Фильтрация временных рядов

Р.В. Балуев — Анализ временных рядов

СПбГУ

СПб, 24 апреля 2020 г.

Определение фильтрации

Пусть имеется функция $x = x(t)$, $-\infty < t < +\infty$. Её преобразование Фурье $X(\omega) := \mathcal{F}[x](\omega)$ есть линейное интегральное преобразование $x(t)$.
Фильтр — такое линейное интегральное преобразование $y(t) = L[x](t)$, что

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \tag{1}$$

В таком случае $H(\omega)$ называется передаточной функцией фильтра. Во временной области преобразование $L[x]$ можно записать в виде свертки:

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t')h(t-t')dt' = x * h. \tag{2}$$

Сам термин «фильтр» возникает из свойства (1), которое следует из (2) по теореме о свёртке, если $H(\omega) = \mathcal{F}[h](\omega)$. Выбирая различные весовые функции h, мы таким образом контролируем передаточную функцию.

Общие свойства

Обычно требуется, что фильтр должен сохранять среднее значение функции, т.е. константу переводить в ту же константу. Отсюда следует условие:

$$H(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = 1. \tag{3}$$

В общем случае, $H(\omega)$ — комплекснозначная функция, т.е. она меняет и амплитуду входного спектра, и фазу. Однако если весовая функция $h(t)$ чётная, $h(t) = h(-t)$, то тогда $H(\omega)$ вещественнозначна и фаза исходного спектра не затрагивается.

Спектр мощности фильтрованного случайного процесса

Пусть имеется случайный процесс (с.п.), представленный как ансамбль реализаций: $X(t) = \{x_k(t)\}$. В этом случае под фильтрацией с.п. понимается применение фильтра к каждой его реализации:

$$Y(t) = \{y_k(t)\}, \quad y_k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_k(t')h(t-t')dt'. \tag{4}$$

Спектр мощности тогда преобразуется следующим образом (без док-ва, следует из определения спектра мощности):

$$g_Y(\omega) = |H(\omega)|^2 g_X(\omega). \tag{5}$$

Периодограмма фильтрованного случайного процесса

С периодограммами сложнее. Пусть $x(t)$ — входной сигнал (реализация с.п.), $X(\omega) = \mathcal{F}[x]$, $y(t)$ есть фильтрованный сигнал со своим $Y(\omega)$, $w(t)$ — временное окно. Тогда введём функции:

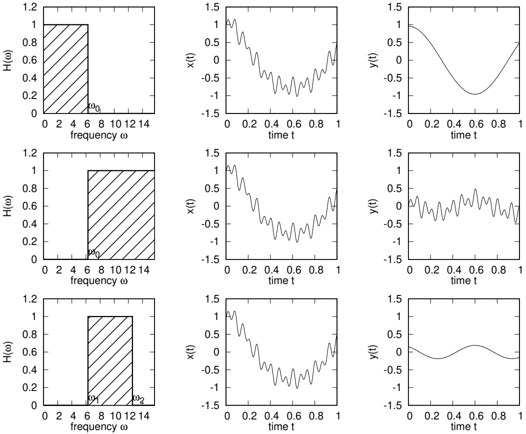
$$\widetilde{X}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(t)x(t)e^{-i\omega t}dt = \mathcal{F}[wx](\omega), \quad \widetilde{Y}(\omega) = \mathcal{F}[wy](\omega). \quad (6)$$

Периодограммы в таком случае запишутся так:

$$P_x(\omega) = |\widetilde{X}(\omega)|^2, \qquad P_y(\omega) = |\widetilde{Y}(\omega)|^2 \quad (7)$$

Из-за наличия в формулах мешающего $w(t)$, линейной связи между ними нет, $P_y \neq |H|^2 P_x$. Это значит, что никакая фильтрация не в состоянии ликвидировать ложные пики, которые возникают из-за особенностей распределения наблюдений во времени.
Тем не менее, в тех частотных интервалах, где периодограммы можно считать хорошими оценками спектра мощности (влияние окна наблюдений невелико), связь выполнена приближённо, $P_y \approx |H|^2 P_x$.

Идеальные фильтры



Низкочастотный, lowpass

LP_{ω_0}, аналогичеен сглаживанию

Высокочастотный, highpass

$HP_{\omega_0} = 1 - LP_{\omega_0}$, выполняет детрендинг

Полосовой, bandpass

$BP_{\omega_1\omega_2} = HP_{\omega_1} LP_{\omega_2}$

Идеальный низкочастотный фильтр

Перечисленные идеальные фильтры все можно выразить через низкочастотный LP_{ω_0}, где ω_0 — порог обрезания частоты. Его передаточная функция:

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0. \end{cases} \tag{8}$$

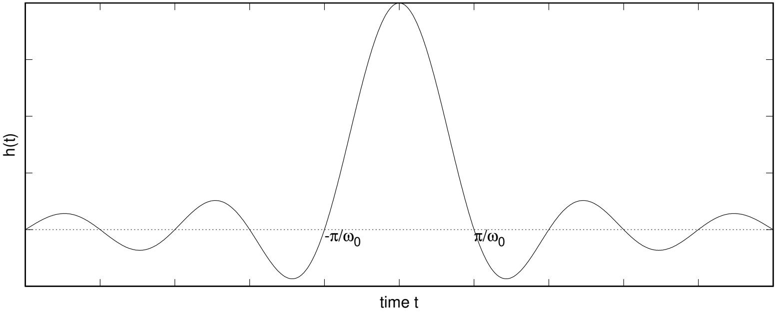
Применяя обратное преобразование Фурье, можем отсюда получить весовую функцию $h = \mathcal{F}^{-1}[H]$:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\omega_0}^{+\omega_0} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}. \tag{9}$$

(проверить!)

Идеальный низкочастотный фильтр

$$h(t) = \frac{\omega_0}{\pi} \frac{\sin \omega_0 t}{\omega_0 t}. \qquad (10)$$



Весовая функция идеального низкочастотного фильтра имеет неочевидную форму, с отрицательными весами. Из-за наличия участков $h(t) < 0$ это не совсем сглаживание. Если же задать $h(t) \geq 0$, такой фильтр не будет идеальным (будет пропускать частоты выше ω_0).

Низкочастотный фильтр на конечном интервале

Если сигнал наблюдается только на конечном интервале времени, то идеальный НЧ-фильтр невозможен, т.к. его весовая функция остается ненулевой на сколь угодно больших t. Тем не менее, на этой основе можно построить аппрокисмацию идеального НЧ-фильтра. Рассмотрим усечённую весовую функцию

$$\tilde{h}_a(t) = h(t)w(t), \quad w(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq a, \\ 0, & |t| > a. \end{cases} \tag{11}$$

Соответствующая передаточная функция получается так:

$$\widetilde{H}_a(\omega) = \mathcal{F}[hw](\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(\omega')W(\omega - \omega')d\omega', \tag{12}$$

где большие буквы означают преобразование Фурье от малых букв. Таким образом, внесение усечения через функцию $w(t)$ выливается в «размывание» передаточной функции, она может быть лишь приближённой к идеальной.

Низкочастотный фильтр на конечном интервале

Поскольку

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0. \end{cases}, \quad W(\omega) = 2a\frac{\sin\omega a}{\omega a}, \tag{13}$$

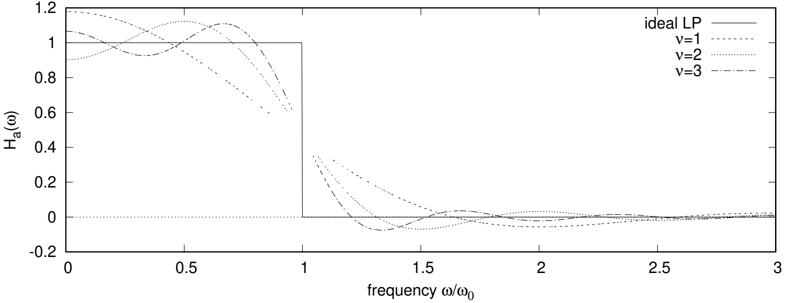
то отсюда несложно вывести (проверить!)

$$\widetilde{H}_a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{a(\omega+\omega_0)}^{a(\omega-\omega_0)} \frac{\sin f}{f} df = \frac{1}{\pi}\left\{ Si\left[\pi\nu\left(1+\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right] + Si\left[\pi\nu\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]\right\}, \tag{14}$$

где Si — интегральный синус, а безразмерный параметр $\nu = a\omega_0/\pi$ характеризует длину усечения $\tilde{h}_a$ в единицах π/ω_0 (положение первого нуля, см. рис. выше).

Низкочастотный фильтр на конечном интервале

$$\widetilde{H}_a(\omega) = \frac{1}{\pi}\left\{ Si\left[\pi\nu\left(1+\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right] + Si\left[\pi\nu\left(1-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]\right\}. \qquad (15)$$



Таким образом, идеальный фильтр на конечном интервале времени невозможен, но его можно построить приближённо, выбрав такие параметры, что $a\omega_0 \gg 1$.

Дискретные фильтры скользящего типа

Базовое определение фильтра

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t')h(t-t')dt' \tag{16}$$

неприменимо, если функция $x(t)$ задана на дискретном множестве, $x_k = x(k\Delta t)$. В этом случае вычислить интеграл можно только если $h(t)$ удовлетворяет аналогичному ограничению дискретности:

$$h(t) = \sum_{s=-m}^{m} h_s \delta(t - s\Delta t). \tag{17}$$

Тогда имеем, после преобразований (проверить!),

$$y(t) = \sum_{s=-m}^{m} h_s x(t - s\Delta t), \quad y(k\Delta t) = y_k = \sum_{s=-m}^{m} h_s x_{k-s}. \tag{18}$$

Дискретные фильтры скользящего типа

Таким образом, имеем следующий дискретный фильтр:

$$y_k = \sum_{s=-m}^{m} h_s x_{k-s}. \tag{19}$$

Если x_k заданы в интервале $-N \leq k \leq N$ $(2N + 1$ точек), то индексы y_k пробегают только интервал $-(N - m) \leq k \leq (N - m)$, т.е. происходит потеря $2m$ точек из-за краевых эффектов.
Передаточная функция такого фильтра имеет следующий вид:

$$H(\omega) = \sum_{s=-m}^{m} h_s e^{-is\omega\Delta t}. \tag{20}$$

При этом на веса h_s обычно накладывают условие нормировки $H(0) = 1$, или $\sum_{s=-m}^{m} h_s = 1$.

Случай равных весов (скользящее среднее)

Пусть все $h_s = h_0$. Из условия нормировки также следует $h_0 = 1/r$, где $r = 2m+1$. Таким образом,

$$y_k = \frac{1}{2m+1} \sum_{s=-m}^{m} x_{k-s}. \tag{21}$$

Такая операция называется сглаживанием по r точкам, в частности $m = 1$ даёт $r = 3$, «сглаживание по тройкам», а $m = 2$ даёт $r = 5$, «сглаживание по пятёркам», и т.п. (или осреднением по тройкам, пятёркам и т.п.) Такие простые фильтры довольно распространены на практике.
Передаточная функция такого фильтра (проверить!):

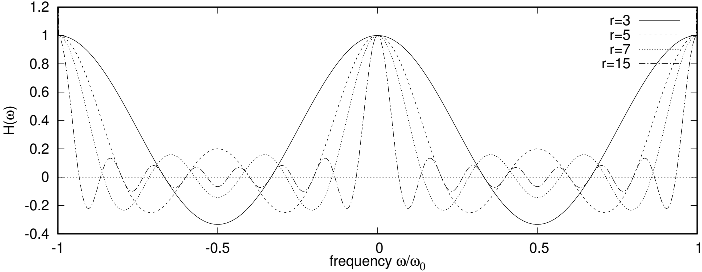
$$H(\omega) = \frac{1}{r} \sum_{s=-m}^{m} e^{-is\omega\Delta t} = \frac{\sin \frac{r\omega\Delta t}{2}}{r \sin \frac{\omega\Delta t}{2}}. \tag{22}$$

По форме она напоминает спектральное окно равномерного временного ряда, которое мы изучали ранее.

Случай равных весов (скользящее среднее)

Теперь перепишем $H(\omega)$ так:

$$H(\omega) = \frac{\sin \frac{r\omega\Delta t}{2}}{r \sin \frac{\omega\Delta t}{2}} = \frac{\sin r\pi \frac{\omega}{\omega_0}}{r \sin \pi \frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\Delta t}. \tag{23}$$



Как видим, $H(\omega)$ довольно далека от идеального НЧ-фильтра. Даже если r велико, порог пропускания остаётся нерезким. Всегда пропускаются полосы вблизи частот, кратных ω_0 (это неустранимый эффект дискретности).

Способ фильтрации через периодограмму (метод CLEAN и аналоги, очень кратко)

Если временной ряд неравномерный, то скользящий фильтр неприменим. Что делать?

1. Строим спектр сверхразрешения, как в методе CLEAN.
2. Отбрасываем частотные компоненты, превосходящие заданный порог ω_0.
3. Конструируем фильтрованный временной ряд как сумму оставшихся частотных компонент (вычисляемых уже на равномерной сетке).

Этот подход включает в себя как фильтрацию (отбрасывание высоких частот), так и отчасти интерполяцию (восстановление значений ряда на участках, где наблюдений не было). Такой метод аналогичен тригонометрической интерполяции.