

что из оценки (27) при $k=l$ следует, что $z_l \in U_r(z_*)$. Поэтому согласно условию (25) имеем $|f'(z_l)| \geq m_1 > 0$.

Далее, оценим

$$F(z_l) = \int_{z_*}^{z_l} (z - z_*) f''(z) dz.$$

Учитывая, что $z_l \in U_r(z_*)$, можно получить оценку этого интеграла так же, как и оценку $F(z_0)$, а именно

$$|F(z_l)| \leq \frac{M_2}{2} |z_l - z_*|^2.$$

Тогда из (29) при $k=l$ получим

$$|z_{l+1} - z_*| \leq \frac{M_2 |z_l - z_*|^2}{2m_1},$$

и, учитывая (27) при $k=l$, приходим к неравенству (27) при $k=l+1$. Теорема 5 доказана.

Заметим, что условие сходимости (26) означает близость на комплексной плоскости начального приближения z_0 к искомому корню z_* . В частности, это условие может не выполняться для вещественных начальных приближений.

При численной реализации метода Ньютона можно пользоваться комплексной арифметикой, однако иногда бывает удобнее разделить в формулах (24) действительные и мнимые части и проводить вычисления только с вещественными числами.

§ 4. Итерационные методы для систем нелинейных уравнений

1. **Общие понятия.** Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0, \\ &\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_m) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где f_i , $i=1, 2, \dots, m$, — функции вещественных переменных x_1, \dots, x_m . В дальнейшем систему (1) будем рассматривать как операторное уравнение в некотором линейном пространстве H размерности m . Обозначим

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_m)^T \in H, \\ F(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T \end{aligned}$$

и запишем (1) в виде операторного уравнения

$$F(x) = 0, \quad (2)$$

где $F: H \rightarrow H$ — отображение, нелинейное, вообще говоря, из H в H .

Многие одношаговые итерационные методы для решения системы (2) можно записать в виде

$$B_{k+1} \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} + F(x^k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, x_0 \text{ задан,} \quad (3)$$

где k — номер итерации,

$$x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k)^T,$$

τ_{k+1} — числовые параметры, B_{k+1} — матрица $m \times m$, имеющая обратную.

Если F — линейный оператор, то (3) совпадает с канонической формой одношагового итерационного метода (см. § 1 гл. 2), т. е. в виде (3) можно записать любой одношаговый метод для линейной системы уравнений. В случае нелинейной системы (1) возможны методы, содержащие новую итерацию x^{k+1} нелинейно, и тем самым не представимые в виде (3). Однако мы по-прежнему будем называть канонической формой запись итерационного метода в виде (3).

Для нахождения x^{k+1} по известному x^k из уравнения (3) необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$B_{k+1} x^{k+1} = g(x^k), \quad (4)$$

где $g(x^k) = B_{k+1} x^k - \tau_{k+1} F(x^k)$. Метод (3) называется *явным*, если $B_{k+1} = E$ для всех $k = 0, 1, \dots$, и *неявным* — в противном случае. Метод (3) называется *стационарным*, если B и τ не зависят от номера итерации k . Систему линейных уравнений (4) можно решать либо прямым, либо итерационным методом. В последнем случае итерации, приводящие к решению системы (4), называются *внутренними итерациями*, а итерации (3) — *внешними итерациями*.

2. Сходимость стационарного метода. Остановимся кратко на вопросе о сходимости метода (3). Предположим, что метод (3) — стационарный, т. е. B и τ не зависят от k . Тогда уравнение (3) можно переписать в виде

$$x^{k+1} = S(x^k), \quad (5)$$

а исходное уравнение (2) — в виде

$$x = S(x), \quad (6)$$

где $S(x) = x - \tau B^{-1} F(x)$.

Будем считать, что H — конечномерное линейное нормированное пространство, т. е. что определен функционал $\|x\|$, удовлетворяющий всем аксиомам нормы.

Точка $x_* \in H$, для которой $S(x_*) = x_*$, называется *неподвижной точкой оператора S*. Очевидно, что точка x_* является решением операторного уравнения (2) тогда и только тогда, когда она является неподвижной точкой оператора S . Таким образом, отыскание корней уравнения (2) эквивалентно отысканию неподвижных точек оператора S .

Говорят, что S является *сжимающим оператором на множестве* $K \subseteq H$ с коэффициентом сжатия q , если существует число $q \in (0, 1)$ такое, что для любых $x, y \in K$ выполняется неравенство

$$\|Sx - Sy\| \leq q \|x - y\|.$$

Теперь мы в состоянии сформулировать теорему, которая называется *принципом сжимающих отображений* и содержит условия сходимости метода простой итерации

$$x^{k+1} = S(x^k) \quad (7)$$

в конечномерном линейном нормированном пространстве H . Она является многомерным аналогом теоремы 1 из § 2.

Теорема 1. Пусть оператор S определен на множестве

$$\bar{U}_r(a) = \{x \in H: \|x - a\| \leq r\}$$

и является сжимающим оператором на этом множестве с коэффициентом сжатия q , причем

$$\|S(a) - a\| \leq (1 - q)r, \quad 0 < q < 1. \quad (8)$$

Тогда в $\bar{U}_r(a)$ оператор S имеет единственную неподвижную точку x_* и итерационный метод (7) сходится к x_* при любом $x^0 \in \bar{U}_r(a)$. Для погрешности справедливы оценки

$$\|x^k - x_*\| \leq q^k \|x^0 - x_*\|, \quad (9)$$

$$\|x^k - x_*\| \leq \frac{q^k}{1 - q} \|S(x^0) - x^0\|. \quad (10)$$

Доказательство теоремы 1 можно найти в [42].

3. Примеры итерационных методов.

Пример 1. Метод релаксации представляет собой частный случай метода (3), когда $B_{k+1} = E$, $\tau_{k+1} = \tau$. Это стационарный итерационный метод, который можно записать в виде

$$x^{k+1} = S(x^k),$$

где

$$S(x) = x - \tau F(x).$$

Метод сходится, если $\|S'(x_*)\| < 1$. В данном случае $S'(x) = E - \tau F'(x)$ и

$$F'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Пример 2. Метод Пикара. Пусть $F(x)$ представляется в виде

$$F(x) = Ax + G(x),$$

где A — матрица $m \times m$. Тогда итерации можно определить следующим образом:

$$Ax^{k+1} + G(x^k) = 0.$$

Итерационный метод можно переписать в виде

$$A(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0,$$

т. е. в канонической форме (3) с $B_{k+1} = A$, $\tau_{k+1} = 1$. Можно и здесь ввести итерационный параметр и рассматривать более общий метод

$$A \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau} + F(x^k) = 0.$$

Пример 3. Метод Ньютона для системы уравнений (1) строится следующим образом.

Пусть приближение $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k)^T$ уже известно. Выпишем разложение функции $f_i(x_1, x_2, \dots, x_m)$ по формуле Тейлора в точке x^k ,

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = f_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_m^k) + (x_1 - x_1^k) \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_1} + \\ + (x_2 - x_2^k) \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_2} + \dots + (x_m - x_m^k) \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_m} + O(|x - x^k|^2),$$

и отбросим величины второго порядка малости. Тогда система (1) заменится системой уравнений

$$\sum_{j=1}^m (x_j - x_j^k) \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} + f_i(x^k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (12)$$

линейной относительно приращений $x_j - x_j^k$, $j = 1, 2, \dots, m$. Решение $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ системы (12) примем за следующее приближение и обозначим через

$$x^{k+1} = (x_1^{k+1}, \dots, x_m^{k+1})^T.$$

Таким образом, итерационный метод Ньютона для (1) определяется системой уравнений

$$\sum_{j=1}^m (x_j^{k+1} - x_j^k) \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} + f_i(x^k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (13)$$

из которой последовательно, начиная с заданного $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)^T$, находятся векторы x^k , $k = 1, 2, \dots$.

Систему (13) можно записать в векторном виде

$$F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, x^0 \text{ задан}, \quad (14)$$

где матрица $F'(x)$ определена согласно (11). Таким образом, метод Ньютона имеет канонический вид (3), где

$$B_{k+1} = F'(x^k), \quad \tau_{k+1} = 1.$$

Для реализации метода Ньютона необходимо существование матриц $(F'(x^k))^{-1}$, обратных $F'(x^k)$. По поводу сходимости метода Ньютона для систем уравнений можно сказать то же, что и в слу-

чае одного уравнения, а именно, метод имеет квадратичную сходимость, если начальное приближение выбрано достаточно хорошо.

Приведем без доказательства одну из теорем о сходимости метода Ньютона.

Пусть E^m — множество m -мерных вещественных векторов с нормой $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2\right)^{1/2}$, $\|A\|$ — норма матрицы A , подчиненная данной норме вектора. Обозначим

$$U_r(x^0) = \{x \in E^m: \|x - x^0\| < r\}$$

и предположим, что в шаре $U_r(x^0)$ функции $f_i(x)$, $i=1, 2, \dots, m$, непрерывно дифференцируемы.

Теорема 2. Предположим, что в $U_r(x^0)$ матрица $F'(x)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L , т. е.

$$\|F'(x^1) - F'(x^2)\| \leq L\|x^1 - x^2\|$$

для любых $x^1, x^2 \in U_r(x^0)$. Пусть в $U_r(x^0)$ матрица $(F'(x))^{-1}$ существует, причем элементы ее непрерывны и

$$\|(F'(x))^{-1}\| \leq M.$$

Если начальное приближение x^0 таково, что $\|F(x_0)\| \leq \eta$ и

$$q = \frac{M^2 L \eta}{2} < 1,$$

причем

$$M\eta \sum_{k=0}^{\infty} q^{2^k-1} < r,$$

то система уравнений (2) имеет решение $x_* \in \bar{U}_r(x_0)$, к которому сходится метод Ньютона (14). Оценка погрешности дается неравенством

$$\|x^k - x_*\| \leq M\eta \frac{q^{2^k-1}}{1 - q^{2^k}}.$$

Доказательство теоремы 2 можно найти в [42].

Пример 4. Модифицированный метод Ньютона имеет вид

$$F'(x^0)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0 \quad (15)$$

и обладает линейной сходимостью. Упрощение в численной реализации по сравнению с обычным методом Ньютона состоит в том, что матрицу $F'(x)$ надо обращать не на каждой итерации, а лишь один раз. Возможно циклическое применение модифицированного метода Ньютона, когда $F'(x)$ обращается через определенное число итераций.

Пример 5. Метод Ньютона с параметром имеет вид

$$F'(x^k) \frac{x^{k+1} - x^k}{\tau_{k+1}} + F(x^k) = 0. \quad (16)$$

Рассмотренные до сих пор методы являлись линейными относительно новой итерации x^{k+1} . Возможны и нелинейные методы, ког-

да для вычисления x^{k+1} приходится решать нелинейные системы уравнений. Приведем примеры таких методов.

Пример 6. *Нелинейный метод Якоби* для системы (1) имеет вид

$$f_i(x_1^k, x_2^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i^{k+1}, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k) = 0, \quad (17)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь для отыскания x^{k+1} необходимо решить m независимых скалярных уравнений. Для решения скалярного уравнения можно применить какой-либо из итерационных методов, рассмотренных в § 1, причем не обязательно применять один и тот же метод для всех уравнений.

Пример 7. *Нелинейный метод Зейделя* состоит в последовательном решении уравнений

$$f_i(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_i^{k+1}, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k) = 0 \quad (18)$$

относительно переменной x_i^{k+1} , $i = 1, 2, \dots, m$.

Большое распространение получили гибридные методы, когда внешние итерации осуществляются одним методом, а внутренние — другим. При этом число внутренних итераций может быть фиксированным и не очень большим, так что внутренние итерации не доводятся до сходимости. В результате получается некоторый новый метод, сочетающий свойства исходных методов. Приведем примеры таких методов.

Пример 8. *Внешние итерации — по Зейделю и внутренние — по Ньютону*. Здесь в качестве основной (внешней) итерации выбирается нелинейный метод Зейделя (18), а для нахождения x_i^{k+1} используется метод Ньютона. Обозначим $y_i = x_i^{k+1}$. Тогда итерации определяются следующим образом:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, y_i^s, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k)(y_i^{s+1} - y_i^s) +$$

$$+ f(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, y_i^s, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k) = 0,$$

$$s = 0, 1, \dots, l, \quad y_i^0 = x_i^k, \quad y_i^{l+1} = x_i^{k+1}, \quad (19)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь индексом s обозначен номер внутренней итерации.

Иногда в (19) делают всего одну внутреннюю итерацию, полагая $l=0$, $y_i^0 = x_i^k$, $y_i^1 = x_i^{k+1}$. Тогда приходят к следующему итерационному методу:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k)(x_i^{k+1} - x_i^k) +$$

$$+ f_i(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, x_{i+1}^k, \dots, x_m^k) = 0, \quad k = 0, 1, \dots \quad (20)$$

В частности, при $m=2$ метод (20) принимает вид

$$\frac{\partial f_1(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_1} (x_1^{k+1} - x_1^k) + f_1(x_1^k, x_2^k) = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^{k+1}, x_2^k)}{\partial x_2} (x_2^{k+1} - x_2^k) + f_2(x_1^{k+1}, x_2^k) = 0.$$

Пример 9. *Внешние итерации — по Ньютону и внутренние — по Зейделю.* Запишем метод Ньютона для системы (2) в виде

$$F'(x^k) (x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0, \quad (22)$$

где $F'(x^k) = (a_{ij})$, $a_{ij} = \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, m$. Для решения системы линейных уравнений (22) воспользуемся методом Зейделя. Напомним (см. § 1 гл. 2), что для линейной системы

$$A\omega + F = 0 \quad (23)$$

метод Зейделя строится следующим образом. Матрица A представляется в виде суммы $A = A_- + D + A_+$, где матрицы A_- , A_+ , D соответственно нижняя треугольная, верхняя треугольная и диагональная. Итерации метода Зейделя строятся по правилу

$$(A_- + D)\omega^{s+1} + A_+\omega^s + F = 0, \quad s = 0, 1, \dots, l, \quad (24)$$

и система (24) решается путем обращения нижней треугольной матрицы $A_- + D$.

В случае системы (22) надо положить $A = F'(x^k)$, вычислить последовательно векторы ω^s согласно (24), начиная с $\omega^0 = 0$, и положить $\omega^{l+1} = x^{k+1} - x^k$, так что $x^{k+1} = x^k + \omega^{l+1}$.

Заметим, что итерации по Зейделю можно осуществлять и относительно вектора x^{k+1} .

Пусть в (24) совершается только одна итерация, т. е. $l=0$. Тогда, учитывая, что $\omega^0 = 0$, $\omega^1 = x^{k+1} - x^k$, получим метод

$$(A_- + D)(x^{k+1} - x^k) + F(x^k) = 0, \quad (25)$$

где $A_- + D$ — «нижняя треугольная» часть матрицы Якоби (11), вычисленной при $x = x^k$.

В частности, при $m=2$ метод (25) принимает вид

$$\frac{\partial f_1(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_1} (x_1^{k+1} - x_1^k) + f_1(x_1^k, x_2^k) = 0, \quad (26)$$

$$\frac{\partial f_2(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_2} (x_1^{k+1} - x_1^k) + \frac{\partial f_2(x_1^k, x_2^k)}{\partial x_2} (x_2^{k+1} - x_2^k) + f_2(x_1^k, x_2^k) = 0.$$

Сопоставление (21) и (26) показывает, что методы, рассмотренные в двух последних примерах, не совпадают.