Программа курса

Небесная механика

для студентов III курса астрономического отделения СПбГУ, 2008 г.

Автор: зав. кафедрой небесной механики СПбГУ профессор К.В.Холшевников

1 Введение

1.1 Предмет небесной механики

Механическое перемещение точечных небесных тел под действием гравитации и, возможно, других сил. Поступательное и вращательное движение твердых (в смысле теоретической механики) небесных тел.

Фигуры равновесия жидких (в смысле теоретической механики) небесных тел. Поступательно-вращательное движение пластических небесных тел (типа системы Земля — Луна).

Движение искусственных небесных тел. Необходимость учета большого количества сил разной природы: гравитационных, магнитных, сил сопротивления среды, светового давления, микрореактивных (излучающий спутник-ретранслятор является *фотонной ракетой*). Возможность выбора оптимальной по какому-либо критерию траектории.

1.2 Задачи небесной механики

Исследование свойств траекторий небесных тел. Определение орбит небесных тел с нужной точностью на нужном интервале времени. Последние задаются специалистами других наук (наблюдательная астрономия, космонавтика, геофизика, климатология,...).

Определение некоторых физических параметров небесных тел (масса, форма, структура гравитационного и магнитного поля, электрический заряд,...).

Определение фундаментальных постоянных G и $\dot{G}$.

1.3 Методы небесной механики

Математический аппарат небесной механики: дифференциальные уравнения, статистическая обработка наблюдений, поставляемых наблюдательной астрономией и космонавтикой.

1.4 Краткий исторический очерк

От древности до Кеплера включительно. *Математические начала натуральной философии* Ньютона. Задача N тел, фигуры равновесия. Теория относительности Эйнштейна и другие релятивистские теории тяготения. Появление искусственных небесных тел.

2 Основы теории притяжения

2.1 Закон всемирного тяготения

Сравнение ньютоновской и релятивистской теории тяготения. Характерный порядок релятивистских поправок в сравнении с точностью наблюдений в Солнечной системе, в системах кратных звезд, в звездных скоплениях, в галактиках, в системах галактик. Достаточность ньютоновской теории (иногда с учетом релятивистских поправок в рамках теории возмущений) в большинстве случаев. Необходимость релятивистского подхода при исследовании движений в окрестности компактных объектов типа нейтронных звезд, черных дыр, а также в космологических исследованиях.

Релятивистский подход освещается в специальных курсах. Здесь ограничиваемся ньютоновской механикой.

Закон всемирного тяготения в случае двух материальных точек.

2.2 Тяготение в системе конечного числа материальных точек

Сила и ускорение, действующее на произвольную точку Q_i в системе точек $Q_1, \ldots, Q_N$ масс $m_1, \ldots, m_N$.

Гравитационный потенциал V_i, определяющий ускорение выделенной точки Q_i под действием притяжения остальных точек. Физический смысл, размерность. Определение аддитивной постоянной из условия поведения на бесконечности.

Силовая функция U, определяющая самогравитацию системы точек $Q_1, \ldots, Q_N$. Физический смысл, размерность. Определение аддитивной постоянной из условия поведения на бесконечности.

Свойства функций V_i, U. Положительность (отрицательность гравитационной потенциальной энергии). Гармоничность: справедливость уравнения Лапласа

$$\Delta V_i = 0, \qquad \Delta U = 0$$

в пространстве $\mathbb{R}^3$ вне притягивающих точек.

2.3 Тяготение протяженных тел

Определение ускорения материальной точки Q, вызванного притяжением протяженного тела T

$$\mathbf{w}(Q) = G \int_T \frac{\mathbf{s}}{s^3}\, dm',$$

где $\mathbf{s} = (x - x', y - y', z - z')$ — вектор $Q'Q$, соединяющий точки $Q'(x', y', z')$ и $Q(x, y, z)$; его длина обозначена через $s = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$. Элемент массы можно выразить через плотность $dm' = \varrho(Q')d\tau'$, где $d\tau'$ представляет собой элемент длины для одномерного, элемент площади для двумерного, элемент объема для трехмерного тела T. Определение гравитационного потенциала V тела T в точке Q аналогичным интегралом.

Понятие о потенциальной энергии U самогравитации тела T.

Свойства внешнего потенциала. Положительность, аналитичность и гармоничность.

Бесконечность потенциала одномерного тела в точках тела. Физический смысл.

Непрерывность потенциала двумерного тела в точках тела. Скачок первых производных. Физический смысл.

Гладкость первого порядка внутреннего потенциала трехмерного тела. Уравнение Пуассона. Скачок вторых производных.

2.4 Представления внешнего гравитационного потенциала протяженного тела

Представление определенным интегралом. Достоинства и недостатки.

Представление потенциалом простого слоя на заданной поверхности. Достоинства и недостатки.

Представление системой точечных масс. Достоинства и недостатки.

Представление рядом по полной системе функций (например, степенных функций). Представление рядом по полной системе гармонических функций, ортогональных на подходящей поверхности. Достоинства и недостатки. Пример эллипсоидальных функций.

2.5 Представление внешнего потенциала рядом Лапласа по шаровым функциям

Введение сферических координат. Выделение в подынтегральной функции, определяющей потенциал, производящей функции многочленов Лежандра.

Основные свойства многочленов Лежандра (большей частью лишь с эскизом доказательства).

Объемлющая сфера. Отделение расстояний и направлений, т.е. представление внешнего потенциала рядом Лапласа по шаровым функциям $V_n(Q)$

$$V(Q) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(Q), \qquad V_n(Q) = \frac{Y_n(Q)}{r^{n+1}},$$

где $Y_n(Q)$ — сферические функции, зависящие только от направления на Q из начала координат, но не от расстояния r. Определение понятия шаровых и сферических функций.

Отделение долготы от широты, т.е. представление сферической функции многочленом по элементарным сферическим функциям

$$Y_n(Q) = \sum_{k=0}^{n} P_n^k(cos\theta)(A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda),$$

где P_n^k — присоединенные функции Лежандра. Интегральные выражения для постоянных Стокса (гармонических коэффициентов) A_{nk} и B_{nk}.

Первые члены ряда Лапласа.

Свойства гармонических коэффициентов симметричных тел.

Оценки общего члена ряда Лапласа. Сходимость ряда Лапласа.

2.6 Потенциал задачи двух неподвижных центров

Многоточечная модель потенциала. Различные подходы к определению параметров модели.

Потенциал задачи двух неподвижных центров. Определение оптимальных параметров модели через коэффициенты Стокса для вытянутых и сжатых небесных тел.

Интегрируемость обобщенной задачи двух неподвижных центрров.

2.7 Потенциалы конкретных небесных тел

Свойства потенциала (в первую очередь коэффициентов Стокса) для Земли, Луны, планет земной группы, спутников и астероидов; для планет–гигантов, Солнца, звезд; для звезд, входящих в тесные двойные системы.

3 Задача двух тел

3.1 Дифференциальные уравнения движения в задаче двух тел

Дифференциальные уравнения движения в задаче одного неподвижного центра. Дифференциальные уравнения абсолютного, относительного, барицентрического движения в задаче двух тел. Их единый вид

$$\ddot{\mathbf{r}} + \varkappa^2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 0 \tag{$*$}$$

при различном виде $\varkappa$. Консервативность уравнений. Потенциал

$$V(r) = \frac{\varkappa^2}{r}\,.$$

Конфигурационное пространство, пространство скоростей, фазовое пространство для уравнения (*).

3.2 Интегралы площадей и энергии для уравнения (*)

Напоминание теорем механики о равенстве нулю момента центральной силы и о скорости изменения момента импульса материальной точки. Интегралы площадей в векторной форме

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{c}.$$

Интегралы площадей в скалярной форме. Следствие 1: при неравном нулю векторе площадей орбиты лежат в плоскости, нормальной к вектору площадей и проходящей через притягивающий центр. Следствие 2: при равном нулю векторе площадей орбиты лежат на прямой, проходящей через притягивающий центр. Следствие 3: все орбиты — плоские кривые.

Интеграл энергии как следствие консервативности уравнения (*):

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{\varkappa^2}{r} = h.$$

3.3 Орбитальная плоскость

Матрицы поворота $\mathcal{A}_x(\varphi)$, $\mathcal{A}_y(\varphi)$, $\mathcal{A}_z(\varphi)$ вокруг координатных осей. Линия узлов, восходящий и нисходящий узлы. Наклон. Поворот вокруг оси z на угол Ω (долгота восходящего узла). Поворот вокруг новой оси x на угол i (наклон). Результирующая матрица $\mathcal{A}_2(\Omega, i)$ перехода к орбитальной системе координат, ось x которой направлена в восходящий узел

$$\mathcal{A}_2(\Omega, i) = \begin{pmatrix} \cos\Omega & -\cos i \sin\Omega & \sin i \sin\Omega \\ \sin\Omega & \cos i \cos\Omega & -\sin i \cos\Omega \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix}.$$

Координаты третьего столбца матрицы $\mathcal{A}_2(\Omega, i)$ как координаты нормали к орбитальной плоскости или, что то же, единичного вектора площадей.

Орбитальная плоскость как ориентированная плоскость. Прямое и обратное движение. Особенности при $i = 0$ и $i = \pi$.

Орбитальная плоскость и углы Ω, i для прямолинейного движения.

Полярные координаты r, u в орбитальной плоскости. Интегралы площадей и энергии в орбитальной плоскости. Приведенный интеграл энергии

$$\dot{r}^2 = 2h + \frac{2\varkappa^2}{r} - \frac{c^2}{r^2}\,.$$

3.4 Определение траектории движения

Определение траектории движения при $\mathbf{c} \neq 0$ переходом к угловой координате u (аргумент широты) в приведенном интеграле энергии. Уравнение конического сечения в полярных координатах. Кеплеровские элементы орбиты. Движение по эллипсу, параболе, гиперболе. Связь a, e (большая полуось, эксцентриситет) с типом движения.

Кинематическое уравнение (уравнение Кеплера) для эллипса. Среднее движение n, средняя и эксцентрическая аномалии M, E, эпоха прохождения перицентра T. Кинематическое уравнение для гиперболы.

Парабола как предел эллипсов и гипербол. Кинематическое уравнение для близпараболического движения и для параболы.

Три типа прямолинейного движения как пределы движения по эллипсу, параболе, гиперболе. Связь p, a, e (параметр, большая полуось, эксцентриситет) с типом движения.

3.5 Вычисление эфемерид небесных тел

Исследование уравнения Кеплера

$$E - e\sin E = M$$

при $e = 0$ (тривиально), $0 < e < 1$, $e = 1$. Монотонность и существование обратной функции. График прямой и обратной функции. Решение уравнения Кеплера методом итераций. Понятие о других методах.

Вычисление декартовых и полярных орбитальных координат. Изменение основной плоскости. Переход к геоцентрическим координатам.

3.6 Разложения в ряды в задаче двух тел

Зачем нужны ряды при наличии замкнутых формул?

Понятие о ряде Ли по степеням независимой переменной (в механике — времени) как решении дифференциального уравнения.

Ряд Ли по степеням времени как решение уравнения (*). Функции F, G, F', G' и F_k, G_k в представлении

$$\mathbf{r}(t+\tau) = F\mathbf{r} + G\mathbf{v}, \qquad \mathbf{v}(t+\tau) = F'\mathbf{r} + G'\mathbf{v}$$

при

$$F = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau^k}{k!}F_k\,,\ G = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau^k}{k!}G_k\,,\ F' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau^k}{k!}F_{k+1}\,,\ G' = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau^k}{k!}G_{k+1}\,.$$

Следствие 1: все орбиты — плоские кривые. Следствие 2: если в начальную эпоху вектор скорости коллинеарен с вектором положения, то орбита прямолинейна и указанное свойство сохраняется.

Зависимость величин F_k, G_k от начальных данных. Рекуррентные соотношения. Сходимость рядов по степеням времени.

Разложения по степеням эксцентриситета в эллиптическом движении.

Ряд по степеням эксцентриситета для эксцентрической аномалии. Разложения по степеням эксцентриситета для других функций в эллиптическом движении. Область сходимости. Предел Лапласа.

Разложения в ряды Фурье в эллиптическом движении.

Ряд Фурье для эксцентрической аномалии. Разложения Фурье для других функций в эллиптическом движении. Область сходимости. Ошибка многих учебников при описании области сходимости рядов Фурье в эллиптическом движении.

Двойные ряды по степеням эксцентриситета и тригонометрическим функциям кратных средней аномалии.

Ряды Фурье по другим угловым переменным.

3.7 Определение невозмущенных орбит

Понятие о нахождении орбиты нового небесного тела (определение орбиты) и уточнении орбиты известного небесного тела (улучшение орбиты).

Определение элементов по положению и скорости. Использование декартовых координат и угловых переменных.

Определение орбиты по двум положениям (семейство орбит).

Определение орбиты по двум положениям и параметру.

Определение орбиты по положению на небесной сфере и производным первого и второго порядка (модельная задача Лапласа). Получение производных при реальных наблюдениях.

Понятие о методе Гаусса определения орбиты по трем положениям на небесной сфере в известные моменты времени.

Понятие о современных методах определения орбит ИСЗ, использующих различные типы измерений.

Понятие о современных методах определения орбит внесолнечных планет по лучевым скоростям материнской звезды.

Редукция наблюдений.

4 Задача нескольких тел

4.1 Дифференциальные уравнения абсолютного движения, их классические интегралы

Дифференциальные уравнения абсолютного движения в задаче N тел (материальных точек Q_i) в векторной форме

$$m_i \ddot{\boldsymbol{\varrho}}_i = G \sum_{1 \leqslant k \leqslant N, i \neq k} \frac{m_i m_k \mathbf{r}_{ik}}{r_{ik}^3},$$

где $\mathbf{r}_{ik} = \boldsymbol{\varrho}_k - \boldsymbol{\varrho}_i$ есть вектор, соединяющий точки Q_i и Q_k. Консервативность уравнений. Силовая функция

$$U = G \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant N} \frac{m_i m_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2} G \sum_{1 \leqslant i,k \leqslant N, i \neq k} \frac{m_i m_k}{r_{ik}}.$$

Конфигурационное пространство, пространство скоростей, фазовое пространство.

Интегралы движения центра инерции (интегралы импульса). Интегралы площадей (интегралы момента импульса). Интеграл энергии. Изменение постоянных при переходе к другой системе отсчета.

Отсутствие дополнительных интегралов в фазовом пространстве, их наличие в некоторых частях фазового пространства (без доказательства).

4.2 Дифференциальные уравнения относительного движения

Гелиоцентрические координаты. Уравнения движения в гелиоцентрических координатах. Возмущающая (пертурбационная) функция для тела Q_i. Классические интегралы в гелиоцентрических координатах.

Координаты Якоби. Связь абсолютных координат $\boldsymbol{\varrho}_i$ и координат Якоби $\mathbf{r}_i$. Кинетическая энергия и силовая функция в координатах Якоби. Дифференциальные уравнения движения в координатах Якоби. Отделение уравнений движения барицентра от уравнений движения планет. Порядок нумерации тел в координатах Якоби. Инвариантность формы интегралов площадей и энергии в координатах Якоби.

Интегрирование уравнений движения с помощью рядов по степеням времени и численными методами.

4.3 Формула Лагранжа–Якоби и следствия из нее

Формула Лагранжа–Якоби.

Понятие об устойчивости по Ляпунову, по Лагранжу, по Пуассону. Различные виды устойчивости по Лагранжу: в области (заранее фиксированной или произвольной ограниченной) конфигурационного пространства, пространства скоростей, фазового пространства.

Теорема Якоби о необходимом условии устойчивости по Лагранжу. Ее значение для задачи двух тел, трех тел, небольшого числа тел (планетные и спутниковые системы, системы кратных звезд), большого числа тел (звездные скопления, галактики, скопления галактик).

Теорема вириала. Возможность ее применения в астрономии. Вириальные массы. Скрытая масса.

4.4 Гравитационные сферы

Понятие о гравитационных сферах.

Сфера тяготения. Уравнение сферы тяготения. Сфера тяготения Земли, других планет, Луны, Солнца.

Сфера действия Лапласа. Уравнение сферы действия Лапласа. Сфера действия Земли, других планет, Луны, Солнца, в системе двойных звезд.

4.5 Оскулирующие элементы

Нестрогое определение оскулирующих элементов. Строгое определение оскулирующих элементов. Оскулирующие элементы как замена переменных в фазовом пространстве. Элементы, постоянные в невозмущенном движении. Элементы, переменные в невозмущенном движении.

Дифференциальные уравнения движения в оскулирующих элементах.

Уравнения Эйлера. Элементы, удобные при малых наклонах и эксцентриситетах.

Уравнения Лагранжа. Свойства уравнений Лагранжа. Близость уравнений Лагранжа к каноническим.

Канонические элементы и канонические уравнения. Элементы Делоне и Пуанкаре.

Слабовозмущенное движение. Малые параметры в различных задачах небесной механики. Малый параметр в планетной задаче. Разложение пертурбационной функции. Ряд Фурье по средним аномалиям или долготам.

Ряд Фурье по всем угловым переменным. Разложение коэффициентов ряда в ряд Маклорена по эксцентриситетам и наклонам. Использование канонических элементов.

4.6 Аналитическое интегрирование уравнений слабовозмущенного движения

Запись уравнений Эйлера и Лагранжа в общей форме уравнений для медленных x и быстрых y переменных

$$\dot{x} = \mu f(x, y), \qquad \dot{y} = \omega(x) + \mu g(x, y). \tag{$**$}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_{N_1})$, $y = (y_1, \ldots, y_{N_2})$.

В задаче о движении N планет $N_1 = 5N$, $N_2 = N$. Правые части разлагаются в ряды Фурье по кратным y:

$$f(x, y) = \sum_n A_n(x) \operatorname{Exp} ny.$$

Здесь n — мультииндекс, $ny = n_1 y_1 + \ldots + n_{N_2} y_{N_2}$, $\operatorname{Exp} z = \exp iz$, где i — мнимая единица. Символ „Exp” позволяет безболезненно обозначать наклон через i.

Решение уравнений Эйлера и Лагранжа методом малого параметра Ляпунова–Пуанкаре. Бесконечная система линейных неоднородных уравнений, разнящихся лишь неоднородной частью.

Независимость уравнений k-го порядка от последующих уравнений. Независимость уравнений для медленных переменных от уравнений для быстрых переменных.

Возмущения элементов первого порядка в форме интеграла от известной функции. Качественное различие медленных и быстрых переменных. Возмущения элементов первого порядка в форме ряда Фурье для почти-периодической функции времени плюс линейный по времени (вековой) член. Малые знаменатели. Резонанс. Разбиение множества индексов $\{n\}$ на резонансное и нерезонансное подмножества.

Возмущения второго и высших порядков. Вековые, смешанные, периодические, долгопериодические возмущения. Теоремы Лагранжа–Лапласа, Пуассона, Пуанкаре о ранге возмущений.

4.7 Малые знаменатели

Величина $w = n_1\omega_1 + \ldots + n_N\omega_N$ как функция целочисленного векторного аргумента n при фиксированном векторе частот ω. Проблема нулевых и малых значений w.

Одна быстрая переменная $N = 1$. Отсутствие нулевых w (кроме тривиального при $n = 0$). Отсутствие малых знаменателей.

Две быстрых переменных $N = 2$. Случай (вырожденный) линейной зависимости частот (отношение частот ν рационально, резонанс). Однопараметрическое множество (точки на прямой в плоскости индексов) нулевых w. Отсутствие малых знаменателей.

Две быстрых переменных $N = 2$. Случай (невырожденный) линейной независимости частот (отношение частот ν иррационально, отсутствие резонанса). Отсутствие нулевых w (кроме тривиального при $n = 0$). Наличие малых знаменателей. Оценка малых знаменателей снизу для алгебраического числа ν и в терминах меры множества частот (без доказательства).

Три и более быстрых переменных $N \geqslant 3$. Невырожденный случай и случаи s-кратного вырождения, $s = 1, \ldots, N-1$. Отсутствие существенных усложнений по сравнению с двухчастотной системой $N = 2$.

Математическое и астрономическое значение малых знаменателей.

Сходимость классических разложений небесной механики. Область сходимости в общем случае

$$|t| < \frac{C_1}{\sqrt{|\mu|}}$$

и в случае выполнения теоремы Пуанкаре о ранге

$$|t| < \frac{C_2}{|\mu|}\,.$$

4.8 Понятие об улучшении орбит

Общая постановка задачи. Состояние y системы (например, положения и скорости системы планет, или положение и скорость астероида) является известной функцией времени t и параметров x (начальные данные, массы и некоторые другие параметры, в том числе описывающие процедуру измерений): $y = f(t, x)$. Измеряются величины z (например, координаты на небесной сфере, лучевые скорости, задержки радарных сигналов), однозначно связанные со временем и состоянием системы $z = g(t, y)$. В результате получаем, полагая $F(t, x) = g(t, (f(t, x))$, систему условных уравнений

$$z = F(t, x).$$

Решение последней системы уравнений методом минимизации нормы или расстояния в пространстве измерений z. Выбор подходящей нормы (расстояния) методами статистики.

4.9 Вековые возмущения

Вычисление вековых возмущений по методу Гаусса. Основные идеи метода осреднения. Замена переменных. Теорема Крылова–Боголюбова об асимптотическом характере рядов метода осреднения. Понятие о КАМ-теории. Применимость КАМ-теории к реальным задачам небесной механики. Устойчивость планетных систем типа Солнечной.

4.10 Ограниченная задача трех тел

Понятие ограниченной задачи. Ограниченная задача трех тел. Классификация по типу движения основных тел. Деление на пространственную и плоскую задачу.

Пространственная круговая ограниченная задача трех тел. Вращающаяся система координат. Уравнения движения. Потенциал гравитационных и центробежных сил.

Интеграл Якоби. Критерий Тиссерана. Поверхности нулевой скорости (поверхности Хилла). Девять топологических типов поверхностей Хилла. Особые точки поверхностей нулевой скорости (точки либрации Эйлера и Лагранжа).

Движение в окрестности точек либрации. Решение уравнений движения в линейном приближении. Неустойчивость коллинеарных точек либрации по Ляпунову. Неустойчивость треугольных точек либрации по Ляпунову при $\mu > \mu_0 = 0.0385209$, где μ равно отношению меньшей массы к сумме масс основных тел. Устойчивость треугольных точек либрации по Ляпунову в линейном приближении при $\mu < \mu_0$. Поведение точных решений в окрестности треугольных точек либрации при $\mu < \mu_0$.

4.11 Движение естественных тел Солнечной системы

Современные теории движения планет и спутников.

Движение главных членов Солнечной системы. Максимально возможная точность на временах порядка десятков и сотен лет.

Аналитические теории движения, XIX – XX в. Численные теории, XX – XXI в.

С 1980 гг.: серия DE/LE; 2008 г.: DE421 (интервал времени 1899-2053 гг.)

С 1987 г.: серия EPM; 2008 г.: EPM2008 (интервал времени 1800-2050 гг.)

Принципы теории. Использованные наблюдения.

Аналитические, численные и численно-аналитические теории движения больших планет на космогонических интервалах времени. Квазипериодический характер движения планет–гигантов.

Квазипериодический характер движения планет земной группы на временах до 10^9 лет; стохастический характер движения планет земной группы на бо́льших временах. Время предсказуемости эфемерид. Время предсказуемости орбит.

Движение астероидов. Движение комет.

Приливная эволюция движения систем Земля–Луна, Марс–Фобос, Плутон–Харон.

4.12 Движение искусственных небесных тел

Основные силы, определяющие движение ИНТ.

Влияние несферичности центрального тела. Потенциал с учетом второй зональной гармоники. Осреднение потенциала по средней аномалии спутника. Замкнутая форма возмущений первого порядка. Средние движения угловых переменных в зависимости от большой полуоси, эксцентриситета, наклона. Орбиты спутников типа „Молния”, геостационарных ИСЗ, солнечно-синхронных ИСЗ.

Влияние внешних тел. Приближение Хилла. Эффект Лидова–Кодзаи.

Влияние атмосферы. Модели атмосферы. Неизменность орбитальной плоскости в случае невращающейся атмосферы. Изменение эксцентриситета. Изменение большой полуоси.

Влияние светового давления.

Основные понятия астродинамики.

Список литературы

[1] *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968.

[2] *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975.

[3] *Холшевников К.В., Титов В.Б.* Задача двух тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2007.

[4] *Холшевников К.В., Питьев Н.П., Титов В.Б.* Притяжение небесных тел (учебное пособие). СПб: Изд. СПбГУ, 2005.

[5] *Балк М.Б. и др.* Сборник задач по небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1972.

[6] *Поляхова Е.Н.* Сборник задач по динамике точки в поле центральных сил. Л.: изд. ЛГУ, 1974.

Дополнительная литература

[7] *Чеботарев Г.А.* Численные и аналитические методы небесной механики. М.-Л.: Наука, 1965.

[8] *Абалакин В.К. и др.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.

[9] *Холшевников К.В.* Асимптотические методы небесной механики. Л.: изд. ЛГУ, 1985.

[10] *Гребеников Е.А., Рябов Ю.А.* Новые качественные методы в небесной механике. М.: Наука, 1971.

[11] *Аксенов Е.П.* Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977.

[12] *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988.