

Лекции по космологии

Д.И.Нагирнер

19.03.2021

- ▶ Строеение и происхождение мира. Мифы. Гиппарх (II в. д.н.э.) Клавдий Птолемей (II в. н.э.)
- ▶ Начало науки. Николай Коперник (1473–1543), Иоганн Кеплер (1571–1630) и Галилео Галилей (1564–1642).
- ▶ Теоретические основы. Исаак Ньютон (1642–1727). Пьер Симон Лаплас (1749–1827) и Иммануил Кант (1724–1804).
- ▶ Космогония и космология. Альберт Эйнштейн (1879–1955). ОТО и стационарная модель (1917).
- ▶ Нестационарные модели Фридмана (1922-1924). А.А.Фридман (1888–1925). Модель с излучением (1927). Ж.Леметр (1894–1966).
- ▶ Наблюдательные основы. Эдвин Пауэлл Хаббл (1889–1953). Реликтовое излучение (1964).

Глава I. Однородные космологические модели

§ 1. Метрики однородных пространств

- ▶ **Космологический принцип.**
- ▶ **Кривизна пространства k/R^2 . Радиус кривизны R .**
- ▶ $k = 1, 3 \rightarrow 4$. $dl_4^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + du^2$,
 $d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$, $r^2 = \vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

В трехмерном пространстве $r^2 + u^2 = R^2$,

$$\vec{r} d\vec{r} + u du = 0 \text{ или } r dr + u du = 0, \quad du = -r dr / u.$$

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 + \frac{r^2 dr^2}{R^2 - r^2} = \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} + r^2 d\omega^2.$$

$$r = R \sin \chi, \quad dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\omega^2), \quad 0 \leq \chi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq R.$$

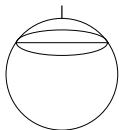
- ▶ **Метрика пространства отрицательной кривизны $k = -1$.** $dl_4^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 - du^2$, $r^2 - u^2 = -R^2$, $r dr - u du = 0$.

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2 - \frac{r^2 dr^2}{r^2 + R^2} = \frac{R^2 dr^2}{r^2 + R^2} + r^2 d\omega^2 = \frac{dr^2}{1 + r^2/R^2} + r^2 d\omega^2.$$

$$r = R \operatorname{sh} \chi, \quad dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi d\omega^2).$$

- ▶ **Плоское пр-во $k = 0$, $r = R\chi$, $dl^2 = R^2 (d\chi^2 + \chi^2 d\omega^2)$.**

► **Общее обозначение**



$$\operatorname{sn}_k \chi = \begin{cases} \sin \chi & \text{при } k=1, \\ \chi & \text{при } k=0, \\ \operatorname{sh} \chi & \text{при } k=-1, \end{cases} \quad (1)$$

Рис. 1. Параллель на сфере.

► $r = R \operatorname{sn}_k \chi, \quad dl^2 = R^2 [d\chi^2 + \operatorname{sn}_k^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$

► **Расстояние вдоль луча** $\theta = \theta_0, \varphi = \varphi_0$ **от** $\chi = 0$ **до** χ :
 $dl^2 = R^2 d\chi^2, l = R\chi. l > r, k=1; l < r, k=-1; l=r, k=0.$

► **Элемент объема** $d^3r = R d\chi R \operatorname{sn}_k \chi d\theta R \operatorname{sn}_k \chi \sin \theta d\varphi.$
 $d^3r = R^3 \operatorname{sn}_k^2 \chi d\chi d^2\omega, d^2\omega = \sin \theta d\theta d\varphi.$

► **Объем шара** $V_0(\chi) = \frac{4\pi}{3} R^3 \chi^3, V_1(\chi) \leq V_1(\pi) = 2\pi^2 R^3,$

$$V_k(\chi) = 4\pi R^3 \int_0^\chi \operatorname{sn}_k^2 d\chi = 2\pi k R^3 \left(\chi - \frac{\operatorname{sn}_k(2\chi)}{2} \right), k \neq 0.$$

► **Метрика Фрийдмана–Робертсона–Уокера**
четырёхмерного пространства–времени.

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2. \text{ Замена } cdt = R(\eta)d\eta,$$

$$ds^2 = R^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sn}_k^2 \chi d\omega^2], d\omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

§ 2. Основные уравнения однородных космологических моделей

- ▶ Два уравнения ($\text{cs}_k^2 \chi + k \text{sn}_k^2 \chi = 1$, $\text{ch}_k \chi = \text{sn}'_k \chi$):

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) R + \frac{\Lambda c^2}{3} R, \quad \rho = \rho_m + \rho_r, \quad (2)$$

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho R^2 + \frac{\Lambda c^2}{3} R^2 - kc^2, \quad \Lambda > 0. \quad (3)$$

- ▶ Преобразование уравнений: $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$, $P_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$,

$$\frac{\Lambda c^2}{3} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_\Lambda + 3\frac{P_\Lambda}{c^2} \right), \quad \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3} \rho_\Lambda. \quad (4)$$

- ▶ $\rho_t = \rho + \rho_\Lambda = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda$, $P_t = P + P_\Lambda = P_m + P_r + P_\Lambda$,

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho_t + 3\frac{P_t}{c^2} \right) R, \quad \dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_t R^2 - kc^2. \quad (5)$$

- ▶ Гравитирующая масса $\rho_g = \rho_t + 3\frac{P_t}{c^2}$, $M_g = \frac{4\pi}{3} \rho_g R^3$.

- **Условие совместности уравнений.** Давление P .

$$2\dot{R}\ddot{R} = \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho}_t R^2 + \frac{8\pi G}{3}\rho_t 2R\dot{R}, \quad \ddot{R} = \frac{4\pi G}{3}\dot{\rho}_t \frac{R^2}{\dot{R}} + \frac{8\pi G}{3}\rho_t R. \quad (6)$$

$$\frac{1}{3}\dot{\rho}_t \frac{R}{\dot{R}} + \frac{2}{3}\rho_t = -\frac{1}{3}\rho_t - \frac{P_t}{c^2}, \quad \dot{\rho}_t = -3\left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right)H, \quad H = \frac{\dot{R}}{R}. \quad (7)$$

- **Физический смысл условия.** $V \propto R^3$, $\frac{dV}{V} = 3\frac{dR}{R}$,

$$\begin{aligned} d(\rho_t c^2 V) &= c^2(V d\rho_t + \rho_t dV) = -3c^2 V \left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right) \frac{dR}{R} + c^2 \rho_t dV = \\ &= -c^2 V \left(\rho_t + \frac{P_t}{c^2}\right) \frac{dV}{V} + c^2 \rho_t dV = -P_t dV. \end{aligned} \quad (8)$$

- **Уравнение для H :** $\dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3}\left(\rho_t + 3\frac{P_t}{c^2}\right)$. (9)

$$\ddot{R} = \frac{d\dot{R}}{dt} = \frac{dRH}{dt} = \dot{R}H + R\dot{H} = R(H^2 + \dot{H}) = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_t + 3\frac{P_t}{c^2}\right)R. \quad (10)$$

- **Уравнение в форме закона Ньютона** $\ddot{R} = -G\frac{M_g}{R^2}$,

$$M_g = \frac{4\pi}{3} \left[\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda + \frac{3}{c^2} (P_m + P_r + P_\Lambda) \right] R^3.$$

- **Невзаимодействующие компоненты:** \mathbf{d} , \mathbf{r} , ν , $r\nu$, Λ .

$$\rho_m = \rho_d + \rho_\nu, \quad \rho_{r\nu} = \rho_r + \rho_\nu, \quad \rho_k = -\frac{3}{8\pi G} \frac{kc^2}{R^2}, \quad P_k = \frac{1}{8\pi G} \frac{kc^2}{R^2}.$$

$$P_d = 0, \quad P_{r\nu} = \frac{c^2}{3} \rho_{r\nu}, \quad P_\Lambda = -c^2 \rho_\Lambda, \quad P_k = -\frac{c^2}{3} \rho_k. \quad (11)$$

- **Эволюция:** $\dot{\rho} = -3\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)H$, $\dot{\rho}_k = -3\left(\rho_k - \frac{1}{3}\rho_k\right)H = -2\rho_k H$,

$$\dot{\rho}_d = -3\rho_d H, \quad \dot{\rho}_{r\nu} = -3\left(\rho_{r\nu} + \frac{1}{3}\rho_{r\nu}\right)H = -4\rho_{r\nu} H, \quad \dot{\rho}_\Lambda = 0. \quad (12)$$

$$\rho_d = \rho_d^0 \frac{R_0^3}{R^3}, \quad \rho_{r\nu} = \rho_{r\nu}^0 \frac{R_0^4}{R^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_\Lambda^0, \quad \rho_k = \rho_k^0 \frac{R_0^2}{R^2}, \quad \rho_k^0 = -\frac{3}{8\pi G} \frac{kc^2}{R_0^2}. \quad (13)$$

- **Критические величины:** $\dot{R}^2 - \frac{8\pi G}{3} \rho_t R^2 = -kc^2$,

$$\frac{8\pi G}{3} R^2 (\rho_c - \rho_t) = -kc^2, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad \dot{R}^2 (1 - \Omega_t) = -kc^2, \quad (14)$$

$$\Omega_d = \frac{\rho_d}{\rho_c}, \quad \Omega_{r\nu} = \frac{\rho_{r\nu}}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c}, \quad \Omega_t = \frac{\rho_t}{\rho_c}, \quad \Omega_k = \frac{\rho_k}{\rho_c} = -\frac{kc^2}{\dot{R}^2}.$$

- ▶ **Современные значения и масштабный множитель:**

$$\rho_c^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad \Omega_\Lambda^0 = \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}, \quad \Omega_k^0 = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}, \quad a = \frac{R}{R_0}.$$

- ▶ **Плотности через них:** $\rho_u = \rho_t + \rho_k$,

$$\rho_d = \rho_c^0 \frac{\Omega_d^0}{a^3}, \quad \rho_{rv} = \rho_c^0 \frac{\Omega_{rv}^0}{a^4}, \quad \rho_\Lambda = \rho_c^0 \Omega_\Lambda^0, \quad \rho_k = \rho_c^0 \frac{\Omega_k^0}{a^2}. \quad (15)$$

$$\rho_u = \frac{\rho_c^0}{a^4} (\Omega_{rv}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4), \quad \rho_g = \frac{\rho_c^0}{a^4} (2\Omega_{rv}^0 + \Omega_d^0 a - 2\Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (16)$$

- ▶ **Уравнения в этих обозначениях:** $\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_g R$,

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_u R^2, \quad H^2 = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{H_0^2}{a^4} (\Omega_{rv}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4). \quad (17)$$

- ▶ **Разделение переменных, общее решение:**

$$\frac{ada}{\sqrt{\Omega_{rv}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 dt, \quad (18)$$

$$cdt = R(\eta) d\eta, \quad \frac{da}{\sqrt{\Omega_{rv}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \frac{H_0 R_0}{c} d\eta. \quad (19)$$

► **Плоская модель** ($k=0, \Omega_k^0=0, R=\infty$). Считаем $R_0 = \frac{c}{H_0}$. Метрика $ds^2 = \frac{c^2}{H_0^2} a^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \chi^2 d\omega^2]$. (20)

► **Решение для плоского пространства:**

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = H_0 t, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{r\nu}^0 + \Omega_d^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \eta. \quad (21)$$

§ 3. Однокомпонентные модели

► **Пыль:** $\Omega_{r\nu}^0 = \Omega_\Lambda^0 = 0, P_d = 0, \Omega_k = 1 - \Omega_d, M_d = \frac{4\pi}{3} \rho_d R^3$.

$$H_0 t = \frac{\sqrt{[\Omega_d^0 + (1 - \Omega_d^0)a]a}}{1 - \Omega_d^0} - \frac{\Omega_d^0 \operatorname{arsh}_k \sqrt{|1 - \Omega_d^0|a/\Omega_d^0}}{(1 - \Omega_d^0) \sqrt{|1 - \Omega_d^0|}}.$$

$1 - \Omega_d^0 = -k|1 - \Omega_d^0|$. При $k=0$ $H_0 t = \frac{2}{3} a^{3/2}, H_0 t_0 = \frac{2}{3}$.

► **Излучение.** $\Omega_d^0 = 0, \Omega_\nu^0 = 0, \Omega_\Lambda^0 = 0, \Omega_k^0 = 1 - \Omega_r^0$.

$$a = \sqrt{H_0 t} \sqrt{2\sqrt{\Omega_r^0} + (1 - \Omega_r^0)H_0 t}. \quad \text{При } k=0 \quad H_0 t = \frac{a^2}{2}.$$

► $\Lambda \ddot{R} = \frac{\Lambda c^2}{3} R, \ddot{R} = H_\Lambda^2 R, H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c. R = R_+ e^{H_\Lambda t} + R_- e^{-H_\Lambda t}.$

Таблица 1. Эволюция радиуса кривизны в модели d.

k	Время t	Радиус кривизны R	Скорость \dot{R}
1	$\frac{R_m}{c}(\eta - \sin \eta)$	$2R_m \sin^2 \frac{\eta}{2}$	$c \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2}$
0	$\frac{R_m}{c} \frac{\eta^3}{6}$	$\frac{R_m \eta^2}{2} = \left(\frac{9R_m c^2 t^2}{2} \right)^{1/3}$	$\frac{2c}{\eta}$
-1	$\frac{R_m}{c}(\operatorname{sh} \eta - \eta)$	$2R_m \operatorname{sh}^2 \frac{\eta}{2}$	$c \operatorname{cth} \frac{\eta}{2}$

Таблица 2. Эволюция плотности и функции H в модели d.

k	H	Плотность ρ_d	$\Omega_d = \rho_d/\rho_c$
1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\cos(\eta/2)}{\sin^3(\eta/2)}$	$\frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_m^2} \frac{1}{\sin^6(\eta/2)}$	$\frac{1}{\cos^2(\eta/2)}$
0	$\frac{c}{R_m} \frac{4}{\eta^3} = \frac{2}{3} \frac{1}{t}$	$\frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_m^2} \frac{64}{\eta^6}$	1
-1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\operatorname{ch}(\eta/2)}{\operatorname{sh}^3(\eta/2)}$	$\frac{3}{8\pi G} \frac{c^2}{4R_m^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^6(\eta/2)}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\eta/2)}$

$$\frac{R_0 H_0}{c} = \frac{1}{\sqrt{|1 - \Omega_d^0|}}, \quad \frac{\eta}{2} = \operatorname{arsh}_k \sqrt{\frac{|1 - \Omega_d^0|}{\Omega_d^0}} a = \operatorname{arsh}_k \sqrt{\frac{R}{2R_m}},$$

$$R_m = \frac{R_0}{2} \frac{\Omega_d^0}{|1 - \Omega_d^0|} = \frac{R_0^3 H_0^2}{2c^2}, \quad GM_d = c^2 R_m, \quad G \frac{m M_d}{R_m} = mc^2.$$

Таблица 3. Эволюция радиуса кривизны в модели г.

k	Время t	Радиус кривизны R	Скорость \dot{R}
1	$\frac{2R_m}{c}(1 - \cos \eta)$	$2R_m \sin \eta$	$c \operatorname{ctg} \eta$
0	$\frac{2R_m}{c} \frac{\eta^2}{2}$	$2R_m \eta = (4R_m c t)^{1/2}$	$\frac{c}{\eta}$
-1	$\frac{2R_m}{c}(\operatorname{ch} \eta - 1)$	$2R_m \operatorname{sh} \eta$	$c \operatorname{cth} \eta$

Таблица 4. Эволюция плотности и функции H в модели г.

k	H	ρ_r	$\Omega_r = \rho_r/\rho_c$
1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\cos \eta}{\sin^2 \eta}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\sin^4 \eta}$	$\frac{1}{\cos^2 \eta}$
0	$\frac{c}{2R_m} \frac{1}{\eta^2} = \frac{1}{2t}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\eta^4}$	1
-1	$\frac{c}{2R_m} \frac{\operatorname{ch} \eta}{\operatorname{sh}^2 \eta}$	$\frac{3}{32\pi G} \frac{c^2}{R_m^2} \frac{1}{\operatorname{sh}^4 \eta}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \eta}$

$$W = 4\pi \rho_r R^4 = 4\pi \rho_r^0 R_0^4, \quad \eta = \operatorname{arsn}_k \left(a \sqrt{\frac{|1 - \Omega_r^0|}{\Omega_r^0}} \right) = \operatorname{arsn}_k \frac{R}{2R_m},$$

$$R_m = \sqrt{\frac{GW}{6c^2}} = \frac{R_0}{2} \sqrt{\frac{\Omega_r^0}{|1 - \Omega_r^0|}}, \quad \frac{R_0 H_0}{c} = \frac{1}{\sqrt{|1 - \Omega_r^0|}}.$$

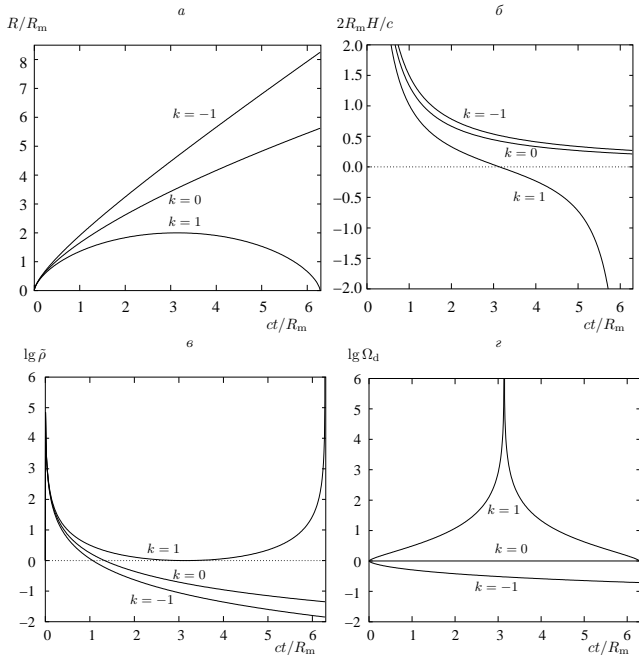


Рис. 2. Эволюция радиуса кривизны R (а), функции H (б), плотности ρ_d (в) и отношения Ω_d (г) для моделей пылевидного вещества.

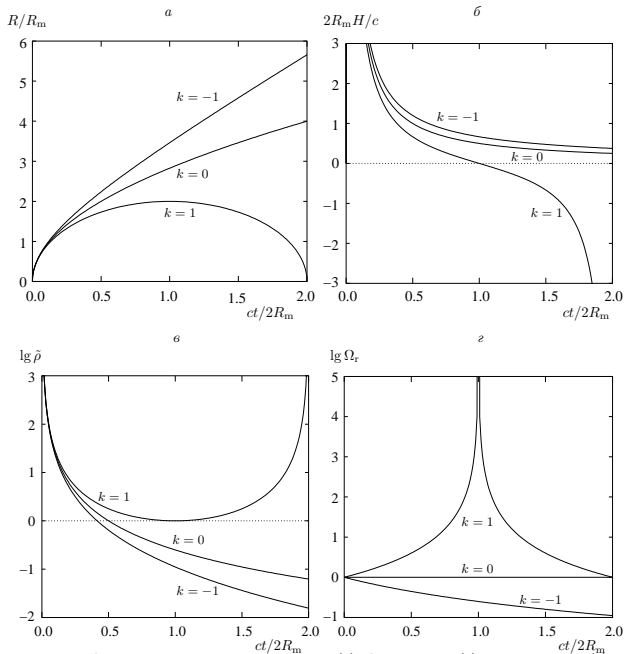


Рис. 3. Эволюция радиуса кривизны R (*a*), функции H (*б*), плотности ρ_r (*в*) и отношения Ω_r (*г*) для моделей с излучением.

Глава II. Излучение в космологии

§ 1. Распространение излучения и горизонт

- ▶ Движение фотона в пространстве. Элемент $ds^2 = R^2(\eta) [d\eta^2 - d\chi^2 - \text{sn}_k^2 \chi d\omega^2]$. Луч $\theta_0, \varphi_0, d\omega = 0$.
- ▶ Уравнение движения. $ds=0, d\eta^2 = d\chi^2, \chi = \pm\eta + \text{const.}$
- ▶ От нас $\chi = \eta_e + \eta$, к нам $\chi = \eta_0 - \eta$ — прибыл сейчас.
- ▶ Горизонт. В момент излучения $\chi_e = \eta_0 - \eta_e$. $\eta_e > 0$, так что $\chi_e \leq \eta_0$. Сфера $\chi = \eta_0$, из мест с $\chi > \eta_0$ еще не успели прийти, даже если излучены к нам.
- ▶ Возраст Вселенной растет, горизонт расширяется.

§ 2. Красное смещение в космологии

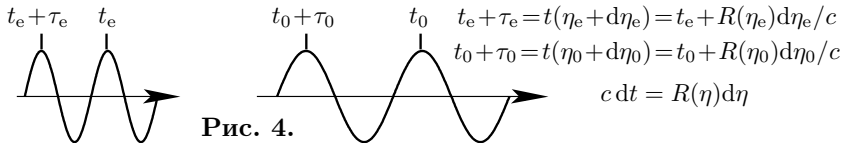


Рис. 4.

Волна у источника и у наблюдателя.

$$\frac{\tau_0}{\tau_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = \frac{R(\eta_0)}{R(\eta_e)} = \frac{R_0}{R_e} = 1 + z. \quad (22)$$

§ 3. Расстояния в космологии

- ▶ **Метрическое.** Вдоль луча с $\theta = \theta_0$, $\phi = \phi_0$ между точками χ_1 и $\chi_2 > \chi_1$ в момент $t = t(\eta)$:

$$l = R(\eta) \int_{\chi_1}^{\chi_2} d\chi = R(\eta)(\chi_2 - \chi_1), \text{ при } \chi_1 = 0, \chi_2 = \chi, l = R(\eta)\chi. \quad (23)$$

- ▶ **По угловому размеру.** $d\chi = 0$, $dD_{\text{ad}}^2 = R^2(\eta) \text{sn}_k^2(\chi) d\omega^2$.
 $dD_{\text{ad}}^2 = l_{\text{ad}}^2 d\omega^2$, $l_{\text{ad}} = R(\eta) \text{sn}_k(\chi) = R(\eta_0 - \chi) \text{sn}_k(\chi)$.

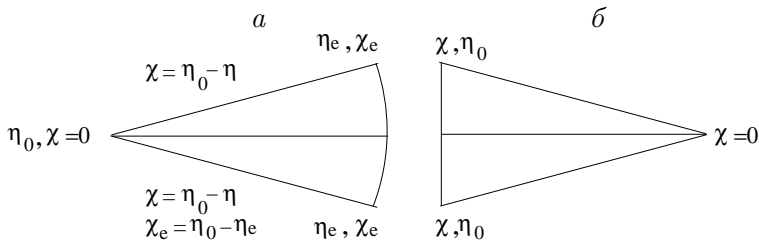


Рис. 5. Расстояния: а) по угловому размеру, б) по параллаксу.

- ▶ **По параллаксу:** $l_{\text{pl}} = R(\eta_0) \text{sn}_k(\chi) = R_0 \text{sn}_k(\chi)$.

- ▶ По числу фотонов. Число фотонов, испускаемых изотропным источником в единицу его времени, N_{ph} . Число фотонов, приходящих на единицу поверхности в единицу времени к наблюдателю

$$\tilde{N}_{\text{nb}} = \frac{N_{\text{nb}}}{4\pi l_{\text{pl}}^2 [R_0/R]} = \frac{N_{\text{nb}}}{4\pi l_{\text{nb}}^2}. \quad (24)$$

- ▶ Расстояние по болометрической яркости или фотометрическое. За счет красного смещения

$$l_{\text{bb}} = l_{\text{nb}} \sqrt{\frac{R_0}{R}}. \quad (25)$$

- ▶ Связи между расстояниями $\left(\frac{R_0}{R} = \frac{R(\eta)}{R(\eta_0)} = 1+z > 1 \right)$

$$l_{\text{bb}} = l_{\text{nb}} \sqrt{\frac{R_0}{R}} = l_{\text{pl}} \frac{R_0}{R} = l_{\text{ad}} \left(\frac{R_0}{R} \right)^2 = R_0 \frac{R_0}{R} \text{sn}_k(\chi). \quad (26)$$

§ 4. Соотношения Хаббла

- ▶ Хаббл построил шкалу расстояний l .
- ▶ Измерил и перевел в скорости $\frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{v}{c}$.
- ▶ Установил $v = H_0 l$. $H_0 = 500 \text{ км}/(\text{с Мпк})$. $z \leq 0.04$.
- ▶ Интерпретация $\frac{v}{c} = z$. Следствие $z = \frac{H_0}{c} l$.
- ▶ Вывод $v = Hl$: $l = R(\eta)\chi$, $v = \dot{l} = \dot{R}(\eta)\chi = \frac{\dot{R}}{R} l = Hl$.
- ▶ Вывод связи v и z . Фотон к нам $\chi = \eta_0 - \eta$;

$$\chi_e = \eta_0 - \eta_e, d\chi = -d\eta, d\eta = c \frac{dt}{R(\eta)} = c \frac{dR}{R} \frac{dt}{dR}. \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \chi_e &= \int_0^{\chi_e} d\chi = \int_{\eta_e}^{\eta_0} d\eta = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{R(\eta(t))} = c \int_{R_e}^{R_0} \frac{dR}{R\dot{R}} = c \int_{R_e}^{R_0} \frac{dR}{HR^2} = \\ &= \frac{c}{R_0} \int_{R_0}^{R_e} \frac{d(R_0/R)}{H} = \frac{c}{R_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}, \quad \chi = \frac{c}{R_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (28) \end{aligned}$$

- ▶ Связь скорости с красным смещением z :

$$v = \dot{R}_0 \chi = c \frac{\dot{R}_0}{R_0} \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))} = c H_0 \int_0^z \frac{dz'}{H(t(z'))}. \quad (29)$$

- ▶ Связь $v = cz$ только при $z \ll 1$.
- ▶ Продольный эффект Доплера:

$$1+z = \frac{1+v/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}, \quad \frac{v}{c} = z \frac{2+z}{2+2z+z^2}. \quad (30)$$

- ▶ Различия: 1) м.б. $v > c$, $l_H = \frac{c}{H}$, $l_H^0 = \frac{c}{H_0}$, $v = c \frac{l}{l_H}$.
- 2) Модельная зависимость через $H(t(z'))$.
- ▶ Причина: смещение частоты при излучении в эффекте Доплера и непрерывное смещение вдоль всего пути в космосе от источника до наблюдателя.

Глава III. Наиболее адекватная модель

§ 1. Проблема выбора модели

- ▶ Геометрия, соотношение между r и l , но $R \approx \infty$.
- ▶ Масса во Вселенной. Светящееся в-во $\Omega_{\text{vis}}^0 = 0.012$, темное $\Omega_{\text{gal}}^0 = 0.04 \div 0.05$, вириальное $\Omega_{\text{vir}}^0 = 0.25$.
- ▶ Космологические тесты.
 - ▶ $L_{\text{bb}}-z$. Стандартная свеча (СтСв). Галактика.
 $\Omega_0 = 2 \pm 2$, $\Omega_0 = 0.68 \pm 1.36$.
 - ▶ $D_{\text{ad}}-z$. Стандартный размер. Ядро скопления.
- ▶ Новая СтСв - SN Ia. БК с аккрецией. Максимум и ход спада.
- ▶ 2 группы, 1998 и 1999: $\Omega_{\Lambda} > 0.7$. Ускорение, Нобелевская премия 2011.
- ▶ Модель Λ CDM.

$$D_{\text{bb}} = 44.832 + 5 \lg \frac{H_0 (\Omega_t^0)^2 l_{\text{bb}}(z)}{2c}.$$

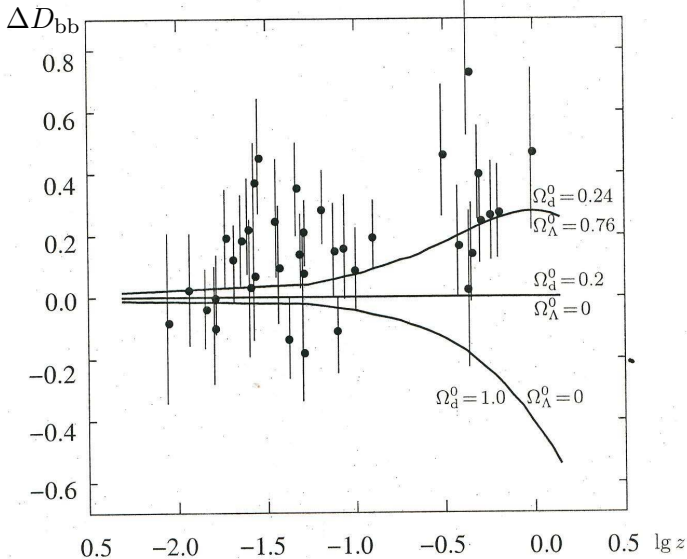


Рис. 6. Современная диаграмма Хаббла.

§ 2. Стандартная космологическая модель

▶ Параметры модели.

▶ Четыре компоненты d , r , ν , Λ . $r + \nu = g\nu$.

▶ $k = 0$, $\Omega_k = 0$, $\Omega_t = \Omega_d + \Omega_{r\nu} + \Omega_\Lambda = 1$.

▶ $H_0 = 70 \pm 3$, $H_0 = 70 \text{ км}/(\text{с Мпк}) = 2.268 \cdot 10^{-18} \text{ 1/с}$,

$$\rho_c^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 9.2 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3.$$

$$l_H^0 = \frac{c}{H_0} = 1.32 \cdot 10^{28} \text{ см} = 14.2 \text{ Г св. лет} = 4.28 \text{ Гпк}.$$

▶ $\Omega_\Lambda^0 = 0.72$, $\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda^0 \rho_c^0 = 6.63 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$.

▶ Массовые доли компонент. c 5.5, Λ 4.0, d 1.5, b 0.14.

▶ Чернотельное реликтовое излучение. $T_0 = 2.7277 \text{ К}$,

$$\rho_r^0 = \frac{a_{\text{SB}}}{c^2} T_0^4 = 4.66 \cdot 10^{-34} \text{ г/см}^3, \quad \Omega_r^0 = \frac{\rho_r^0}{\rho_c^0} = 5.06 \cdot 10^{-5}.$$

▶ 6 типов нейтрино (e , μ , τ). $T_\nu^0 = \sqrt[3]{4/11} T_0 = 1.95 \text{ К}$,

$$\rho_\nu^0 = 6 \frac{7}{8} \frac{a_{\text{SB}}}{c^2} (T_\nu^0)^4 = 1.36 \rho_r^0, \quad \Omega_\nu^0 = 1.36 \Omega_r^0 = 6.90 \cdot 10^{-5}.$$

▶ Вместе $\rho_{r\nu}^0 = \rho_r^0 + \rho_\nu^0 = 1.10 \cdot 10^{-33} \text{ г/см}^3$,

$$\Omega_{r\nu}^0 = \Omega_r^0 + \Omega_\nu^0 = 1.2 \cdot 10^{-4}.$$

▶ Пылевидное вещество (барионное и темное)

$$\Omega_d^0 = 1 - \Omega_\Lambda^0 - \Omega_{r\nu}^0 = 0.27988, \quad \rho_d^0 = \Omega_d^0 \rho_c^0 = 2.58 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3.$$

► **Исходные уравнения**

$$\int_0^a \frac{ada}{\sqrt{\Omega_{\text{r}\nu}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 a + \Omega_{\Lambda}^0 a^4}} = H_0 t, \quad \int_0^a \frac{da}{\sqrt{\Omega_{\text{r}\nu}^0 + \Omega_{\text{d}}^0 a + \Omega_{\Lambda}^0 a^4}} = \eta. \quad (31)$$

► **Обозначения:** $\beta = \frac{\Omega_{\text{d}}^0}{(\Omega_{\text{r}\nu}^0)^{3/4} (\Omega_{\Lambda}^0)^{1/4}} = 265.69,$

$$H_{\Lambda} = H_0 \sqrt{\Omega_{\Lambda}^0} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c = 59.4 \frac{\text{км}}{\text{с Мпк}} = 1.925 \cdot 10^{-18} \frac{1}{\text{с}}, \quad (32)$$

$$x_0 = \left(\frac{\Omega_{\Lambda}^0}{\Omega_{\text{r}\nu}^0} \right)^{1/4} = 8.81, \quad \eta_* = (\Omega_{\text{r}\nu}^0 \Omega_{\Lambda}^0)^{-1/4} = 10.38. \quad (33)$$

► **Замена** $a = \frac{x}{x_0}, \quad H = \frac{\dot{x}}{x} = H_{\Lambda} \frac{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}{x^2}. \quad (34)$

► **Решения:** $I_j(x, \beta) = \int_0^x \frac{x^j dx}{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}.$

$$H_{\Lambda} t = I_1(x, \beta), \quad \eta = \eta_* I_0(x, \beta), \quad (35)$$

► **Возраст Вселенной**

$$t_0 = I_1(x_0, \beta) / H_{\Lambda} = 4.33 \cdot 10^{17} \text{ с} = 13.72 \text{ Г лет.}$$

§ 3. Роли компонент в различные эпохи

- ▶ Отношения плотностей зависят от z так:

$$\frac{\rho_{\text{r}\nu}}{\rho_{\text{d}}} = (1+z) \frac{\rho_{\text{r}\nu}^0}{\rho_{\text{d}}^0}, \quad \frac{\rho_{\text{d}}}{\rho_{\Lambda}} = (1+z)^3 \frac{\rho_{\text{d}}^0}{\rho_{\Lambda}^0}, \quad \frac{\rho_{\text{r}\nu}}{\rho_{\Lambda}} = (1+z)^4 \frac{\rho_{\text{r}\nu}^0}{\rho_{\Lambda}^0}. \quad (36)$$

- ▶ Полная и гравитирующая плотности

$$\rho_t = \rho_{\text{d}} + \rho_{\text{r}\nu} + \rho_{\Lambda}, \quad \rho_g = \rho_{\text{d}} + 2\rho_{\text{r}\nu} - 2\rho_{\Lambda}. \quad (37)$$

- ▶ Таблица 5. Эпохи равенства плотностей и сил

Эпоха	z	t/t_0	t Гигалет	$t_0 - t$
$\rho_{\text{d}} = \rho_{\text{r}\nu}$	2340	$6.66 \cdot 10^{-6}$	$9.11 \cdot 10^{-5}$	13.7
$\rho_{\text{d}} = 2\rho_{\text{r}\nu}$	1170	$2.26 \cdot 10^{-5}$	$3.11 \cdot 10^{-4}$	13.7
$\rho_{\text{r}\nu} = \rho_{\Lambda}$	7.809	0.0488	0.669	13.0
$\rho_{\text{d}} = 2\rho_{\Lambda}$	0.7264	0.5263	7.219	6.5
$\rho_g = 0$	0.7260	0.5264	7.226	6.5
$\rho_{\text{d}} = \rho_{\Lambda}$	0.3702	0.7044	9.67	4.0
Соврем.	0	1	13.7	0

- ▶ Эпохи, когда $\rho_{\text{d}} = 2\rho_{\Lambda}$ и $\rho_g = 0$ почти совпадают, так как плотности излучения и нейтрино тогда малы.

§ 4. Геометрические свойства модели

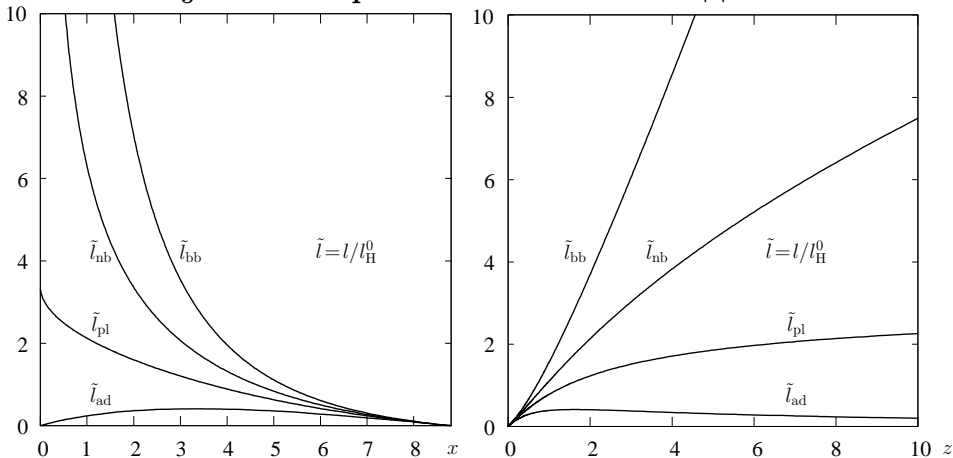


Рис. 7. Современные расстояния как функции x и z .
 Максимум расстояния l_{ad} при $z=1.63, x=3.35$,
 расстояния $l=l_{pl}=l_H^0$ при $z=1.42, x=3.63$.
 $\tilde{l} = \tilde{l}_{pl} = \eta_0 = 3.32$ при $x=0$ ($z=\infty$ — горизонт).

- ▶ Ускорение и скорость пропорциональны l : $l = l_{\text{H}}^0 a \chi$,

$$\ddot{l} = l_{\text{H}}^0 \ddot{a} \chi, \quad \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_{\text{g}} a, \quad \ddot{l} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_{\text{g}} a l_{\text{H}}^0 \chi = -\frac{4\pi G}{3} \rho_{\text{g}} l. \quad (38)$$

- ▶ Гравитационная плотность была бесконечна при $t = 0$, положительна 7.2 млрд лет, уменьшалась, обратилась в нуль и последние 6.5 млрд лет была отрицательна. Замедление расширения сменилось на ускорение.

- ▶ В настоящее время полная плотность

$$\rho_{\text{t}}^0 = \rho_{\text{c}}^0 = 9.21 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3, \text{ а гравитационная}$$

$$\rho_{\text{g}}^0 = \rho_{\text{d}}^0 + 2\rho_{\text{rv}}^0 - 2\rho_{\Lambda}^0 = -1.07 \cdot 10^{-29} \text{ г/см}^3.$$

- ▶ Ускорение на хаббловском расстоянии ($v = c$) сейчас $\ddot{l}_{\text{H}}^0 = 3.94 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2 \approx 4 \text{ \AA/с}^2$.
- ▶ Отношение скорости и ускорения на любых l

$$\frac{v}{\dot{v}} = \frac{\sqrt{1 + \beta x + x^4} x^2}{x^4 - \beta x/2 - 1} \frac{1}{H_{\Lambda}} \quad (39)$$

остается конечным и при $t \rightarrow \infty$ стремится к $1/H_{\Lambda} = 5.1950 \cdot 10^{17} \text{ с} = 16.462 \text{ Г лет}$.

§ 5. Стадии истории горячей Вселенной (ретроспективно)

1. Современная. РИ $2.7-3 \div 4 \cdot 10^3$ К. Нейтр. в-во, прозрачно для РИ, расширяются независимо.
2. Стадия частичной ионизации. Рекомбинация.
3. Стадия полной ионизации. Водород и гелий.
4. Эра радиационно доминированной плазмы.
5. Лептонная стадия. Слабое взаимодействие.
6. Адронная стадия. Рождение и аннигиляция.
7. Эпоха квантовой хромодинамики (КХД).
Сильное взаимодействие. Кварки.
8. Эпоха электро-слабого объединения.
9. Эпоха великого объединения. Все квантовые.
10. Эпоха сверхобъединения. Плюс гравитационное.

Таблица 6. Эпохи эволюции горячей Вселенной.

T (K)	$\rho_c \left(\frac{\text{г}}{\text{см}^3} \right)$	$k_B T$	z	t (с)	№	Эпохи
2.7	$9 \cdot 10^{-30}$	$4 \cdot 10^{-16}$ эрг	0	$4 \cdot 10^{17}$	1.	Совр.
$4 \cdot 10^3$	$1 \cdot 10^{-20}$	$5 \cdot 10^{-13}$ эрг	1500	$5 \cdot 10^{12}$	2.	Ч.ион.
$4 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^{-17}$	$5 \cdot 10^{-12}$ эрг	15000	$2 \cdot 10^{11}$	3.	П.ион.
$7 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^{-15}$	10^{-11} эрг	25000	$5 \cdot 10^{10}$	4.	РДП
$6 \cdot 10^9$	$3 \cdot 10^4$	511 кэВ	$2 \cdot 10^9$	10	5.	Лепт.
10^{12}	$2 \cdot 10^{13}$	0.1 ГэВ	$4 \cdot 10^{11}$	10^{-3}	6.	Адр.
10^{13}	$2 \cdot 10^{21}$	10 ГэВ	$4 \cdot 10^{12}$	10^{-7}	7.	КХД
10^{15}	$2 \cdot 10^{29}$	10^3 ГэВ	$4 \cdot 10^{14}$	10^{-11}	8.	Эл.-сл.
10^{29}	$2 \cdot 10^{81}$	10^{16} ГэВ	$4 \cdot 10^{28}$	10^{-37}	9.	Велик.
10^{32}	$2 \cdot 10^{93}$	10^{19} ГэВ	$4 \cdot 10^{31}$	10^{-43}		Сверх.

§ 6. Физические процессы во Вселенной

- ▶ Вначале все частицы одинаковы и без массы.
- ▶ Постепенно приобретают массы и обособляются.
- ▶ ТДР. Два процесса: упрощение состава и отрыв.
- ▶ Первыми отрываются гравитоны на границе 10^{-9} .
- ▶ Обособляются сначала адроны, затем лептоны.
- ▶ Многие частицы исчезают: аннигилируют, распадаются или объединяются с образованием других.
- ▶ К концу КХД кварки \rightarrow барионы и пи-мезоны.
- ▶ К концу адронной аннигилируют барионы.
- ▶ К концу лептонной исчезают все мезоны.
- ▶ При 10^{-3} ГэВ отрываются нейтрино. Первичный нуклеосинтез. Зарядовая асимметрия.
- ▶ К началу РДП аннигилируют пары e^-e^+ .
- ▶ В РДП остаются только обычные частицы.
- ▶ После рекомбинации — отрыв излучения. Атомы.

Глава IV. Реликтовое излучение и нейтрино

§ 1. История открытия РИ

- ▶ CMBR - Cosmic microwave background radiation - современное состояние. РИ - происхождение.
- ▶ Открыто случайно - Serendipitously.
- ▶ Намерения. 1964 - Arno Penzias and Robert Wilson, Holmdel, New Jersey, Bell Telephon. Рупорная антенна, 20 футов, для спутника Echo. Хотели на 20 см - около 21 см - наблюдать области Галактики вне плоскости. Шум.
- ▶ Что получилось. 7.35 см - от Галактики нет излучения, а шум остался 3.5 ± 1 К. Сигнал не зависел ни от времени суток, ни от сезона, ни от направления, ни от места наблюдения.
- ▶ Причины: 1) обратные лепестки антенны - нет; 2) шум прибора - сопротивление, голуби - нет; 3) какие-то источники (На Земле, в Солнечной системе, в Галактике, галактики) - нет. Год проверяли приборы и сами наблюдения.



Anger is not real. The facts as they are.

§ 2. Особенности открытия

- ▶ Черты открытий. Колумб, Америго Веспуччи и викинги.
- ▶ Предшественники.

Adams, McKellar, 1941, линии поглощения в спектре ζ Oph.

Три линии CN: $\lambda_0 = 3873.998$, $\lambda_1 = 3874.608$ и $\lambda_3 = 3875.763 \text{ \AA}$, из основного ($J = 0$, λ_0) и первого возбужденного ($J = 1$, λ_1) вращательных состояний, со второго ($J = 2$) нет. Температура возбуждения 2.3 К. Другие звезды. Объяснение только в 1966.

А.Г.Дорошкевич, И.Д.Новиков. Рассчитали спектр с температурой 1 К. Можно наблюдать средствами Bell.

Аспирант С.Э.Хайкина Т.А.Шмаонов в Пулкове в 1955, рупор, шум $3.9 \pm 4.2 \text{ К}$, статья в ПТЭ, 1957.

§ 3. Свойства РИ

- ▶ С высокой точностью (10^{-4}) это чернотельное излучение с температурой $T_0 = 2.72548 \pm 0.00057$ К.
Формула Планка

$$\rho_\nu = \frac{4\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad \rho_\lambda^* = \frac{4\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}. \quad (40)$$

- ▶ Максимум излучения — радиодиапазон:
по частоте $\nu_{\max} = 1.604 \cdot 10^{11}$ 1/с, $\lambda = 1.870$ мм;
по длине волны $\lambda_{\max} = 1.062$ мм, $\nu = 2.8822 \cdot 10^{11}$ 1/с.
- ▶ Половина $\nu_{1/2} = 1.9910 \cdot 10^{11}$ 1/с, $\lambda_{1/2} = 1.506$ мм.
- ▶ Концентрация фотонов $n_{\text{ph}}^0 = 411.7$ 1/см³.
- ▶ Плотность энергии $aT_0^4 = 4.188 \cdot 10^{-13}$ эрг/см³.
- ▶ Плотность массы $\rho_r = aT_0^4/c^2 = 4.659 \cdot 10^{-34}$ г/см³.
- ▶ Плотность энтропии $S/V = 2.047 \cdot 10^{-13}$ г/(см·с²·К).
- ▶ Изотропное с точностью 10^{-5} – 10^{-4} .

§ 4. Источники анизотропии и ее описание

- ▶ Диполь: $\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{v}{c} \cos \theta$, $v = (369 \pm 0.9) \text{ км/с}$,
 $l = (263.99 \pm 0.14)^\circ$, $b = (48.26 \pm 0.03)^\circ$.
- ▶ Квадруполь: распределение галактик в Мест. гр.
- ▶ Ближние. Все надо исключить.
 - ▶ Движение Земли вокруг Солнца.
 - ▶ Солнца вокруг центра Галактики.
 - ▶ Галактики вокруг центра масс Мест. гр.
 - ▶ Центра масс Местной группы относительно РИ:
 $v = (627 \pm 22) \text{ км/с}$, $l = (276 \pm 3)^\circ$, $b = (30 \pm 3)^\circ$.
- ▶ Описание анизотропии.

$$\delta_T(\vec{n}) = \frac{\Delta T}{T_0} = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (41)$$

$$C(\mu) = \langle \delta_T(\vec{n}_1) \delta_T(\vec{n}_2) \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_l a_l^2 P_l(\mu), \quad \mu = \vec{n}_1 \vec{n}_2, \quad (42)$$

$$C_l = \langle |a_{lm}|^2 \rangle = \frac{1}{2l+1} \langle a_l^2 \rangle, \quad \mathcal{T}_l^2 = \mathcal{D}_l = \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l. \quad (43)$$

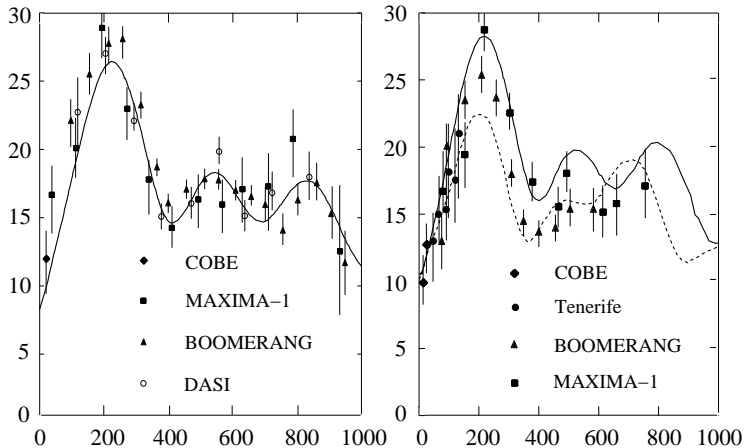


Рис. 8. Теоретическая зависимость T_l от l и данные наблюдений 2001 года.

§ 5. Космологические нейтрино.

▶ Интегралы $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = 6 \frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15}$, $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x + 1} = 6 \frac{7\pi^4}{720} = \frac{7}{8} \frac{\pi^4}{15}$.

▶ При отделении нейтрино $T_{\nu}^* \approx 10^{10}$ К, $z_{\nu}^* \gg 1$, V_* .

▶ Все компоненты ультрарелятивист. Энтропии

$$\mathcal{S}_r^* = \frac{4}{3} V_* a_{\text{SB}} (T_{\nu}^*)^3, \quad \mathcal{S}_{e^{\pm}}^* = \mathcal{S}_{\nu}^* = \frac{7}{8} \mathcal{S}_r^* = \frac{7}{6} V_* a_{\text{SB}} (T_{\nu}^*)^3. \quad (44)$$

▶ После $T \ll 10^6$ К e^+ аннигилировали и $\mathcal{S}_{e^{\pm}}^* \rightarrow \mathcal{S}_r$:

$$\mathcal{S}_r = \left(\frac{4}{3} + 2 \frac{7}{6} \right) V_* a_{\text{SB}} (T_{\nu}^*)^3 = \frac{11}{3} V_* a_{\text{SB}} (T_{\nu}^*)^3 = \frac{4}{3} V a_{\text{SB}} T^3.$$

▶ У нейтрино $\mathcal{S}_{\nu}^* = \frac{7}{6} V_* a_{\text{SB}} (T_{\nu}^*)^3 = \mathcal{S}_{\nu} = \frac{7}{6} V a_{\text{SB}} T_{\nu}^3$.

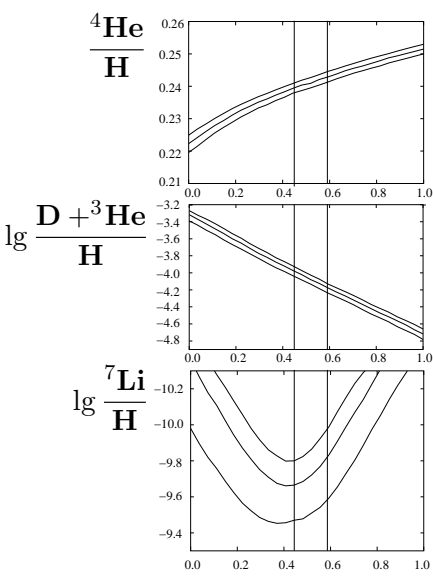
▶ $V_*(T_{\nu}^*)^3 = V T_{\nu}^3 = \frac{4}{11} V T^3$, $T_{\nu}^3 = \frac{4}{11} T^3$.

Глава V. Первичный нуклеосинтез и образование крупномасштабной структуры Вселенной

§ 1. Первичный нуклеосинтез

- ▶ Равновесие между N и P за счет реакций
 $P + e^- \longleftrightarrow N + \nu$, $P + \bar{\nu} \longleftrightarrow N + e^+$, $P + \bar{\nu} + e^- \longleftrightarrow N$.
- ▶ При $T \gg 10^{10}$ К ($E \gg 0.8$ МэВ) $n_P \approx n_N$.
- ▶ При $T \sim 10^{10}$ К $n_N/n_P = \exp(-Q/k_B T)$
 $Q = (m_N - m_P)c^2 = 1.293$ МэВ.
- ▶ При $T < 10^{10}$ К равновесие нарушается и за счет распада нейтронов $n_N/n_P = 0.15/0.85$.
- ▶ С понижением T все нейтроны идут в ${}^4\text{He}$,
 $0.15 N + 0.15 P = 0.30$, протонов (H) остается 0.70.
- ▶ Малые доли D, Li и ${}^3\text{He}$.
- ▶ Остальные элементы образуются в звездах в ходе ядерных реакций и выбрасываются при взрывах сверхновых.

§ 2. Сравнение с наблюдениями



$$n_{\text{nc}}^0 = n_{\text{bar}}^0 = 0.14 \cdot 10^{-6} \text{ 1/см}^3$$

$$n_{\text{ph}}^0 = 400 \text{ 1/см}^3$$

$$\varsigma = \frac{n_{\text{nc}}}{n_{\text{ph}}} = \frac{n_{\text{nc}}^0}{n_{\text{ph}}^0} = 3.5 \cdot 10^{-10}$$

$$\varsigma_{10} = \varsigma \cdot 10^{10} = 3.5$$

$$\lg \varsigma_{10} = 0.54$$

Рис. 8. Содержания первичного гелия, дейтерия и лития в зависимости от значения ς_{10} .

§ 3. Теория Джинса

- ▶ Однородный самогравитирующий газ, уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \varphi = 0, \quad (45)$$

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) S = 0 \quad (S - \text{энтропии на ед. массы}). \quad (46)$$

- ▶ Невозмущенное стационарное решение

$$\rho = \rho_0, \quad S = S_0, \quad \vec{v} = 0, \quad \varphi = \varphi_0 \quad (!), \quad P = P_0 = P(\rho_0, S_0).$$

- ▶ Малые гармонические возмущения:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad \varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 + \varphi_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad S(\vec{r}, t) = S_0 + S_1(t) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad \rho_1 \ll 1, \quad \varphi_1 \ll 1, \quad \vec{v}_1 \ll 1, \quad S_1 \ll 1.$$

- ▶ Давление: $c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right) \Big|_S$ — скорость звука, $b^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right) \Big|_\rho$,

$$P = P_0 + \frac{\partial P}{\partial \rho} (\rho - \rho_0) + \frac{\partial P}{\partial S} (S - S_0) = P_0 + [c_s^2 \rho_1(t) + b^2 S_1(t)] e^{i\vec{k}\vec{r}}.$$

- ▶ Линейное приближение $\dot{\rho}_1 + i\rho_0 \vec{v}_1 \vec{k} = 0,$

$$\dot{\vec{v}}_1 + i\vec{k} \left(\varphi_1 + c_s^2 \frac{\rho_1}{\rho_0} + b^2 \frac{S_1}{\rho_0} \right) = 0, \quad -k^2 \varphi_1 = 4\pi G \rho_1, \quad \dot{S}_1 = 0.$$

▶ **Экспоненциальная зависимость:**

$$\rho_1(t) = \rho_1^* e^{\omega t}, \quad \vec{v}_1(t) = \vec{v}_1^* e^{\omega t}, \quad \varphi_1(t) = \varphi_1^* e^{\omega t}, \quad S_1(t) = S_1^* e^{\omega t}.$$

▶ **Уравнения для амплитуд:** $\omega \rho_1^* + i \vec{k} \vec{v}_1^* \rho_0 = 0,$

$$\omega \vec{v}_1^* + i \vec{k} \left(\varphi_1^* + c_s^2 \frac{\rho_1^*}{\rho_0} + b^2 \frac{S_1^*}{\rho_0} \right) = 0, \quad -k^2 \varphi_1^* = 4\pi G \rho_1^*, \quad \omega S_1^* = 0. \quad (47)$$

▶ **Адиабатические возмущения** $S_1^* = 0.$ $\vec{v}_1^* = v_1^* \frac{\vec{k}}{k}.$ $\delta = \frac{\rho_1^*}{\rho_0}.$

$$\omega \delta + i k v_1^* = 0, \quad i k c_s^2 \delta + \omega v_1^* + i k \varphi_1^* = 0, \quad 4\pi G \rho_0 \delta + k^2 \varphi_1^* = 0. \quad (48)$$

▶ $\det \begin{vmatrix} \omega & ik & 0 \\ ikc_s^2 & \omega & ik \\ 4\pi G \rho_0 & 0 & k^2 \end{vmatrix} = k^2 (\omega^2 - 4\pi G \rho_0 + c_s^2 k^2) = 0.$

▶ $4\pi G \rho_0 > c_s^2 k^2, \quad k < k_J, \quad k_J = \frac{\sqrt{4\pi G \rho_0}}{c_s}, \quad \omega = \pm \sqrt{4\pi G \rho_0 - c_s^2 k^2}.$

$$\rho_1 = \Re \left(\rho_1^* e^{\omega t + i \vec{k} \vec{r}} \right) = |\rho_1^*| \cos(\vec{k} \vec{r} + \arg(\rho_1^*)) e^{\omega t}, \quad \varphi_1 = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_1,$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\omega}{k} \frac{\vec{k}}{k} |\delta| \cos\left(\vec{k} \vec{r} + \arg(\rho_1^*) + \frac{\pi}{2}\right) e^{\omega t} = -\frac{\omega}{k} \frac{\vec{k}}{k} |\delta| \sin\left(\vec{k} \vec{r} + \arg(\rho_1^*)\right) e^{\omega t}.$$

Моды: по 2 с $\omega > 0$ и $\omega < 0$ — стоячие волны.

- ▶ $4\pi G\rho_0 < c_s^2 k^2$, $k > k_J$, $\omega = -i\omega_*$, $\omega_* = \sqrt{k^2 c_s^2 - 4\pi G\rho_0} > 0$.
 $\rho_1 = |\rho_1^*| \cos(\omega_* t - \vec{k}\vec{r} - \arg(\rho_1^*))$, $\vec{v}_1 = \frac{\omega_*}{k} \frac{\vec{k}}{k} \frac{\rho_1}{\rho_0}$, $\varphi_1 = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_1$.

- ▶ **Энтропийные возмущения** $S_1^* \neq 0$. $\omega = 0$.

$$\vec{v}_1^* \vec{k} = 0, \varphi_1^* + c_s^2 \delta + b^2 \frac{S_1^*}{\rho_0} = 0, \varphi_1^* = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_1^* = -\frac{4\pi G}{k^2} \rho_0 \delta. \quad (49)$$

- ▶ $v_1^* = 0$. Тогда $\delta = -\frac{S_1^*}{\rho_0} \frac{b^2}{c_s^2 - 4\pi G\rho_0/k^2}$, $\rho_1^* = S_1^* \frac{b^2/c_s^2}{k_J^2/k^2 - 1}$.

Если $k \gg k_J$, то $c_s^2 \rho_1^* + b^2 S_1^* = 0$ или $\rho_1^* = -S_1^* \frac{b^2}{c_s^2}$, $P = P_0$.

- ▶ $v_1 \neq 0$. $\vec{v}_1 \perp \vec{k}$, $\vec{\nabla} \vec{v}_1 = i\vec{k}\vec{v}_1 = 0$, $\vec{\nabla} \times \vec{v}_1 = i\vec{v}_1 \times \vec{k} \neq 0$, **вихрь**.

- ▶ **Типы возмущений, всего 9. Адиабатические:**
по 2 растущих и убывающих, 2 колеблющихся.
Энтропийные: 1 с $\vec{v} = \vec{v}_0$ и 2 вихревых.

- ▶ $k = k_J$. $4\pi G = \frac{c_s k^2}{\rho_0}$, $S_1 = S_1^*$, $\varphi_1 = -\frac{c_s^2 \rho_1}{\rho_0}$, $\vec{v}_1 = -i\vec{k} b^2 \frac{S_1^*}{\rho_0}$,
 $\vec{v}_1 = -i\vec{k} b^2 \frac{S_1^*}{\rho_0} t$, $\rho_1 = -k^2 b^2 S_1^* \frac{t^2}{2} = -4\pi G \rho_0 \frac{b^2}{c_s^2} S_1^* \frac{t^2}{2}$.

► **Критерий Джинса.** $\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}}$.

$$M_J = \left(\frac{\lambda_J}{2}\right)^3 \rho_0 = \left(\frac{c_s}{2}\right)^3 \left(\frac{\pi}{G}\right)^{3/2} \rho_0^{-1/2} = \mathcal{B} \frac{c_s^3}{\sqrt{\rho_0}}, \quad (50)$$

$$\mathcal{B} = \frac{1}{8} \left(\frac{\pi}{G}\right)^{3/2} = 4.0368 \cdot 10^{10} \text{ г}^{3/2} \text{ с}^3 / \text{см}^9/2. \quad (51)$$

► **Эра РДП** $25000 < z < 2 \cdot 10^9$.

$$\rho_r = \frac{a_{\text{SB}}}{c^2} T^4, \quad P_r = \frac{c^2 \rho_r}{3}, \quad c_s^2 = \frac{\partial P_r}{\partial \rho_r} = \frac{c^2}{3}, \quad c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

$$M_J = \mathcal{B} \frac{c_s^3}{\sqrt{\rho_r}} = \frac{\mathcal{B} c^4}{\sqrt{27} \sqrt{a_{\text{SB}} T_0^2 (1+z)^2}} \approx \frac{10^{58}}{(1+z)^2} = \frac{5 \cdot 10^{24}}{(1+z)^2} M_\odot, \quad (52)$$

$z = 25000$, $M_J = 8 \cdot 10^{15} M_\odot$ — **богатое скопление галактик;**

$z = 2 \cdot 10^9$, $M_J = 1.2 \cdot 10^6 M_\odot$ — **ядро галактики.**

- ▶ **Полная ионизация** $2000 < z < 20000$. **Идеальный газ.**

$$P = \frac{N}{V} k_B T, \quad \rho = m_H \frac{N}{V}, \quad S = \frac{k_B}{m_H} \left[\frac{5}{2} - \ln \left(\frac{N}{V} \frac{h^3}{(2\pi m_H k_B T)^{3/2}} \right) \right].$$

Адиабатическое расширение

$$N = \text{const}, \quad S = \text{const}, \quad s = VT^{3/2} = s(S) = \text{const}.$$

$$P = \frac{\rho}{m_H} k_B \left(\frac{s}{V} \right)^{2/3} = \frac{\rho}{m_H} k_B \left(\frac{s\rho}{m_H N} \right)^{2/3} = \mathcal{A}(S) \rho^{5/3}.$$

$$\mathcal{A}(S) = \frac{k_B}{m_H^{5/3}} \left(\frac{s(S)}{N} \right)^{2/3} \quad \text{— энтропийная константа.}$$

$$c_s^2 = \frac{5}{3} \mathcal{A}(S) \rho^{2/3} = \frac{5P}{3\rho} = \frac{5k_B T}{3m_H}, \quad c_s = \sqrt{\frac{5k_B T}{3m_H}}.$$

Таким образом, масса Джинса

$$M_J = \frac{1}{8} \left(\frac{5\pi k_B T}{3 G m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho^{1/2}} = \frac{1}{8} \left(\frac{5\pi k_B T_0}{3 G m_H} \right)^{3/2} \frac{1}{\rho_0^{1/2}}. \quad (53)$$

$$\Omega_d^0 = 0.28, \quad \rho_0 = \rho_d^0 = \Omega_d^0 \rho_c^0 = 2.58 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3.$$

$M_J = 2 \cdot 10^{38} \rho = 10^5 M_\odot$ - масса шарового скопления.

§ 4. Возмущения космологического вещества.

Пыль (В. Боннор, 1957) плюс ТЭ.

- Уравнения неразрывности, движения и Пуассона:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \varphi = 0, \quad (54)$$

$$\Delta \varphi = 4\pi G \rho_g, \quad \rho_g = \rho + 3 \frac{P}{c^2} - \frac{c^2}{4\pi G} \Lambda. \quad (55)$$

- Невозмущенное состояние. $\rho_o(t)$,

$$\vec{v}_o = H(t) \vec{r}, \quad \varphi_o = \frac{2\pi G}{3} \rho_g^o(t) r^2, \quad P_o = 0, \quad \rho_g^o = \rho_o - \frac{c^2}{4\pi G} \Lambda. \quad (56)$$

- Проверка: $\rho = \rho_o$, $\vec{v} = \vec{v}_o$, $\varphi = \varphi_o$, $P = P_o$, (см. (7) и (9))

$$\dot{\rho}_o + \vec{\nabla}(\rho_o H \vec{r}) = \dot{\rho}_o + \rho_o H \vec{\nabla}(\vec{r}) = \dot{\rho}_o + \rho_o H 3 = 0, \quad \dot{\rho}_o = -3\rho_o H, \quad (57)$$

$$\dot{H} \vec{r} + H^2 (\vec{r} \vec{\nabla}) \vec{r} + \frac{0}{\rho_o} + \frac{2\pi G}{3} \rho_g^o 2\vec{r} = 0, \quad \dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3} \rho_g^o, \quad (58)$$

$$\Delta \varphi_o = \frac{2\pi G}{3} \rho_g^o(t) \Delta r^2 = 4\pi G \rho_g^o(t). \quad (59)$$

- Использовано $(\vec{r} \vec{\nabla}) \vec{r} = \vec{r}$ и $\Delta r^2 = 6$.

- ▶ Эйлер и Лагранж: $\vec{r} = R(t)\vec{x}$. Волновой вектор $\vec{k}(t) = \frac{\vec{\alpha}}{R(t)}$, $\vec{\alpha} = \text{const}$, $\dot{\vec{k}} = -\vec{k}H$, $\vec{\alpha}\vec{x} = \vec{k}\vec{r}$, $\frac{\vec{k}}{k} = \frac{\vec{\alpha}}{\alpha}$.

- ▶ Гармонические возмущения

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(t) + \rho_1(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_0(t) + v_1(t)\frac{\vec{\alpha}}{\alpha}e^{i\vec{k}\vec{r}},$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0(t) + \varphi_1(t)e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad P = c_s^2\rho_1e^{i\vec{k}\vec{r}}, \quad \delta(t) = \frac{\rho_1(t)}{\rho_0(t)}$$

- ▶ Уравнения для возмущений. Из уравнения неразрывности $\dot{\delta} = -ikv_1$. Из уравнения Пуассона

$$\varphi_1 = -\frac{4\pi G\rho_0}{k^2}\delta \left(1 + 3\frac{c_s^2}{c^2}\right) \sim -\frac{4\pi G\rho_0}{k^2}\delta. \quad \text{Для скорости}$$

$$\dot{v}_1 + v_1H = \frac{i}{k}(4\pi G\rho_0 - c_s^2k^2)\delta.$$

- ▶ Исключим из этого уравнения скорость:

$$v_1 = \frac{i}{k}\dot{\delta} = \frac{i}{\alpha}R(t)\dot{\delta}, \quad \dot{v}_1 = \frac{i}{k}\ddot{\delta} + \frac{i}{\alpha}\dot{R}\dot{\delta} = \frac{i}{k}\ddot{\delta} + \frac{i}{k}H\dot{\delta}.$$

- ▶ Уравнение для δ

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - (4\pi G\rho_0 - c_s^2k^2)\delta = 0. \quad (60)$$

► **Частный случай.** $P \propto \rho^{4/3}$. Тогда $c_s = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2} \propto \rho^{1/6}$.

Плоская модель $\rho_0 = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2}$, $H = \frac{2}{3} \frac{1}{t}$,

$$R = R_* t^{2/3}, \quad k = k_* t^{-2/3}, \quad c_s = c_* t^{-1/3}. \quad (61)$$

Уравнение Эйлера $t^2 \ddot{\delta} + \frac{4}{3} t \dot{\delta} - \left(\frac{2}{3} - c_*^2 k_*^2\right) \delta = 0$. (62)

$$\delta = \delta_* t^n, \quad v_1 = v_1^0 t^{n-1/3}, \quad n = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - c_*^2 k_*^2}. \quad (63)$$

$$k_{\text{cr}}^* = \frac{5}{6} \frac{1}{c_*}, \quad k_{\text{cr}} = k_{\text{cr}}^* t^{-2/3} = \frac{5}{6} \frac{1}{c_*} t^{-2/3}. \quad (64)$$

$$\lambda_{\text{cr}} = \frac{2\pi}{k_{\text{cr}}} = \frac{6}{5} 2\pi c_* t^{2/3} = \frac{6}{5} 2\pi c_s t. \quad (65)$$

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} = \frac{c_*}{t^{1/3}} \sqrt{\frac{\pi 6\pi G t^2}{G}} = \sqrt{\frac{3}{2}} 2\pi c_* t^{2/3} = \sqrt{\frac{3}{2}} 2\pi c_s t. \quad (66)$$

Точно $\frac{6}{5} = 1.2$, по Джинсу $\sqrt{\frac{3}{2}} = 1.224745$.

► Большие λ . $k \ll 1$. $\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - 4\pi G\rho_0\delta = 0$. (67)

Одно решение $\delta = H$, второе $\delta = H \int_0^t \frac{dt}{\dot{R}^2} = H \int_0^{R(t)} \frac{dR}{\dot{R}^3}$.

Проверка: из (9)

$$\dot{H} = -H^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho_g^0, \quad \ddot{H} = -\frac{4\pi G}{3}\dot{\rho}_0 - 2H\dot{H} = 4\pi G\rho_0 H - 2H\dot{H}. \quad (68)$$

§ 5. Блины Зельдовича

► Замена $t, x(t'), y(t'), z(t') \rightarrow t', x_1(t), x_2(t), x_3(t)$:

$$x = R(t')x_1 + \delta_x(t', x_1), \quad y = R(t')x_2, \quad z = R(t')x_3, \quad t = t'. \quad (69)$$

► Производные по t : $0 = R(t') \frac{\partial x_{2,3}}{\partial t} + x_{2,3} \dot{R}(t')$,

$$0 = R(t') \frac{\partial x_1}{\partial t} + x_1 \dot{R}(t') + \dot{\delta}_x(t', x_1) + \delta'_x(t', x_1) \frac{\partial x_1}{\partial t}, \quad (70)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = -\frac{\dot{R}(t')x_1 + \dot{\delta}_x(t', x_1)}{R(t') + \delta'_x(t', x_1)}, \quad \frac{\partial x_{2,3}}{\partial t} = -H(t')x_{2,3}. \quad (71)$$

- ▶ **Связь производных по времени:**

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \quad (72)$$

$$- \frac{\dot{R}(t')x_1 + \dot{\delta}_x(t', x_1)}{R(t') + \delta'_x(t', x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} - H(t')x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - H(t')x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (73)$$

- ▶ **Связь производных по координатам:**

$$1 = [R(t') + \delta'_x(t', x_1)] \frac{\partial x_1}{\partial x}, \quad 1 = R(t') \frac{\partial x_2}{\partial y}, \quad 1 = R(t') \frac{\partial x_3}{\partial z}, \quad (74)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{R(t') + \delta'_x(t', x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{R(t')} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{R(t')} \frac{\partial}{\partial x_3}. \quad (75)$$

- ▶ **Компоненты скорости:** $v_1 = \frac{dx}{dt'} = \dot{R}(t')x_1 + \dot{\delta}_x(t', x_1),$

$$v_2 = \frac{dy}{dt'} = \dot{R}(t')x_2, \quad v_3 = \frac{dz}{dt'} = \dot{R}(t')x_3. \quad (76)$$

- ▶ **Уравнение неразрывности:** $R = R_1, \quad \rho = \rho_1$ при $\delta'_x = 0$:

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + \frac{\dot{R} + \dot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} + 2H = 0, \quad \rho = \frac{R_1^3}{R^2} \frac{\rho_1}{R + \delta'_x}, \quad \rho_0 = \frac{R_1^3}{R^3} \rho_1. \quad (77)$$

- ▶ **Определение отклонения плотности:**

$$\delta\rho = \rho - \rho_0 = -\frac{R_1^3}{R^3} \frac{\delta'_x}{R + \delta'_x} \rho_1, \quad \delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -\frac{\delta'_x}{R}. \quad (78)$$

- ▶ **Уравнение движения:**

$$\vec{\nabla}\varphi = -\dot{\vec{v}} = -\ddot{R}\vec{x} - \ddot{\delta}_x(1, 0, 0). \quad (79)$$

- ▶ **Уравнение Пуассона:**

$$\Delta\varphi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\varphi) = -\left(\frac{1}{R + \delta'_x} \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \times$$

$$\times (\ddot{R}x_1 + \ddot{\delta}_x, \ddot{R}x_2, \ddot{R}x_3) = -\frac{\ddot{R} + \ddot{\delta}'_x}{R + \delta'_x} - 2\frac{\ddot{R}}{R} = 4\pi G(\rho - 2\rho_\Lambda), \quad (80)$$

$$-3\ddot{R} - \ddot{\delta}'_x - 2\frac{\ddot{R}}{R}\delta'_x = 4\pi G\rho(R + \delta'_x) - 8\pi G\rho_\Lambda(R + \delta'_x). \quad (81)$$

- ▶ Из модели $\ddot{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 R + \frac{\Lambda c^2}{3}R$, $\rho_\Lambda = \frac{c^2\Lambda}{8\pi G}$.

- ▶ **Линейное соотношение** $\ddot{\delta}'_x = \frac{8\pi G}{3}(\rho_0 + \rho_\Lambda)\delta'_x$. (82)

- ▶ После замены (78) и сокращений (как (67))

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G\rho_0\delta. \quad (83)$$

► Модель без излучения, $\Omega_{r\nu}^0 = 0$:

$$\frac{ada}{\sqrt{\Omega_d^0 a + \Omega_k^0 a^2 + \Omega_\Lambda^0 a^4}} = \frac{\sqrt{a} da}{\sqrt{\Omega_d^0 + \Omega_k^0 a + \Omega_\Lambda^0 a^3}} = H_0 dt. \quad (84)$$

Замена и обозначения:

$$a = \frac{y}{y_0}, \quad y_0 = \left(\frac{\Omega_\Lambda^0}{\Omega_d^0} \right)^{1/3}, \quad (85)$$

$$A = \frac{\Omega_k^0}{(\Omega_d^0)^{2/3} (\Omega_\Lambda^0)^{1/3}}, \quad \zeta_* = \frac{1}{(\Omega_\Lambda^0)^{1/6} (\Omega_d^0)^{1/3}}, \quad (86)$$

$$J_\nu(y, A) = \int_0^y \frac{y^\nu}{\sqrt{1 + Ay + y^3}} dy. \quad (87)$$

Решения

$$J_{1/2}(y, A) = H_\Lambda t, \quad \zeta_* J_{-1/2}(y, A) = \frac{H_0 R_0}{c} \eta. \quad (88)$$

► **Плоская модель**, $\Omega_k^0 = 0$, $A = 0$, $y_0 = 1.370$, $\zeta_* = 1.615$:

$$J_{1/2}(y, 0) = H_\Lambda t, \quad \zeta_* J_{-1/2}(y, 0) = \eta. \quad (89)$$

$$J_{1/2}(y, 0) = \frac{2}{3} \ln\left(y^{3/2} + \sqrt{1+y^3}\right), \quad J_{-1/2}(y, 0) = 2\sqrt{y}F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{7}{6}, -y^3\right). \quad (90)$$

$$y = \sinh^{2/3}\left(\frac{3}{2}H_\Lambda t\right), \quad a = \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3H_\Lambda^2}\right)^{1/3} y. \quad (91)$$

Возмущения $\delta_2(t) = \frac{\sqrt{1+y^3}}{y^{3/2}}$, $\delta_1(t) = \delta_2(t)J_{3/2}(y, 0)$. (92)

$$\delta_1(t) = \begin{cases} \frac{2}{5}yF\left(1, \frac{1}{3}, \frac{11}{6}; -y^3\right) & \text{при } 0 \leq y < 1, \\ \frac{2}{5}\frac{y}{1+y^3}F\left(1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}; \frac{y^3}{1+y^3}\right) & \text{при } y \sim 1, \\ c_0\delta_2(t) - \delta_3(t) & \text{при } y > 1, \end{cases} \quad (93)$$

где $c_0 = \Gamma(5/6)\Gamma(5/3)/\sqrt{\pi}$ и

$$\delta_3(t) = \frac{1}{2y^2}F\left(1, \frac{1}{6}, \frac{5}{3}; -\frac{1}{y^3}\right) = c_0\delta_2(t) - \delta_1(t). \quad (94)$$

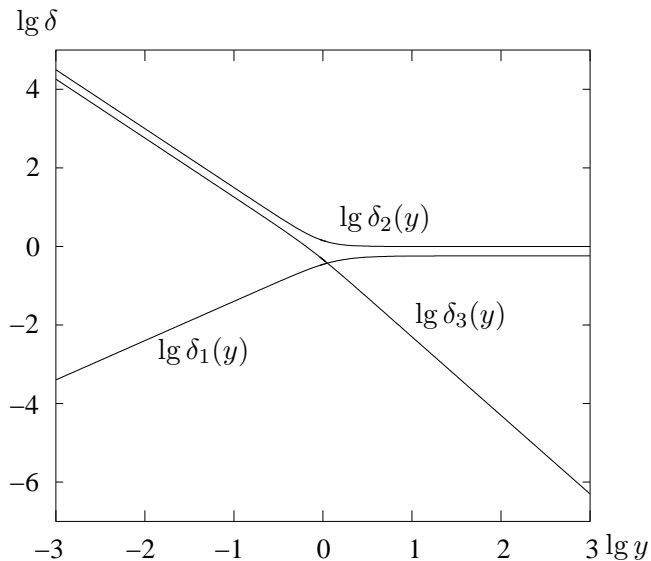


Рис. 9. Возмущения $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$ и $\delta_3(t)$ в зависимости от y .

- ▶ **Малые возмущения** $\delta(\vec{x}, t) = f_1(\vec{x})\delta_1(t) + f_2(\vec{x})\delta_2(t)$, (95)
где $f_1(\vec{x})$ и $f_2(\vec{x})$ — произвольные функции \vec{x}
(небольшие). $\delta(\vec{x}, t) = f_3(\vec{x})\delta_3(t)$ при $c_0 f_1 = -f_2 = -c_0 f_3$.

- ▶ **Нелинейные плоские возмущения**

$$\delta_x(t, x_1) = R(t)[F_1(x_1)\delta_1(t) + F_2(x_1)\delta_2(t)]. \quad (96)$$

Здесь $F'_i(x_1) = -f_i(x_1)$, $i = 1, 2, 3$, f_i только от x_1 .

Третья мода при $c_0 F_1 = -F_2 = -c_0 F_3$.

Таблица 7. Асимптотики $\delta_{\text{as}}(t) = \delta_i(t) \left[1 + \frac{d \ln \delta_i}{d \ln y} \right]$, $\frac{\delta v_1^{(i)}}{v_1} = \frac{F_i(x_1)}{x_1} \delta_{\text{as}}(t)$.

	$t \rightarrow 0$	$t \rightarrow +\infty$
Мода	$y \sim (3H_\Lambda t/2)^{2/3}$	$y \sim 2^{-2/3} e^{H_\Lambda t}$
1	$\frac{4}{5}y \left(1 - \frac{5}{11}y^3 \right)$	$c_0 + \frac{1}{2}y^{-2}$
2	$-\frac{1}{2}y^{-3/2} \left(1 - \frac{5}{2}y^3 \right)$	$1 - y^{-3}$
3	$-\frac{c_0}{2}y^{-3/2} + \frac{6}{5}y$	$-\frac{1}{2}y^{-2} \left(1 - \frac{2}{5}y^{-3} \right)$

§ 6. Современная теория

- ▶ **Метрика Фрийдмана в переменных** $dx_0, d\vec{r}$, $x_0 = x^0$,
 $ds_F^2 = dx_0^2 - a^2 d\vec{r}^2 = g_{\mu\nu}^F dx^\mu dx^\nu$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$,

$$\{g_{\mu\nu}^F\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}. \quad (97)$$

- ▶ **Возмущения метрики** $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^F + h_{\mu\nu}$.
- ▶ **Представление матрицы возмущений**

$$\{h_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 2D & \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial x^i} + (1/a)\mathcal{S}_i + a^2 \Xi_i \\ \text{sym} & 2a^2 \left(\mathcal{A}\delta_{ij} + \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial x^i \partial x^j} + \Xi_{ij} \right) \end{pmatrix}. \quad (98)$$

- ▶ **Моды:** скалярные $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$, векторные \mathcal{S}_i, Ξ_i , тензорная Ξ_{ij} .

Глава VI. Космологическая инфляция

§ 1. Успехи и проблемы космологии

- ▶ **Успехи:** РИ и горячая Вселенная, Стандартная модель, первичный нуклеосинтез и образование крупномасштабной структуры.
- ▶ **Проблема плоскостности.** $\Omega_k = -\frac{kc^2}{\dot{R}^2} = -\frac{kc^2}{H^2 R^2},$

$$r = \frac{\Omega_k}{\Omega_k^0} = \frac{H_0^2}{H^2} \frac{1}{a^2} = \frac{1}{1 + \Omega_{\text{rv}}^0 z(2+z) + \Omega_{\text{d}}^0 z - \Omega_{\Lambda}^0 \frac{z(2+z)}{(1+z)^2}}. \quad (99)$$

Таблица 8. Отличия от $k = 0$ в различные эпохи.

z	0	25000	$2 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^{11}$
r	1	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-15}$	$5 \cdot 10^{-20}$

$$r = r_1 \frac{z_1^2}{z^2}, \quad z \gg 1.$$

Чтобы сейчас было $\Omega_k^0 \sim 1$, надо, чтобы при

$$z > 10^{11} \text{ было } \Omega_k \sim \frac{\Omega_k^0}{\Omega_{\text{rv}}^0} \frac{1}{z^2}.$$

Таблица 9. Планковские величины

Величина	Обозн.	Разм.	Выраж.	Числ. знач.
Скор. света	c	$\frac{\text{см}}{\text{с}}$	c	$2.9979 \cdot 10^{10}$
Пост. Планка	\hbar	$\frac{\text{г см}^2}{\text{с}}$	\hbar	$1.0544 \cdot 10^{-27}$
Пост. тягот.	G	$\frac{\text{см}^3}{\text{г с}^2}$	G	$6.672 \cdot 10^{-8}$
Длина	l_{Pl}	см	$\sqrt{G\hbar/c^3}$	$1.6158 \cdot 10^{-33}$
Время	t_{Pl}	с	$\sqrt{G\hbar/c^5}$	$5.3898 \cdot 10^{-44}$
Масса	m_{Pl}	г	$\sqrt{c\hbar/G}$	$2.1766 \cdot 10^{-5}$
Энергия	E_{Pl}	$\frac{\text{г см}^2}{\text{с}^2}$	$\sqrt{c^5\hbar/G}$	$1.9562 \cdot 10^{16}$
Плотн. массы	ρ_{Pl}	$\frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$c^5/(G^2\hbar)$	$5.1593 \cdot 10^{93}$
Плотн. энерг.	$c^2\rho_{\text{Pl}}$	$\frac{\text{г}}{\text{см с}^2}$	$c^7/(G^2\hbar)$	$4.6369 \cdot 10^{114}$
Температура	T_{Pl}	К	$\frac{1}{k_{\text{B}}}\sqrt{\frac{c^5\hbar}{G}}$	$1.4172 \cdot 10^{32}$
Крас. смещ.	z_{Pl}	безр.	T_{Pl}/T_0	$5.1955 \cdot 10^{31}$

- ▶ Проблема горизонта. $l_{\text{GHor}} = R(\eta)\eta$.

$$z_{\text{Pl}} = T_{\text{Pl}}/T_0 = 5.1955 \cdot 10^{31}, l_{\text{H}}^{\text{Pl}} = l_{\text{H}}^0/z_{\text{Pl}} = 2.544 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Плоские модели $k = 0$. Пыль $R = R_m \frac{\eta^2}{2}, t = \frac{R_m}{c} \frac{\eta^3}{6},$

$$l_{\text{GHor}} = 3ct. \text{ Излучение } R = 2R_m\eta, t = \frac{R_m}{c}\eta^2, l_{\text{GHor}} = 2ct.$$

В планковскую эпоху $l_{\text{GHor}}^{\text{Pl}} = 2ct_{\text{Pl}} = 2l_{\text{Pl}} = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ см.}$

Сейчас $l_{\text{GHor}}^0 = 3ct_0 = 3 \cdot 3 \cdot 10^{10} \cdot 13.7 \cdot 10^9 \cdot 3.15 \cdot 10^7 = 3.8 \cdot 10^{28} \text{ см.}$

Тогда было бы $l_{\text{GHor}}^0/z_{\text{Pl}} = 3.8 \cdot 10^{28} / (5.2 \cdot 10^{31}) = 10^{-3} \text{ см.}$

- ▶ Проблема однородности. Сейчас $l_{\text{H}}^0 = 1.32 \cdot 10^{28} \text{ см,}$
было бы $l_{\text{H}}^0/z_{\text{Pl}} = 1.32 \cdot 10^{28} / (5.2 \cdot 10^{31}) = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$

Обмен был возможен на $l_{\text{Pl}} = 1.6 \cdot 10^{-33} \text{ см.}$

- ▶ Асимметрия зарядов. P^+e^- . Малые возмущения.

- ▶ Массовая плотность $\rho_{\text{Pl}} = 5 \cdot 10^{93} \text{ г/см}^3$. Излучение было бы $\rho_{\text{Pl}}/z_{\text{Pl}}^4 = 5 \cdot 10^{93} / (5.2 \cdot 10^{31})^4 = 7 \cdot 10^{-34} \text{ г/см}^3 \approx \rho_{\text{r}}^0$.

При сохранении массы было бы $\rho_{\text{Pl}}(2l_{\text{Pl}}/l_{\text{H}}^0)^4 =$
 $= 5 \cdot 10^{93} (3.2 \cdot 10^{-33} / 4.28 \cdot 10^{28})^4 = 1.6 \cdot 10^{-152} \text{ г/см}^3$.

- ▶ Магнитные монополи.

- ▶ Причина начала расширения.

§ 2. Теория инфляции

- ▶ Немного истории. Э.Б.Глинер (1965).

А.А.Старобинский (1980). Г.В.Чибисов и

В.Ф.Муханов (1981). А.Н.Guth (1981).

А.Д.Линде (1982).

- ▶ Разрешение проблемы плоскостности. $R = R_* e^{H_\Lambda t}$.

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = H_\Lambda. \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = \frac{3H_\Lambda^2}{8\pi G} = 3 \frac{\Lambda}{3} \frac{c^2}{8\pi G} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \rho_\Lambda.$$

- ▶ $\rho_\Lambda = \rho_{Pl}, \quad \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = \frac{c^5}{G^2 \hbar}, \quad \Lambda = \frac{8\pi c^3}{G \hbar} = \frac{8\pi}{l_{Pl}^2} = 9.626 \cdot 10^{66} \text{ см}^{-2}.$

$$H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{t_{Pl}} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{c}{l_{Pl}} = 5.370 \cdot 10^{43} \text{ 1/с.}$$

- ▶ Раздувание от планковских до хаббловских масштабов. $R = l_{Pl}$ при $t = t_{Pl}$. $R = l_H^{Pl}$ при $t = t_H^{Pl}$.

$$R = l_{Pl} \exp\{H_\Lambda(t - t_{Pl})\}, \quad l_H^{Pl} = l_{Pl} \exp\{H_\Lambda(t_H^{Pl} - t_{Pl})\}. \quad (100)$$

$$\frac{t_H^{Pl}}{t_{Pl}} = 1 - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \ln \frac{l_H^{Pl}}{l_{Pl}} = 24.227, \quad t_H^{Pl} = 1.3058 \cdot 10^{-42} < 10^{-37}.$$

- ▶ Разрешение проблемы горизонта. $l_{\text{GHor}} = \eta R$,

$$\eta = c \int_0^t \frac{dt'}{R(t')} = \frac{c}{R_*} \int_0^t e^{-H_\Lambda t'} dt' = \frac{c}{H_\Lambda R_*} (1 - e^{-H_\Lambda t}).$$

$$l_{\text{GHor}} = \frac{c}{H_\Lambda R_*} (1 - e^{-H_\Lambda t}) R_* e^{H_\Lambda t} = \frac{c}{H_\Lambda} (e^{H_\Lambda t} - 1).$$

$$l_{\text{GHor}} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} l_{\text{Pl}} \left[\exp \left\{ \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{t}{t_{\text{Pl}}} \right\} - 1 \right].$$

$$l_{\text{GHor}}^{\text{Pl}} = 0.55825 \cdot 10^{-33} \cdot 17.073 = 9.5309 \cdot 10^{-33} \text{ см.}$$

$$l_{\text{GHor}}^{\text{H}} = 0.55825 \cdot 10^{-33} \cdot 2.8440 \cdot 10^{30} = 1.5877 \cdot 10^{-3} \text{ см.}$$

- ▶ Разрешение проблемы однородности. У протона с массой покоя m_p будет масса m_{Pl} . Лоренцевский

$$\text{множитель тогда } \gamma = \frac{m_{\text{Pl}}}{m_p} = \frac{2.1766 \cdot 10^{-5}}{1.6726 \cdot 10^{-24}} = 1.3013 \cdot 10^{19}.$$

Время пересечения планковского объема $l_{\text{Pl}}/c = t_{\text{Pl}}$.

Оставшиеся неоднородности растягиваются.

- ▶ Квантовые флуктуации порождают асимметрию и неоднородности. Монополи распадаются.
- ▶ Квантовый вакуум передает энергию материи.

§ 3. Вторая инфляция

- ▶ Ускоренное расширение.
- ▶ При $t \gg 1$ масштабный множитель

$$a \approx \left(\frac{\Omega_d^0}{\Omega_\Lambda^0} \right)^{1/3} \text{sh}^{2/3} \left(\frac{3}{2} H_\Lambda t \right) \sim 0.46 e^{H_\Lambda t}. \quad (101)$$

- ▶ Реально экспоненциальное расширение начнется только, когда $t > \frac{1}{H_\Lambda} = t_\Lambda = 16.5$ Г лет.
- ▶ Две инфляции.

Таблица 10. Сравнение двух инфляций.

Величина	Первая	Вторая
Λ	$9.6 \cdot 10^{66} \text{ 1/см}^2$	$1.24 \cdot 10^{-56} \text{ 1/ см}^2$
H_Λ	$5.37 \cdot 10^{43} \text{ 1/с}$	$1.925 \cdot 10^{-18} \text{ 1/с}$
$1/H_\Lambda$	$1.862 \cdot 10^{-44} \text{ с}$	$5.1950 \cdot 10^{17} \text{ с}$
$1/H_\Lambda$	—	16.462 Г лет

§ 4. Второй горизонт

- ▶ Уравнение движения фотона $\chi = \eta_0 - \eta$,

$$\chi_e = \eta_0 - \eta_e < \eta_0, \quad \chi = \chi_e + \eta_e - \eta.$$

- ▶ Расстояние от наблюдателя до фотона, идущего к нему:

$$l_{rs} = l_H^0 a(\eta)(\eta_0 - \eta) = l_H^0 a(\eta)(\chi_e + \eta_e - \eta). \quad (102)$$

Параметр η ограничен: $\eta \leq \eta_\infty = 4.45$ при $t = \infty$.

Обращение $l_{rs} = 0$ возможно только, если $\chi_e + \eta_e < \eta_\infty$.

- ▶ В эпоху η первый и второй горизонты определяются, соответственно, равенствами $\chi = \eta$, $\chi = \eta_\infty - \eta$.
- ▶ Излучение из областей за первым горизонтом не имело достаточно времени, чтобы дойти до наблюдателя. Второй горизонт отделяет области, из которых излучение не может дойти до наблюдателя, так как эти области удаляются со скоростями, превосходящими скорость света, причем эти скорости только возрастают.

§ 5. Видимая и невидимая части Вселенной

- ▶ Сейчас мы видим Вселенную до $z \approx 10$, но это прошлое, излучение с $z = 10$ вышло при $t = 0.48$ Г лет и шло к нам $13.7 - 0.48 = 13.2$ Г лет. От $z = 3$ оно шло 11.5 Г лет.

Излучение, испущенное сейчас из мест с $z > 1.72$, никогда не дойдет до нас, то есть даже в бесконечно удаленном будущем.

- ▶ Первый горизонт можно назвать геометрическим горизонтом, физический горизонт — это сфера последнего рассеяния на $z \approx 1000$. Второй горизонт может быть назван кинематическим или динамическим.
- ▶ Горизонты совпали, когда $\chi_s = \eta_s = \eta_\infty - \eta_s$, $\eta_s = \eta_\infty / 2 = 2.22$, $x_s = 3.33$, $a_s = 0.377$, $z_s = 1.65$, в эпоху $t_s = 4.00$ Г лет от начала расширения, то есть $t_0 - t_s = 9.70$ Г лет тому назад, когда расстояние до них было 4.70 Гпк.

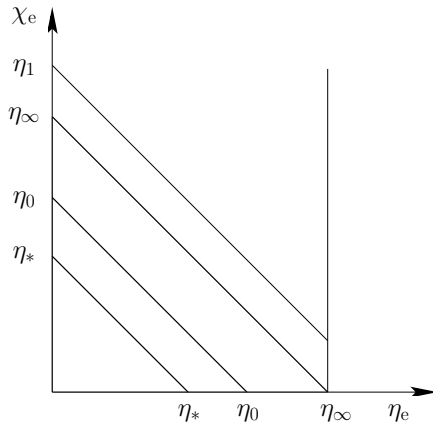
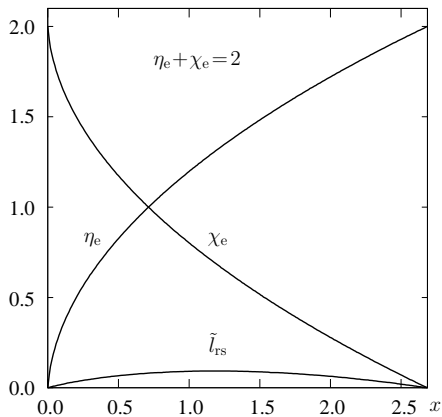
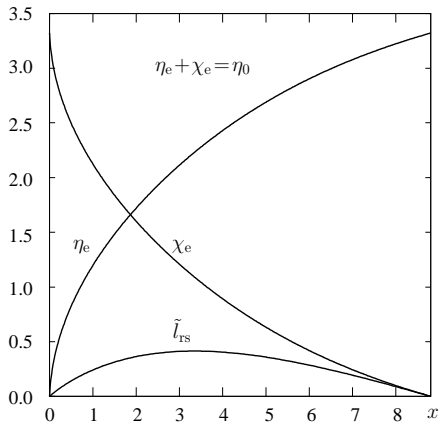


Рис. 10. Видимая и невидимая части Вселенной.

Положения геометрического горизонта — на оси ординат, кинематического — на прямой, соединяющей точки на осях $\eta_e = 0, \chi_e = \eta_\infty$ и $\eta_e = \eta_\infty, \chi_e = 0$. Пути фотонов — прямые, параллельные $\chi_e = \eta_0 - \eta_e$. При $\eta_e + \chi_e < \eta_\infty$ они рано или поздно дойдут до нашего места, а при $\eta_e + \chi_e \geq \eta_\infty$ — не дойдут никогда.

a*б*

**Рис. 11. Пути фотонов с приходом в эпохи:
 $\eta = 2$ (а) и $\eta_0 = 3.3224$ (б).**

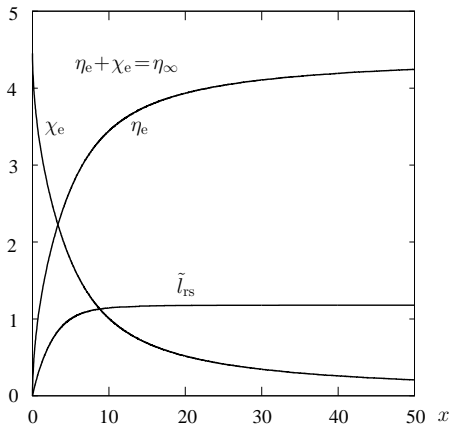
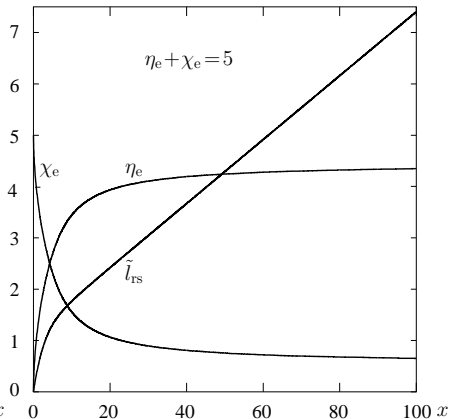
a*б*

Рис. 12. Пути фотонов с "приходом" в эпохи:
 $\eta_\infty = 4.4514$ (а) и $\eta = 5$ (б).

§ 6. Расстояния, скорости, ускорения горизонтов

- ▶ Расстояния до горизонтов при произвольном η :

$$l_{\text{GHor}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta) \eta = l_{\Lambda} x I_0(x, \beta), \quad l_{\Lambda} = l_{\text{H}}^0 \frac{\eta^*}{x_0} = \frac{l_{\text{H}}^0}{\sqrt{\Omega_{\Lambda}^0}} = 5.05 \text{ Гпк}, \quad (103)$$

$$l_{\text{KHOr}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta) (\eta_{\infty} - \eta) = l_{\Lambda} x [I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta)]. \quad (104)$$

- ▶ Скорости при $t \rightarrow \infty$, $x \sim 5.0 \cdot e^{H_{\Lambda} t} \rightarrow \infty$:

$$\dot{l}_{\text{GHor}} = H l_{\text{GHor}} + c = c \left[\frac{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}{x} I_0(x, \beta) + 1 \right] \sim c x I_0(\infty, \beta), \quad (105)$$

$$\dot{l}_{\text{KHOr}} = H l_{\text{KHOr}} - c = c \left[\frac{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}{x} [I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta)] - 1 \right] \sim \frac{3}{8} \frac{\beta}{x^3} c. \quad (106)$$

- ▶ Ускорения:

$$\ddot{l}_{\text{GHor}} = c H_{\Lambda} \left[\frac{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}{x^2} + \frac{x^4 - \beta x / 2 - 1}{x^3} I_0(x, \beta) \right] \sim c H_{\Lambda} I_0(\infty, \beta) x, \quad (107)$$

$$\ddot{l}_{\text{KHOr}} = c H_{\Lambda} \left[\frac{x^4 - \beta x / 2 - 1}{x^3} [I_0(\infty, \beta) - I_0(x, \beta)] - \frac{\sqrt{1 + \beta x + x^4}}{x^2} \right] \sim -\frac{9}{8} \frac{\beta}{x^3} c H_{\Lambda}. \quad (108)$$

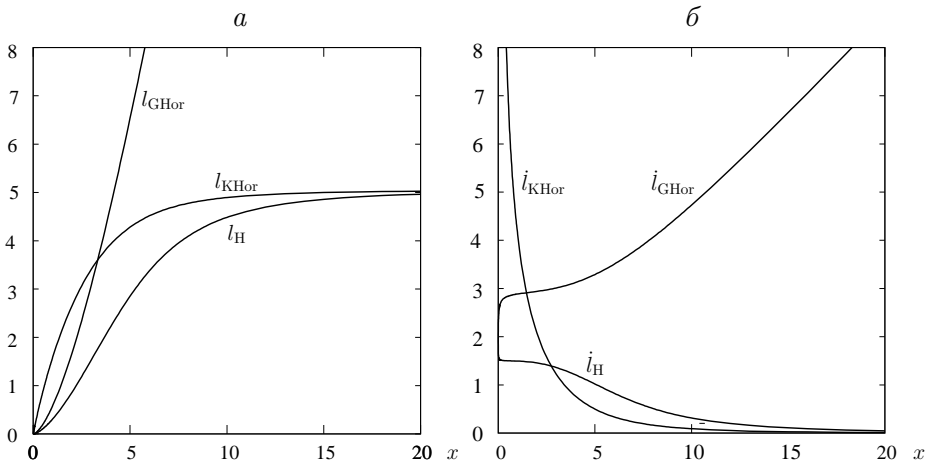


Рис. 13. *a*: Хаббловское расстояние и расстояния до горизонтов в Гпк.

***b*: Скорости изменения расстояний в скоростях света.**

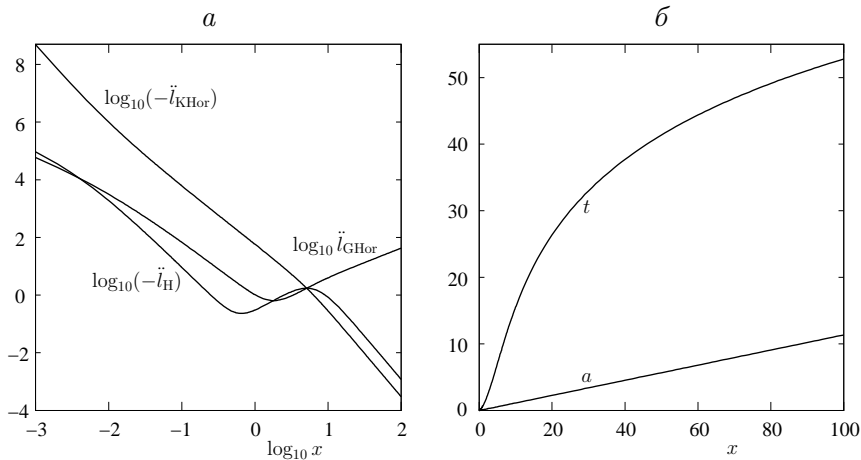


Рис. 14. а: Ускорения горизонтов и хаббловского расстояния. **б:** Связь a и t с x .

При $x = x_0$ получаются современные значения

$$\text{ускорений: } \ddot{l}_{\text{GHor}}^0 = 3.45 H_{\Lambda} c = 19.9 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2,$$

$$\ddot{l}_{\text{KHor}}^0 = -1.95 H_{\Lambda} c = -11.3 \cdot 10^{-8} \text{ см/с}^2.$$

§ 7. Связь с внеземными цивилизациями

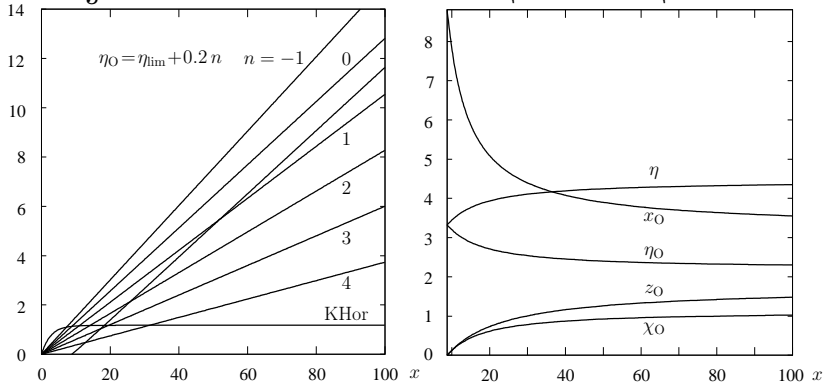


Рис. 15. а: Путь сигнала к объектам.

б: Достижимые объекты.

До сигнала $l_{\text{ph}} = l_{\text{H}}^0 a(\eta)(\eta - \eta_0)$, до объекта $l_0 = l_{\text{H}}^0 a(\eta) \chi_0$.

Если $l_{\text{ph}} = l_0$, то $\chi_0 = \eta - \eta_0$. Так как $\eta \leq \eta_\infty$, то

$\chi_0 \leq \eta_\infty - \eta_0 = \chi_{\text{lim}} = 1.13$. До второго горизонта сигнал

дойдет при $\eta_{\text{h}} - \eta_0 = \eta_\infty - \eta_{\text{h}}$, $\eta_{\text{h}} = \frac{\eta_0 + \eta_\infty}{2} = 3.89$. Тогда

$l_{\text{ph}} = 5.02$ Гпк и ответ возможен при $l_0 < 5$ Гпк.

Эволюция красного смещения и видимой светимости

- ▶ $a = R/R_0 = 1/(1+z)$ и z привязаны к $R_0 = R(t_0)$. $R(t)$.
- ▶ **Эффект Сендеджа–Лоeba.** $L_{\text{bb}}^0 = L_0 / (4\pi(l_{\text{bb}}^0)^2) l_{\text{bb}}^0$.
A.Sandage (1962) - пыль, A.Loeb (1998) - L_α -лес.
- ▶ t , $R(t)$, χ не зависят от t_0 . Другая эпоха t'_0 .
- ▶ $z(t, t_0)$, $z(t_0, t_0) = 0$, $z(t, t'_0)$, $z(t'_0, t'_0) = 0$.
- ▶ $\chi = \eta'_0 - \eta' = \eta_0 - \eta$, $\eta'_0 - \eta_0 = \eta' - \eta$, $cdt = R(t)d\eta$, $d\eta = d\eta_0$.
- ▶ $dt_0 = \frac{R(t_0)}{c} d\eta_0 = \frac{R(t_0)}{c} d\eta = \frac{R(t_0)}{R(t)} dt$, $\frac{dt}{dt_0} = \frac{R(t)}{R(t_0)} = \frac{1}{1+z}$. (109)

- ▶ $\frac{dR(t)}{dt_0} = \frac{dR(t)}{dt} \frac{dt}{dt_0} = \dot{R}(t) \frac{R(t)}{R(t_0)}$, $\frac{dR(t_0)}{dt_0} = \dot{R}(t_0)$. (110)

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt_0} &= \frac{d(1+z)}{dt_0} = \frac{d}{dt_0} \frac{R(t_0)}{R(t)} = \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t)} - \frac{R(t_0)}{R^2(t)} \dot{R}(t) \frac{R(t)}{R(t_0)} = \\ &= \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)} \frac{R(t_0)}{R(t)} - \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = H_0(1+z) - H. \end{aligned} \quad (111)$$

$$\dot{L}_{\text{bb}}^0 = -2 \frac{L_0}{4\pi(l_{\text{bb}}^0)^3} \frac{dl_{\text{bb}}^0}{dt_0} = -2 \frac{L_{\text{bb}}^0}{l_{\text{bb}}^0} \frac{dl_{\text{bb}}^0}{dt_0} = -2L_{\text{bb}}^0 \left(2H_0 - \frac{H}{1+z} \right). \quad (112)$$

$$\frac{1}{H_0} \frac{d \ln L_{bb}^0}{dt} = -2 \left(2 - \frac{1}{1+z} \frac{H}{H_0} \right). \quad (113)$$

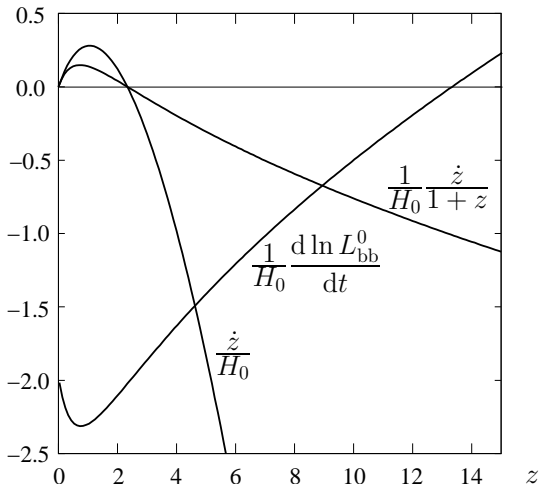


Рис. 16. Изменения красного смещения и светимости объектов как функции z .

Независимые константы и переменные

- ▶ **Постоянные** $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} = 6.63 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3$,
 $M_d = \frac{4\pi}{3} \rho_d R^3 = 2.49 \cdot 10^{55} \text{ г}$, $W = 4\pi \rho_{\text{гв}} R^4 = 4.22 \cdot 10^{80} \text{ г}\cdot\text{см}$,

- ▶ **Константы.** $H_\Lambda = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} c = 59.4 \frac{\text{км}}{\text{с Мпк}} = 1.925 \cdot 10^{-18} \frac{1}{\text{с}}$,

$$\beta = \frac{3M_d}{W^{3/4}(4\pi\rho_\Lambda)^{1/4}} = 265.69, \quad \eta_* = \left(\frac{9}{2} \frac{c^2}{GW\Lambda}\right)^{1/4} = 10.38. \quad (114)$$

- ▶ **Переменная** $x = x_R R(t)$, $x_R = \left(\frac{4\pi\rho_\Lambda}{W}\right)^{1/4} = 6.67 \cdot 10^{-28} \frac{1}{\text{см}}$.

- ▶ **Константа**₁
 $\zeta_* = \frac{1}{(\Omega_\Lambda)^{1/6}(\Omega_d^0)^{1/3}} = \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{2G}} \frac{1}{\rho_\Lambda^{1/6} M_d^{1/3}} = 1.61.$

- ▶ **Переменная** $y = y_R R(t)$,
 $y_R = \left(\frac{4\pi}{3} \frac{\rho_\Lambda}{M_d}\right)^{1/3} = 1.04 \cdot 10^{-28} \frac{1}{\text{см}}$.