aarseth S.J.) // Частное сообщение. 2001.

Миккола, Валтонен (Mikkola S., Valtonen M.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1986. V. 223. P. 269.

Миллер и др. (Miller R.H., Prendergast K.H., Quirk W.J.) // Astrophys. J. 1970. V. 161. P. 903.

Мини, Орлов (Minz A., Orlov V.) // ASP Conf. Ser. 2004. V. 316. P. 291.

Монахан (Monaghan J.J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1976a. V. 176. P. 63.

Монахан (Monaghan J.J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1976b. V. 177. P. 583.

Монахан (Monaghan J.J.) // Comput. Phys. 1988. V. 48. P. 89.

Мур (Moore C.) // Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 3675.

Наварро и др. (Navarro J.F., Frenk C.S., White S.D.M.) // Astrophys. J. 1996. V. 462. P. 563.

Нипоти и др. (Nipoti C., Londrillo P., Ciotti L.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2002. V. 332. P. 901.

Ногучи (Noguchi M.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1987. V. 228. P. 635.

Ньютон, Бинни (Newton A.J., Binney J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1984. V. 210. P. 711.

Орлов В.В. // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. "Мат., Мех., Астрон." 1986. N 2. С. 82.

Орлов В.В., Петрова А.В., Мартынова А.И. // Письма в Астрон. журн. 2001. Т. 27. С. 549.

(Орлов В.В., Петрова А.В., Мартынова А.И. // Астрон. журн. 2002a. Т. 79. С. 1034.

Орлов и др. (Orlov V.V., Petrova A.V., Martynova A.I.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2002b. V. 333. P. 495.

Орлов В.В., Рубинов А.В., Чернин А.Д. // Письма в Астрон. журн. 2003. Т. 29. С. 148.

Орлов и др. (Orlov V., Petrova A., Rubinov A., Martynova A.) // ASP Conf. Ser. 2004. V. 316. P. 70.

Острикер, Пиблс (Ostriker J.P., Peebles P.J.E.) // Astrophys. J. 1973. V. 186. P. 467.

Падилла, Баух (Padilla N.D., Vaugh C.M.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2003. V. 343. P. 796.

Парк (Park C.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1990. V. 242. P. 59p.

Патсис, Кауфманн (Patsis P.A., Kaufmann D.E.) // Astron. Astrophys. 1999. V. 352. P. 469.

Пиблс (Peebles P.J.E.). The large-scale structure of the Universe. Princeton Univ. Press. Princeton. 1980. (Перевод: Пиблс Ф.Дж.Е. Структура Вселенной в больших масштабах. Мир. Москва. 1983).

Пламмер (Plummer H.C.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1911. V. 71. P. 460.

Плионис, Котсакис (Plionis M., Cotsakis S.). Modern theoretical and observational cosmology. Kluwer. Dordrecht. 2002.

Полещиков С.М., Холопов А.А. Теория L -матриц и регуляризация уравнений движения в небесной механике. СЛИ. Сыктывкар. 1999.

Портегис Цварт, Вербунт (Portegies Zwart S.F., Verbunt F.) // Astron. Astrophys. 1996. V. 309. P. 179.

Портегис Цварт, Мейнен (Portegies Zwart S.F., Meinen A.T.) // Astron. Astrophys. 1993. V. 280. P. 174.

Портегис Цварт, Юнгельсон (Portegies Zwart S.F., Yungelson L.R.) // Astron. Astrophys. 1997. V. 332. P. 173.

Портегис Цварт и др. (Portegies Zwart S.F., Hut P., McMillan S.L.W., Verbunt F.) // Astron. Astrophys. 1997. V. 328. P. 134.

Портегис Цварт и др. (Portegies Zwart S.F., McMillan S.L.W., Hut P., Makino J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2001. V. 321. P. 199.

Портегис Цварт и др. (Portegies Zwart S.F., Hut P., McMillan S.L.W., Makino J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2004. V. 351. P. 473.

Пресс, Тьюкольский (Press W.H., Teukolsky S.A.) // Astrophys. J. 1977. V. 213. P. 183.

Пфеннигер (Pfenniger D.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1998. V. 72. P. 37.

Раутиайнен, Сало (Rautiainen P., Salo H.) // Astron. Astrophys. 2000. V. 362. P. 465.

Раутиайнен и др. (Rautiainen P., Salo H., Laurikainen E.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2002. V. 337. P. 1233.

Реваз, Пфеннигер (Revaz Y., Pfenniger D.) // Astron. Astrophys. 2004. V. 425. P. 67.

Рид и др. (Reed D., Governato F., Verde L., Gardner J., Quinn T., Stadel J., Merritt D., Lake G.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2005. V. 357. P. 82.

Ройттигер и др. (Roettiger K., Loken C., Burns J.O.) // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1997. V. 109. P. 307.

Рохас и др. (Rojas R.R., Vogeley M.S., Hoyle F., Brinkmann J.) // Astrophys. J. 2004. V. 617. P. 50.

Рубинов А.В. // Астрон. журн. 2004. Т. 81. С. 50.

Рубинов А.В., Петрова А.В., Орлов В.В. // Астрон. журн. 2002. Т. 79. С. 1044.

Рубинов А.В., Петрова А.В., Орлов В.В. // Письма в Астрон. журн. 2004. Т. 30. С. 936.

Саакян Р.А. О вероятности захвата в задаче трех тел. Изд-во АН Арм. ССР. Ереван. 1961.

Сало, Лаурикайнен (Salo H., Laurikainen E.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2000a. V. 319. P. 377.

Сало, Лаурикайнен (Salo H., Laurikainen E.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2000b. V. 319. P. 393.

Сани и др. (Sahni V., Sathyaprakash B.S., Shandarin S.F.) // Astrophys. J. 1998. V. 495. P. L5.

Саслау и др. (Saslaw W.C., Valtonen M., Aarseth S.J.) // Astrophys. J. 1974. V. 190. P. 253.

Себекей (Szebehely V.) // Celest. Mech. 1971. V. 4. P. 116.

Себекей (Szebehely V.) // Celest. Mech. 1973. V. 8. P. 163.

Себекей (Szebehely V.) // Celest. Mech. 1974a. V. 9. P. 359.

Себекей (Szebehely V.) // Astron. J. 1974b. V. 79. P. 981.

Себекей, Петерс (Szebehely V., Peters C.F.) // Astron. J. 1967. V. 72. P. 1187.

Себекей, Феагин (Szebehely V., Feagin T.) // Celest. Mech. 1973. V. 8. P. 11.

Сегин, Дюпра (Seguin P., Dupraz C.) // Astron. Astrophys. 1996. V. 310. P. 757.

Селлвуд (Sellwood J.A.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1985. V. 217. P. 127.

Селлвуд (Sellwood J.A.) // ASP Conf. Ser. 1999. V. 160. P. 327.

Селлвуд, Афанассола (Sellwood J.A., Athanassoula E.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1986. V. 221. P. 195.

Силос Лабини, Монтуори (Sylos Labini F., Montuori M.) // Astron. Astrophys. 1998. V. 331. P. 809.

Симо К. // В сб. "Современные проблемы хаоса и нелинейности" (Ред. Борисов А.В.). Изд-во Института компьютерных исследований. Ижевск. 2002.

Ситников К.А. // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. С. 303.

- Скокос и др.* (Skokos Ch., Antonopoulos Ch., Bountis T.C., Vrahatis M.N.) // J. of Phys. A: Math. and Gen. 2004. V. 37. P. 6269.
- Смит и др.* (Smith R.E. et al.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2003. V. 341. P. 1311.
- Солпитер* (Salpeter E.E.) // Astrophys. J. 1955. V. 121. P. 161.
- Сотникова Н.Я., Родионов С.А. // Письма в Астрон. журн. 2003. Т. 29. С. 367.
- Стерзик, Дурисен* (Sterzik M.F., Durisen R.H.) // Astron. Astrophys. 1995. V. 304. P. L9.
- Стерзик, Дурисен* (Sterzik M.F., Durisen R.H.) // Astron. Astrophys. 1998. V. 339. P. 95.
- Стерзик, Дурисен* (Sterzik M.F., Durisen R.H.) // Astron. Astrophys. 2003. V. 400. P. 1031.
- Стерзик, Токковинин* (Sterzik M.F., Tokovinin A.A.) // Astron. Astrophys. 2002. V. 384. P. 1030.
- Стиавелли, Спарк* (Stiavelli M., Sparke L.S.) // Astrophys. J. 1991. V. 382. P. 466.
- Стрёмгрен* (Strömberg E.) // Medd. Lunds Astr. Obs. 1900. V. 1. N. 13.
- Судзимото и др.* (Sugimoto D., Chikada Y., Makino J., Ito J., Ebisuzaki T., Umemura M.) // Nature. 1990. V. 345. P. 33.
- Сундман* (Sundman K.F.) // Acta Math. 1912. V. 36. P. 105.
- Сухоненко, Граманн* (Suhhonenko I., Gramann M.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2003. V. 339. P. 271.
- Талли* (Tully R.B.) // Astrophys. J. 1987. V. 321. P. 280.
- Таникава, Миккола* (Tanikawa K., Mikkola S.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2000a. V. 76. P. 23.
- Таникава, Миккола* (Tanikawa K., Mikkola S.) // Chaos. 2000b. V. 10. P. 649.

Таут и др. (Tout C.A., Aarseth S.J., Pols O.R., Eggleton P.P.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1997. V. 291. P. 732.

Тенс (Theuns T.) // Astron. Astrophys. 1992a. V. 259. P. 493.

Тенс (Theuns T.) // Astron. Astrophys. 1992b. V. 259. P. 503.

Терлевич (Terlevich E.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1987. V. 224. P. 193.

Тойбен (Teuben P.) // In "Astronomical data analysis software and systems. IV." (Eds. Shaw R.A., Payne H.A., Hayes J.J.E.). ASP Conf. Ser. 1995. V. 77. P. 398.

Тожовинин (Tokovinin A.A.) // Rev. Mex. Astron. Astrofis. (Ser. Conf.) 2004. V. 21. P. 7.

Томассон и др. (Thomasson M., Donner K.J., Sundelius B., Byrd G.G., Huang T.-Y., Valtonen M.J.) // Astron. Astrophys. 1989. V. 211. P. 25.

Томассон и др. (Thomasson M., Elmegreen B.G., Donner K.J., Sundelius B.) // Astrophys. J. 1990. V. 356. P. L9.

Томассон и др. (Thomasson M., Donner K.J., Elmegreen B.G.) // Astron. Astrophys. 1991. V. 250. P. 316.

Тоомре (Toomre A.) // Astrophys. J. 1964. V. 139. P. 1217.

Уеда и др. (Ueda H., Takeuchi T.T., Itoh M.) // Astron. Astrophys. 2003. V. 399. P. 1.

Умехара, Таникава (Umehara H., Tanikawa K.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1999. V. 74. P. 69.

Фабриан и др. (Fabian A.C., Pringle J.E., Rees M.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1975. V. 172. P. 15.

Фальтенбахер и др. (Faltenbacher A., Gottlöber S., Kerscher M., Müller V.) // Astron. Astrophys. 2002. V. 395. P. 1.

фон Хернер (von Hörner S.) // Z. Astrophys. 1960. V. 50. P. 184.

фон Шубарт (von Schubart J.) // Astron. Nachr. 1956. V. 283. P. 17.

- Фридман, Хоружий* (Fridman A.M., Khoruzhii O.V.) // Space Sci. Rev. 2003. V. 105. P. 1.
- Хаджидеметриу* (Hadjidemetriou J.D.) // Celest. Mech. 1984. V. 34. P. 379.
- Хансен, Финни* (Hansen B.M.S., Phinney E.S.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1997. V. 291. P. 569.
- Харли и др.* (Hurley J.R., Pols O.R., Tout C.A.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2000. V. 315. P. 543.
- Харли и др.* (Hurley J.R., Tout C.A., Aarseth S.J., Pols O.R.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2001. V. 323. P. 630.
- Харрингтон* (Harrington R.S.) // Celest. Mech. 1974. V. 9. P. 465.
- Харрингтон* (Harrington R.S.) // Astron. J. 1975. V. 80. P. 1081.
- Хартман* (Hartman J.W.) // Astron. Astrophys. 1997. V. 322. P. 127.
- Хаттон* (Hatton S.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1999. V. 310. P. 1128.
- Хегги* (Heggie D.C.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1975. V. 173. P. 729.
- Хегги* (Heggie D.C.) // In "The restless Universe" (Eds. Steves B.A., Maciejewski A.J.) Inst. of Physics. Bristol. 2001. P. 109.
- Хегги, Арсет* (Heggie D.C., Aarseth S.J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1992. V. 257. P. 513.
- Хегги, Хут* (Heggie D.C., Hut P.) // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1993. V. 85. P. 347.
- Хейнямяки и др.* (Heinämäki P., Lehto H.J., Valtonen M.J., Chernin A.D.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1998. V. 298. P. 790.
- Хейнямяки и др.* (Heinämäki P., Lehto H.J., Valtonen M.J., Chernin A.D.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1999. V. 310. P. 811.
- Хейл и др.* (Heyl J.S., Hernquist L., Spergel D.N.) // Astrophys. J. 1994. V. 427. P. 165.

Хейслер и др. (Heisler J., Tremaine S., Bahcall J.N.) // *Astrophys. J.* 1985. V. 298. P. 8.

Хиетаринта, Миккола (Hietarinta J., Mikkola S.) // *Chaos.* 1993. V. 3. P. 183.

Хиксон (Hickson P.) // *Astrophys. J.* 1982. V. 255. P. 382.

Хильми Г.Ф. // *Докл. АН СССР.* 1948. Т. 62. С. 39.

Хойл, Вогили (Hoyle F., Vogeley M.S.) // *Astrophys. J.* 2002. V. 566. P. 641.

Хокни, Иствуд (Hockney R.W., Eastwood J.W.). *Computer simulations using particles.* McGraw-Hill. New York. 1981. (Перевод: Хокни Р.В., Иствуд Дж.В. Численное моделирование методом частиц. Мир. Москва. 1987).

Хокни, Хол (Hockney R.W., Hohl F.) // *Astron. J.* 1969. V. 74. P. 1102.

Хол (Hohl F.) // *Astrophys. J.* 1971. V. 168. P. 343.

Хут (Hut P.) // *Astron. Astrophys.* 1981. V. 99. P. 126.

Хут (Hut P.) // *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 1984. V. 55. P. 301.

Хут (Hut P.) // *Astrophys. J.* 1993. V. 403. P. 256.

Хут, Бакалл (Hut P., Bahcall J.N.) // *Astrophys. J.* 1983. V. 268. P. 319.

Хэйли (Hayli A.) // *Astron. Astrophys.* 1970. V. 7. P. 17.

Чандра, Бхатнагар (Chandra N., Bhatnagar K.B.) // *Astrophys. Space Sci.* 2000a. V. 271. P. 371.

Чандра, Бхатнагар (Chandra N., Bhatnagar K.B.) // *Astrophys. Space Sci.* 2000b. V. 271. P. 395.

Чандра, Бхатнагар (Chandra N., Bhatnagar K.B.) // *Astrophys. Space Sci.* 2000в. V. 271. P. 423.

Чандрасекар (Chandrasekhar S.) // *Astrophys. J.* 1943. V. 97. P. 255.

- Чернин А.Д. // Успехи физ. наук. 2001. Т. 171. С. 153.
- Чернин, Валтонен* (Chernin A.D., Valtonen M.J.) // New Astron. Rev. 1998. V. 42. P. 41.
- Чесли* (Chesley S.R.) // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1999. V. 73. P. 291.
- Чуриков* (Chirikov B.V.) // Phys. Rep. 1979. V. 52. P. 263.
- Чуриков* (Chirikov B.V.) // Chaos, Solitons and Fractals. 1991. V. 1. P. 263.
- Чумак Я.О., Расторгуев А.С., Арсет С.Дж. // Письма в Астрон. журн. 2005. Т. 31. С. 342.
- Шази* (Chazy J.) // J. Math. Pures Appl. 1929. V. 8. P. 353.
- Шапиро и др.* (Shapiro K.L., Gerssen J., van der Marel R.P.) // Astron. J. 2003. V. 126. P. 2707.
- Шен, Селлвуд* (Shen J., Sellwood J.A.) // Astrophys. J. 2004. V. 604. P. 614.
- Шенсинье, Монтгомери* (Chencinier A., Montgomery R.) // Ann. Math. 2000. V. 52. P. 881.
- Шмальцинг, Дьяферйо* (Schmalzing J., Diaferio A.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 2000. V. 312. P. 638.
- Шмидт О.Ю. // Докл. АН СССР. 1947. Т. 58. С. 213.
- Шпрингелъ и др.* (Springel V. et al.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1998. V. 298. P. 1169.
- Шпурицем, Арсет* (Spurzem R., Aarseth S.J.) // Mon. Notic. R. Astron. Soc. 1996. V. 282. P. 19.
- Эбисудзаки и др.* (Ebisuzaki T., Makino J., Fukushige T., Taiji M., Sugimoto D., Ito J., Okumura S.K.) // Publ. Astron. Soc. Japan. 1993. V. 45. P. 269.
- Эверхарт* (Everhart E.) // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 35.

Элмегрин, Томассон (Elmegreen B.G., Thomasson M.) // *Astron. Astrophys.* 1993. V. 272. P. 37.

Эльсон и др. (Elson R., Hut P., Inagaki S.) // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1987. V. 25. P. 565.

Энон (Hénon M.) // *Astron. Astrophys.* 1969. V. 2. P. 151.

Энон (Hénon M.) // *Celest. Mech.* 1974. V. 10. P. 375.

Энон (Hénon M.) // *Celest. Mech.* 1977. V. 15. P. 243.

Юшида (Yoshida H.) // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1993. V. 56. P. 23.

Ябушита (Yabushita S.) // *Mon. Notic. R. Astron. Soc.* 1966. V. 133. P. 133.