

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Д. И. НАГИРНЕР

**Радиационные
механизмы
в астрофизике**

*Допущено Учебно-Методическим Объединением
по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших
учебных заведений, обучающихся по специальностям
010701.65 – Физика и 010702.65 – Астрономия*

Издательство
С.-Петербургского университета

2007

УДК 52–64
ББК 22.632
Н16

Научный редактор ведущий научный сотрудник САО РАН
д-р физ.-мат. наук *В. К. Дубрович*

Рецензенты: зам. директора ГАО РАН
д-р физ.-мат. наук проф. *Ю. Н. Гнедин*
и ведущий научный сотрудник ИЗМИРАН
д-р физ.-мат. наук *М. А. Лившиц*

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
математико-механического факультета
С.-Петербургского государственного университета*

На г и р н е р Д. И.

Н16 Радиационные механизмы в астрофизике: Учеб. пособие.
СПб., Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. — 296 с.
ISBN 978-5-288-04435-9

В пособии описываются основные радиационные механизмы, играющие большую роль в формировании спектров астрофизических объектов и широко используемые теоретической астрофизикой. Рассмотрены тормозной и магнито-тормозной, рекомбинационный, черенковский и переходный механизмы излучения, а также комптоновское рассеяние и процессы с электрон-позитронными парами.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов и научных работников, изучающих астрофизику высоких энергий и интерпретирующих наблюдения астрофизических объектов. Книга может представить интерес для физиков, интересующихся приложениями физической теории к астрофизике.

Библиогр. 101 назв. Табл. 1. Илл. 37.

ISBN 978-5-288-04435-9

ББК 22.632

© Д. И. Нагирнер, 2007

Введение

Это учебное пособие написано на основе лекций, которые автор читал на астрономическом отделении математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета.

В пособии рассматриваются основные радиационные механизмы, играющие важную роль в формировании спектров космических объектов и поэтому представляющие большой интерес для астрофизики. Это тормозной и рекомбинационный процессы, магнитотормозной механизм, комптоновское рассеяние, черенковское и переходное излучение, а также двухфотонные процессы с электрон-позитронными парами.

Объем курса и пособия не позволяет включить в рассмотрение процессы в магнитном поле (кроме магнитотормозного), а также плазменные процессы. Этим процессам посвящены, например, монографии В. В. Железнякова [11] и Дж. Бекефи [4]. Мы рассматриваем здесь случаи, когда излучение возникает и распространяется в однородных немагнитных средах или в свободном пространстве. Основной излучающей частицей является заряженная частица с минимальной массой — электрон. При этом мы ограничиваемся изложением теории формирования непрерывного спектра, не затрагивая линейчатого (кроме вопросов о рекомбинационных и циклотронных линиях), теория которого излагается во многих руководствах, например, [48, 41]. Не касаемся мы и радиационных процессов, связанных с пылью.

Большая часть содержания пособия основана на классической электродинамике. Хотя этот раздел теоретической физики читается в отдельном курсе, здесь для большей связности изложения кратко воспроизводятся некоторые положения классической теории излучения. В значительной степени это изложение базируется на курсе Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [28]. В то же время изложение квантовой электродинамики потребовало бы слишком большого объема текста, поэтому сечения релятивистских процессов берутся без вывода. Приводятся только диаграммы Фейнмана и законы сохранения. За подробностями можно обратиться к книгам, где систематически излагается квантовая электродинамика, например [5, 2]. Нерелятивистская квантовая механика не используется совсем.

В рамках же классической электродинамики, как правило, готовых формул не приводится, многие формулы выводятся из более общих. Для возможности проследить подробности таких выводов

приведены сведения о стандартных специальных функциях, которые возникают при описании радиационных процессов.

Радиационным процессам в астрофизике посвящена книга Рыбицкого и Лайтмана [84]. Отличие нашего пособия от этой книги заключается прежде всего в том, что мы обращаем гораздо большее внимание на аккуратный вывод формул и подробное рассмотрение частных случаев. Кроме того, здесь предполагается, что читатель, в общем, знаком с классической электродинамикой и элементами теории переноса излучения.

Зависимость радиационных процессов в плазме от ее параметров описана в обзоре [90].

В пособии используется система единиц CGSE, не рационализованная, так что в вакууме диэлектрическая постоянная равна 1.

В книге не приводятся формулировки задач. Однако в качестве задач могут быть использованы либо целиком выводы некоторых формул, либо промежуточные выкладки при таких выводах.

Ссылки на формулы из другой главы даются с римской цифрой номера этой главы, предшествующей номеру формулы, например, ссылка (I.20) означает формулу номер 20 Главы I. Аналогично делаются ссылки на формулы приложений: перед номером формулы ставится буква, обозначающая приложение. Рисунки в каждой главе нумеруются независимо.

Глава I. Классическая теория излучения

§ 1. Уравнения Максвелла и их следствия

1. *Уравнения Максвелла.* Приведем уравнения Максвелла для случая, когда среда немагнитная, так что векторы магнитной напряженности \vec{H} и магнитной индукции \vec{B} совпадают. Пара уравнений, не содержащих зарядов и токов, имеет вид [28]

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (1)$$

Первое из них отражает отсутствие магнитных зарядов, второе является выражением закона Фарадея, по которому изменение магнитной напряженности порождает электрическое поле \vec{E} .

В то же время принимаем, что среда может обладать диэлектрическими свойствами, т. е. задается диэлектрическая проницаемость среды ε , так что вторая пара уравнений Максвелла записывается так [28]:

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\frac{\pi}{\varepsilon}\rho, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (2)$$

Здесь $\rho(\vec{r}, t)$ — плотность заряда, а $\vec{j}(\vec{r}, t)$ — плотность тока. Эти величины считаются заданными и удовлетворяют уравнению неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (3)$$

которое означает, что всякое изменение плотности заряда сопровождается возникновением тока, т. е. заряд может только перетекать из одного места в пространстве в другое. Если взять дивергенцию от второго уравнения в (2) и в результат подставить первое, то убедимся, что уравнения Максвелла согласуются с уравнением неразрывности.

Уравнений Максвелла восемь для шести искомым величин: двух векторов с тремя координатами каждый. Такое кажущееся несоответствие объясняется теоремой, доказываемой, например, в книге П. К. Рашевского [46] и утверждающей, что вектор с точностью до постоянного слагаемого можно восстановить по его ротору и дивергенции.

2. *Энергетическое соотношение.* Умножим каждое из уравнений с ротором напряженности на вектор другой напряженности и вычтем получающиеся соотношения. Затем воспользуемся векторным тождеством

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B}(\operatorname{rot} \vec{E}) - \vec{E}(\operatorname{rot} \vec{B}). \quad (4)$$

Тогда, если ε не зависит от времени, получится следствие уравнений Максвелла

$$\frac{1}{c} \frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{S} = -\vec{E} \vec{j}, \quad (5)$$

где плотность энергии и вектор потока энергии (вектор Пойнтинга)

$$W = \frac{\varepsilon \vec{E}^2 + \vec{H}^2}{4\pi}, \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}. \quad (6)$$

Левая часть равенства (5) имеет вид уравнения неразрывности, но в правой стоит не нуль. Произведение $\vec{E} \vec{j}$ есть работа электромагнитного поля над зарядами, создающими внешний ток.

3. *Потенциалы.* Если среда однородна и стационарна, т. е. ε не зависит ни от координат, ни от времени, то можно вместо напряженностей ввести новые искомые функции, а именно: скалярный φ и векторный \vec{A} потенциалы. Через них напряженности выражаются следующим образом:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi, \quad \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \quad (7)$$

С такими определениями уравнения (1) удовлетворяются тождественно.

Выбор потенциалов не является однозначным. Неоднозначность потенциалов связана не только с тем, что характеристики поля выражаются через их производные и, следовательно, к потенциалам можно добавлять любые константы. Легко проверить, что выражения (7) не изменятся, если потенциалы заменить на штрихованные, связанные с исходными добавлением градиентов некоторой функции:

$$\vec{A}' = \vec{A} - \operatorname{grad} \chi, \quad \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}. \quad (8)$$

Это свойство электромагнитного поля называется градиентной или калибровочной (gauge) инвариантностью. Выбор определенной

функции χ и тем самым определенных потенциалов называется калибровкой.

Покажем, что можно выбрать такую калибровку, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (9)$$

Калибровка потенциалов соотношением (9) называется калибровкой Лоренца, а само это соотношение условием Лоренца.

Действительно, пусть соотношение (9) для штрихованных потенциалов не выполняется, так что

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A}' = b(\vec{r}, t) \neq 0. \quad (10)$$

Подставив выражения (8) в (10) и выбрав такую функцию χ , чтобы

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \Delta \chi = b(\vec{r}, t) \quad (\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} \text{ — оператор Лапласа}), \quad (11)$$

убедимся, что для нештрихованных потенциалов соотношение (9) выполняется. Нам нужна всего лишь одна функция χ . Так как при любых функциях $b(\vec{r}, t)$ можно найти функцию, удовлетворяющую уравнению (11), то к соотношению (9) можно перейти всегда.

Не следует думать, что калибровка (9) полностью определяет потенциалы. Напряженности не изменятся, если к функции χ добавить любое решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (11).

4. *Уравнения для потенциалов.* Перейдем теперь к решению двух оставшихся уравнений. Подставляя в них выражения (7) и принимая во внимание соотношение (9), находим, что потенциалы определяются уравнениями

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \Delta \varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \quad \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (12)$$

Введем обозначение

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (13)$$

Эта величина имеет размерность скорости, она равна скорости света в среде с диэлектрической проницаемостью ε . Введем также оператор

$$\square = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (14)$$

называемый волновым оператором или оператором Даламбера. Тогда уравнения для потенциалов запишутся коротко:

$$\square\varphi = \frac{4\pi}{\varepsilon}\rho, \quad \square\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (15)$$

Итак, уравнения Максвелла свелись к решению четырех одно-типных уравнений для четырех потенциалов, подчиненных дополнительному условию Лоренца (9).

Заметим, что если под знаком оператора Даламбера применить к потенциалам условие Лоренца, то справа получится выражение, пропорциональное левой части уравнения неразрывности. Поэтому можно считать, что условие Лоренца является отражением этого уравнения.

5. *Запаздывающие потенциалы.* Приведем формулы для частных решений уравнений (15). Они являются неоднородными волновыми уравнениями. Поскольку четыре уравнения имеют один и тот же вид, то одинаковы по виду и их решения. Решением уравнения

$$\square\varphi = 4\pi f(\vec{r}, t), \quad (16)$$

является интеграл

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int \frac{f(\vec{r}_1, t_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} d^3r_1. \quad (17)$$

Поясним приведенную формулу. Пусть f — плотность заряда. Произведение плотности заряда на элемент объема равно заряду этого объема. Так как элемент объема бесконечно мал, его можно считать точечным. Потенциал точечного заряда равен величине этого заряда, деленной на расстояние от него до точки измерения. Надо сложить потенциалы от всех зарядов, т. е. взять интеграл по их распределению. Особого пояснения требует лишь момент времени t_1 , в который надо вычислять плотность заряда, чтобы наблюдатель смог почувствовать его влияние в точке \vec{r} в момент времени t . Будем называть t_1 моментом влияния. Этот момент определяется равенством

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = v(t - t_1). \quad (18)$$

Равенство (18) интерпретируется следующим образом. Чтобы плотность заряда в точке \vec{r}_1 повлияла на значение потенциала в точке

\vec{r} в момент t , необходимо, чтобы сигнал от точки \vec{r}_1 , движущийся со скоростью v , вышел из этой точки в момент времени t_1 . Такие решения волнового уравнения называются запаздывающими потенциалами.

§ 2. Основные положения теории относительности

1. *События и интервал.* Каждое явление, происходящее в пространстве и во времени, характеризуется в некоторой системе отсчета четырьмя числами: тремя пространственными координатами, объединяемыми в вектор $\vec{r} = (x, y, z)$, и моментом времени t .

Четыре числа x, y, z, t объединяются вместе и задают точку пространства Минковского, которую часто называют событием. В каждой из систем должна быть произведена синхронизация часов отдельно, так что каждому событию сопоставлен свой момент времени. В разных системах одному событию могут сопоставляться разные моменты времени, и это является правилом, а не исключением. Время в разных системах и течет по-разному. Отсутствие всеобщего единого времени — характерная черта теории относительности.

Мы будем называть четырехмерный вектор $\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}$ вектором положения. Вектора пространства Минковского можно умножать на вещественные числа и складывать.

Между двумя событиями определяется “расстояние”, точнее, квадрат интервала

$$s_{12}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2. \quad (19)$$

Если интервал равен нулю, это не означает, что события совпадают. Равенство нулю интервала между ними означает, что такие события могут быть соединены световым сигналом. Так как скорость света согласно принципу относительности одинакова во всех системах отсчета, то равный нулю в одной системе интервал равен нулю во всех инерциальных системах. Можно доказать, что величина и не равных нулю интервалов постоянна во всех системах отсчета.

По знаку квадрата интервалы классифицируются следующим образом. Если $s_{12}^2 > 0$, интервал называется времениподобным. Если, напротив, $s_{12}^2 < 0$, интервал пространственно подобен. Когда

$s_{12}^2 = 0$, интервал нулевой. Такие события, как отмечалось выше, можно соединить световым сигналом.

Для простоты можно одно событие поместить в начало координат, а у координат второго опустить индексы. Тогда интервал запишется проще

$$s^2 = c^2 t^2 - r^2. \quad (20)$$

Часто достаточно (или предпочтительно) рассматривать бесконечно малый интервал

$$ds^2 = (ds)^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2. \quad (21)$$

2. Преобразование Лоренца. Преобразование координат и времени, связывающее события в различных инерциальных системах и не изменяющее величины квадрата интервала, называется преобразованием Лоренца.

Самое общее преобразование Лоренца включает повороты осей координат, отражения осей и изменение направления отсчета времени, а также изменение пространственных и временных масштабов. Для того, чтобы выяснить принципиальные особенности теории относительности, достаточно ограничиться теми преобразованиями, которые связаны только с переходом из одной инерциальной системы в другую. Поэтому мы будем считать, что две системы, которые связывает преобразование, совершенно идентичны, а соответствующие их координатные оси параллельны. Все различие между ними сводится к тому, что одна система, в которой находится наблюдатель, неподвижна по отношению к нему, а другая движется со скоростью, направление и величина которой задается вектором \vec{V} . Удобно принять, что начальные моменты в обеих системах совпадают и в этот общий момент совпадают положения начал координат систем. Координаты и время в первой системе будем обозначать просто \vec{r}, t , а соответствующие величины во второй снабжать штрихом. Для краткости обычно вторую систему называют штрихованной, а исходную — нештрихованной.

Тогда преобразование Лоренца, выражающее пространственные координаты и время некоторого события в штрихованной системе через координаты того же события в нештрихованной системе, можно записать в виде

$$\begin{aligned} t' &= \Gamma (t - \vec{V} \vec{r}/c^2), \\ \vec{r}' &= \vec{r} - \Gamma \vec{V} t + (\Gamma - 1) (\vec{r} \vec{V}) \vec{V}/V^2. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь Γ — так называемый лоренцевский множитель, который всегда больше единицы:

$$\Gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (23)$$

Для того, чтобы все координаты четырехмерного вектора имели одну размерность, обычно в качестве нулевой компоненты используется не само время t , а произведение ct . Равенство, выражающее преобразование координат, часто записывается также по-другому, так что преобразование Лоренца принимает вид

$$\begin{aligned} ct' &= \Gamma(ct - \vec{V}\vec{r}/c), \\ \vec{r}' &= \Gamma(\vec{r} - ct\vec{V}/c^2) + (\Gamma - 1)\vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{r})/V^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Второе слагаемое во втором равенстве перпендикулярно вектору \vec{V} .

Отметим некоторые свойства такого преобразования. Если записать его в матричном виде, то определитель матрицы окажется равным единице. Обратное преобразование получается заменой вектора \vec{V} на $-\vec{V}$, так как нештрихованная система движется по отношению к штрихованной с противоположной скоростью. Преобразования Лоренца, как правило, некоммутативны, т. е. результат зависит от порядка перехода из одной системы в другую, а затем в третью.

Если вектор скорости параллелен одной из координатных осей, то формулы, определяющие преобразование, сильно упрощаются. Пусть $\vec{V} = V(1, 0, 0)$. Тогда

$$t' = \Gamma(t - xV/c^2), \quad x' = \Gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z. \quad (25)$$

Такое преобразование называется частным преобразованием Лоренца.

3. *Скаляры.* Скалярами называются инварианты преобразования Лоренца, т. е. величины, одинаковые во всех инерциальных системах координат.

Очевидный скаляр — скорость света наряду с другими мировыми константами. Более содержательными примерами являются квадрат интервала s^2 и элемент четырехмерного объема $d^4r = cdt d^3r$ (и следовательно, сам четырехмерный объем). Их инвариантность может быть проверена непосредственно исходя из формул (22).

Если в пространстве имеется некоторое тело или материальная точка (нулевого объема), то из всех систем отсчета выделяется одна (с точностью до поворота вокруг начала координат), которая жестко связана с этим телом. Такую систему называют собственной его системой. Все величины в этой системе отсчета называются также собственными по отношению к этому телу. В частности, его собственный трехмерный объем и собственное время (в отличие от их значений в других инерциальных системах) являются однозначными величинами, что следует из инвариантности их элементов $d\tau = dt/\Gamma$ и $d^3r_0 = \Gamma d^3r$ (их произведение — уже упоминавшийся скаляр d^4r/c). Очевидно, что собственное время меньше, чем время в любой другой системе, а собственный объем — наибольший.

4. *Векторы.* Векторами в теории относительности называются элементы четырехмерного пространства (точнее, пространства-времени), которое мы для простоты будем называть также пространством Минковского. Векторы, как и точки, задаются четырьмя числами-координатами: нулевой (или временной) и тремя пространственными.

Обычно составляющие четырехмерных векторов перечисляют, нумеруя их цифрами 0, 1, 2, 3, причем индекс 0 относится к временной координате, а три других — к пространственным, т. е.

$$\underline{a} = \{a^\mu\} = \{a^0, \vec{a}\}, \mu = 0, 1, 2, 3, \vec{a} = (a^1, a^2, a^3) = (a_x, a_y, a_z). \quad (26)$$

Мы, как правило, будем четырехмерные векторы записывать в виде $\underline{a} = \{a_0, \vec{a}\}$, перечисляя их так называемые контравариантные составляющие (с верхними индексами), причем $a_0 = a^0$.

Чтобы четыре числа составляли вектор, они должны при переходе от одной инерциальной системы к другой (от нештрихованной к штрихованной) преобразовываться согласно преобразованию Лоренца, т. е. так же, как координаты событий:

$$a'_0 = \Gamma(a_0 - \vec{a} \vec{V}/c), \quad \vec{a}' = \vec{a} - a_0 \Gamma \vec{V}/c + (\Gamma - 1)(\vec{V} \vec{a}) \vec{V}/V^2. \quad (27)$$

Это преобразование также можно записать с выделенной частью, перпендикулярной скорости:

$$a'_0 = \Gamma(a_0 - \vec{a} \vec{V}/c), \quad \vec{a}' = \Gamma(\vec{a} - a_0 \vec{V}/c) + (\Gamma - 1) \vec{V} \times (\vec{V} \times \vec{a})/V^2. \quad (28)$$

При переходе в другую систему отсчета изменяются составляющие четырехмерного вектора, сам вектор не изменяется. Однако для

упрощения записи результата преобразования Лоренца мы будем отмечать соответствующими индексами обозначения не только составляющих, но и самого четырехмерного вектора.

Для четырехмерных векторов определяется скалярное произведение. Если $\underline{a} = \{a^\mu\} = \{a_0, \vec{a}\}$ и $\underline{b} = \{b^\mu\} = \{b_0, \vec{b}\}$ — два вектора, то их скалярное произведение мы будем записывать так:

$$\underline{a} \underline{b} = a_0 b_0 - \vec{a} \vec{b}, \quad \underline{a}^2 = a_0^2 - \vec{a}^2. \quad (29)$$

Легко показать, что скалярное произведение векторов, в частности квадрат вектора, являются скалярами, чем и объясняется название произведения.

Из-за минуса в определении (29) скалярное произведение не является положительно определенным, т. е. квадрат вектора может иметь любой знак, а равенство нулю квадрата вектора не означает, что все его компоненты равны нулю. Поэтому вводится та же классификация векторов, что и интервалов. Именно, если $\underline{a}^2 > 0$, вектор \underline{a} называется времениподобным, если $\underline{a}^2 < 0$, пространственно подобным, если $\underline{a}^2 = 0$, нулевым.

Ввиду неположительности скалярного произведения нельзя ввести угол между четырехмерными векторами. Однако, если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то говорят, что они ортогональны.

5. *Примеры векторов.* 1) Первым примером вектора служит вектор положения $\underline{r} = \{ct, \vec{r}\}$. Его квадрат — квадрат интервала $\underline{r}^2 = s^2$. Частицы (или материальные точки) движутся по кривым в векторном пространстве, которые называют мировыми линиями. Дифференциал $d\underline{r} = \{cdt, d\vec{r}\}$, взятый вдоль мировой линии, — тоже вектор. Квадрат этого вектора представляет дифференциальную форму интервала

$$(d\underline{r})^2 = ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{r}^2. \quad (30)$$

Такой интервал пространственно подобен. Можно рассматривать и времениподобные интервалы.

2) Другой вектор, который возникает сразу при задании системы координат, — это четырехмерный градиент

$$\underline{\nabla} = \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right\} \quad (\vec{\nabla} \text{ — оператор Гамильтона набла}). \quad (31)$$

То обстоятельство, что здесь перед трехмерным градиентом надо поставить минус, иначе $\underline{\nabla}$ не будет четырехмерным вектором, проверяется непосредственно. Однако, в такой необходимости можно убедиться и иначе: скалярное произведение дифференциала вектора положения и вектора градиента согласно определению (29)

$$d\underline{r}\underline{\nabla} = dt \frac{\partial}{\partial t} + d\vec{r}\vec{\nabla} = d \quad (32)$$

есть оператор полного дифференциала и, значит, инвариант. Вектор градиента без минуса — ковариантный, а мы записываем контравариантные составляющие. Квадрат вектора градиента

$$\underline{\nabla}^2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square \quad (33)$$

представляет собой оператор Даламбера.

6. *Скорость.* По аналогии с трехмерной скоростью тела $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ четырехмерная скорость определяется как отношение дифференциалов вектора положения и времени. Однако, чтобы скорость получилась четырехмерным вектором, надо четырехмерный вектор $d\underline{r}$ делить (или умножать) на скаляр или величину, одинаковую для всех инерциальных систем. В качестве времени надо брать не время в какой-то произвольной системе отсчета, а собственное время для данного тела (материальной точки, частицы). Таким образом, по определению

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \{ct, \vec{r}\} = \{\gamma c, \gamma \vec{v}\} = \gamma \{c, \vec{v}\}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (34)$$

где \vec{v} — обычная трехмерная скорость. Лоренцевский множитель γ , соответствующий скорости тела, обязательно должен входить в составляющие вектора, но мы часто будем писать его вне фигурных скобок.

Квадрат четырехмерной скорости

$$\underline{v}^2 = c^2 > 0, \quad (35)$$

так что вектор скорости времениподобен.

Часто мы будем использовать обозначение для отношения скорости к скорости света и называть его безразмерной (трехмерной или четырехмерной) скоростью тела:

$$\underline{\beta} = \underline{v}/c = \{\gamma, \gamma \vec{\beta}\}. \quad (36)$$

7. *Импульс.* Импульс — это просто скорость, умноженная на массу, но для его составляющих вводятся отдельные обозначения:

$$\underline{p} = m\underline{v} = m\{\gamma c, \gamma \vec{v}\} = \{p_0, \vec{p}\}, \quad p_0 = mc\gamma, \quad \vec{p} = m\vec{v}\gamma. \quad (37)$$

Ясно, что вектор импульса тоже времениподобен:

$$\underline{p}^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2 > 0. \quad (38)$$

Из последнего равенства вытекает выражение нулевой составляющей через пространственный импульс

$$p_0 = \sqrt{m^2 c^2 + p^2} = mc\gamma, \quad p = |\vec{p}|, \quad (39)$$

а из него выражение лоренцевского множителя через тот же импульс

$$\gamma = \sqrt{1 + (p/mc)^2}. \quad (40)$$

С помощью (40) можно выразить и скорость через импульс:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m\gamma} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}. \quad (41)$$

Нулевая составляющая вектора импульса — это с точностью до множителя энергия. Удобно ввести обозначение для кинетической энергии релятивистской частицы

$$\varepsilon(p) = p_0 c - mc^2 = mc^2(\gamma - 1), \quad p = |\vec{p}|, \quad (42)$$

т. е. вычитать из полной энергии энергию покоя mc^2 . Отметим, что под массой m мы всегда будем понимать массу покоя.

Легко проверить, что абсолютная величина трехмерной скорости

$$v = |\vec{v}| = \frac{d\varepsilon(p)}{dp}. \quad (43)$$

8. *Нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.*

1) Если $v \ll c$, т. е. частица движется со скоростью гораздо меньшей скорости света, то $\gamma \sim 1$ и $p \ll mc$. Тогда в нерелятивистском пределе получается

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad \varepsilon = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p^2}{m^2 c^2} - 1 \right) = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}, \quad (44)$$

т. е. обычные нерелятивистские соотношения.

2) При $v \sim c$ лоренцевский множитель велик $\gamma \gg 1$, а $p \gg mc$. Тогда $\varepsilon \sim pc$. Соотношение (43) сохраняется в обоих предельных случаях.

9. *Ускорение.* Оно определяется по аналогии со скоростью

$$\underline{w} = \frac{dv}{d\tau} = \gamma \frac{dv}{dt} = \gamma \frac{d}{dt} \gamma \{c, \vec{v}\}. \quad (45)$$

Найдем сначала производную от лоренцевского множителя. При дифференцировании удобно использовать очевидное равенство $\vec{v}^2 = v^2$. Имеем

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3 \frac{\vec{v} \vec{w}}{c^2}. \quad (46)$$

Тогда получаем

$$\underline{w} = \gamma^2 \left\{ \gamma^2 \frac{\vec{v} \vec{w}}{c}, \vec{w} + \gamma \frac{\vec{v} \vec{w}}{c^2} \vec{v} \right\}. \quad (47)$$

Как и скорость, ускорение удобно записать через вектор $\vec{\beta}$:

$$\underline{w} = \gamma^2 \left\{ \gamma^2 \vec{\beta} \vec{w}, \vec{w} + \gamma (\vec{\beta} \vec{w}) \vec{\beta} \right\}. \quad (48)$$

Вектор ускорения, как нетрудно убедиться, ортогонален вектору скорости. Действительно,

$$\vec{\beta} \underline{w} = \gamma^3 (\gamma^2 \vec{\beta} \vec{w} - \vec{\beta} \vec{w} - \gamma^2 \beta^2 \vec{\beta} \vec{w}) = 0. \quad (49)$$

Это естественное соотношение для вектора, квадрат которого не зависит от времени. Аналогично трехмерная скорость тела, движущегося по поверхности шара, перпендикулярна радиальному направлению центростремительного ускорения.

10. *Квадрат ускорения.* Эта величина, интересная сама по себе, используется в теории излучения. Поэтому сделаем следующую выкладку.

$$\begin{aligned} \underline{w}^2 &= \gamma^4 [\gamma^4 (\vec{\beta} \vec{w})^2 - \vec{w}^2 - \gamma^4 \beta^2 (\vec{\beta} \vec{w})^2 - 2\gamma^2 (\vec{\beta} \vec{w})^2] = \\ &= \gamma^6 [-\vec{w}^2 (1 - \beta^2) - (\vec{\beta} \vec{w})^2] = \gamma^6 [-\vec{w}^2 + (\vec{\beta} \times \vec{w})^2]. \end{aligned} \quad (50)$$

Из приведенной выкладки видно, что вообще говоря, вектор ускорения пространственно подобен. Однако, если пространственное ускорение $\vec{w} = 0$, то и четырехмерный вектор нулевой.

11. *Импульс фотона.* Определения предыдущего параграфа годятся только для частиц с массой покоя, отличной от нуля. Фотон же имеет нулевую массу покоя и обязан мчаться в пространстве со скоростью света. Для этой частицы невозможно ввести понятие четырехмерной скорости, так как лоренцевский множитель для нее обращается в бесконечность. Следовательно невозможно ввести импульс так, как это было сделано выше.

Тем не менее, фотон имеет энергию и импульс. Если круговая частота фотона равна ω , то его энергия равна $\hbar\omega$ согласно предположению М. Планка. А. Эйнштейном был определен и импульс фотона, величина которого, как у ультрарелятивистской частицы, равна энергии, деленной на скорость света, $\hbar\omega/c$, а направление совпадает с направлением движения фотона. Тем самым оказывается возможным ввести четырехмерный вектор импульса фотона

$$\underline{k} = \{k, \vec{k}\} = \frac{\hbar}{c} \{\omega, \omega \vec{n}\}, k = \frac{\hbar\omega}{c}, \vec{k} = k \vec{n}, |\vec{n}| = 1. \quad (51)$$

Импульс и энергия фотона являются существенно квантовыми величинами и их выражения содержат постоянную Планка. Если желательно оставаться в рамках классической электродинамики, то вместо векторов импульса можно использовать волновые векторы, а вместо энергии — волновое число:

$$\underline{\alpha} = \underline{k}/\hbar, \quad \alpha = k/\hbar = \omega/c, \quad \vec{\alpha} = \vec{k}/\hbar. \quad (52)$$

Эти величины отличаются от квантовых на постоянный множитель и релятивистские свойства у них те же самые.

Применение к импульсу фотона преобразования Лоренца выявляет два важных эффекта.

12. *Эффект Доплера.* Запишем формулу преобразования от нештрихованной системы отсчета к штрихованной, движущейся относительно первой со скоростью \vec{V} , величины импульса фотона, или, что в сущности то же самое, его частоты (или энергии):

$$\omega' = \omega \Gamma (1 - \vec{n} \cdot \vec{V}/c). \quad (53)$$

Обратное преобразование получается, как обычно, заменой скорости на противоположную ($\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$):

$$\omega = \omega' \Gamma (1 + \vec{n}' \cdot \vec{V}/c). \quad (54)$$

Приведенные формулы, если отбросить лоренцевский множитель Γ , выражают обычный классический эффект, установленный в 1842 году Х. Доплером. Наличие множителей Γ показывает, что даже при перпендикулярном по отношению к наблюдателю движении фотона, происходит сдвиг его частоты. Это явление называется поперечным эффектом Доплера. Он невозможен согласно классической теории. Поскольку его поправка имеет порядок V^2/c^2 , т. е. второго порядка малости по отношению к поправке, пропорциональной скорости V/c , поперечный эффект не был замечен до создания теории относительности.

Линейный же эффект имеет простое объяснение, которое подходит и для звуковых колебаний и заключается в том, что движущийся наблюдатель в зависимости от направления своего движения встречает больше или меньше волн (периодов), чем неподвижный. То же происходит, если движется источник. Для звука такое объяснение было известно давно, так как эффект легко заметен даже при не очень больших скоростях.

13. *Аберрация.* Преобразование пространственной составляющей импульса фотона при переходе от нештрихованной системы к штрихованной выглядит так:

$$\omega' \vec{n}' = \omega \vec{n} - \Gamma \omega \vec{V}/c + (\Gamma - 1)\omega(\vec{n} \vec{V})\vec{V}/V^2. \quad (55)$$

Отсюда находим закон преобразования ортов направлений распространения фотона:

$$\vec{n}' = \frac{\vec{n} - \Gamma \vec{V}/c + (\Gamma - 1)(\vec{n} \vec{V})\vec{V}/V^2}{\Gamma(1 - \vec{n} \vec{V}/c)}. \quad (56)$$

Обратное преобразование имеет тот же вид, но с заменой $\vec{V} \rightarrow -\vec{V}$.

Из (55) вытекает соотношение между векторными произведениями:

$$\omega' \vec{n}' \times \vec{n} = \omega[\Gamma V/c - (\Gamma - 1)\vec{n} \vec{V}/V] \vec{n} \times \vec{V}/V. \quad (57)$$

Три вектора \vec{V} , \vec{n} и \vec{n}' компланарны. Обозначим угол, который образует вектор \vec{V} с \vec{n} через α , а с вектором \vec{n}' соответственно через α' . Тогда из равенства (57) с учетом (53) следует, что

$$\sin(\alpha' - \alpha) = \sin \alpha \frac{V/c - (1 - 1/\Gamma) \cos \alpha}{1 - V \cos \alpha/c}. \quad (58)$$

Если в (58) отбросить члены порядка выше первого по скорости, то получится классическая формула аберрации

$$\sin(\alpha' - \alpha) = V \sin \alpha / c. \quad (59)$$

Формулу аберрации можно вывести иначе. Для этого заметим, что из взаимно обратных формул (53) и (54) вытекает соотношение

$$(1 - V \cos \alpha / c)(1 + V \cos \alpha' / c) = 1/\Gamma^2 = 1 - V^2/c^2 \quad (60)$$

или

$$\cos \alpha' - \cos \alpha + V(1 - \cos \alpha' \cos \alpha)/c = 0. \quad (61)$$

Отсюда находим взаимно обратные соотношения

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha - V/c}{1 - V \cos \alpha / c}, \quad \cos \alpha = \frac{\cos \alpha' + V/c}{1 + V \cos \alpha' / c}. \quad (62)$$

Легко получить такие же соотношения и для синусов

$$\sin \alpha' = \frac{1}{\Gamma} \frac{\sin \alpha}{1 - V \cos \alpha / c}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\Gamma} \frac{\sin \alpha'}{1 + V \cos \alpha' / c}. \quad (63)$$

Исходя из этих соотношений нетрудно вывести и выражение (58) для синуса разности углов $\sin(\alpha' - \alpha)$.

14. *Инварианты.* При преобразованиях Лоренца импульса фотона ряд величин остается неизменными. Так из (55) следует, что

$$\omega' \vec{n}' \times \vec{V} = \omega \vec{n} \times \vec{V}. \quad (64)$$

Взяв модуль от обеих частей этого равенства, найдем

$$\omega' \sin \alpha' = \omega \sin \alpha, \quad (65)$$

так что произведение частоты фотона на синус угла, образуемого его импульсом со скоростью системы отсчета, является инвариантом.

Другой инвариант связан с элементом объема в пространстве импульсов. Продифференцировав первое из соотношений (62), получим

$$\sin \alpha' d\alpha' = \frac{\sin \alpha}{\Gamma^2 (1 - V \cos \alpha / c)^2} d\alpha = \left(\frac{\omega}{\omega'} \right)^2 \sin \alpha d\alpha. \quad (66)$$

Таким образом, инвариантом является произведение $\omega^2 \sin \alpha d\alpha$, а значит, и $\omega d\alpha$.

Инвариантны также элемент объема в пространстве импульса фотона, деленный на частоту (или на величину импульса) d^3k/k , и элемент телесного угла, умноженный на квадрат импульса $k^2 d^2n$, что проверяется непосредственно или на основе приведенных в этом параграфе формул для преобразованных частот и углов. Инвариантом является и отношение dk/k .

Для частиц с ненулевой массой инвариантной величиной является d^3p/p_0 . Доказательство этого дается в главе, посвященной комптоновскому рассеянию. Заметим однако, что этот инвариант не допускает разделения на инвариантные сомножители, как в случае фотона, имеющего нулевую массу.

15. *Векторы электромагнитного поля.* Пусть электромагнитное поле создается и распространяется в свободном пространстве. В этом случае описывающим его величинам и соотношениям можно придать релятивистски ковариантный вид. Начнем с плотности заряда и тока.

Исходя из того обстоятельства, что количество заряда является скалярной величиной, напишем цепочку равенств

$$\rho d^3r = \frac{\rho}{\gamma} \gamma d^3r = \frac{\rho}{\gamma} d^3r_0. \quad (67)$$

Здесь ρ — плотность заряда, γ — лоренцевский множитель, связывающий систему отсчета, в которой заряд покоится, с движущейся по отношению к ней со скоростью $v = c\sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$. Так как стоящий слева заряд элементарного объема и множитель справа d^3r_0 — собственный объем заряда — являются релятивистскими инвариантами, то скаляром является и отношение $\rho/\gamma = \rho_0$, представляющее собой плотность заряда в его собственной системе отсчета.

Если умножить эту скалярную величину на четырехмерный вектор скорости элементарного заряда, то получится снова четырехмерный вектор, называемый вектором плотности заряда-тока или короче вектором тока:

$$\underline{j} = \frac{\rho}{\gamma} \{c\gamma, \vec{v}\gamma\} = \{c\rho, \vec{j}\}. \quad (68)$$

Равенство нулю скалярного произведения векторов градиента и тока представляет собой уравнение неразрывности:

$$\underline{\nabla} j = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} j = 0. \quad (69)$$

Уравнения, которым удовлетворяют потенциалы

$$\square \varphi = 4\pi \rho, \quad \square \vec{j} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (70)$$

являются временной и пространственной составляющими одного четырехмерного векторного уравнения

$$\square \underline{A} = \frac{4\pi}{c} \underline{j}. \quad (71)$$

Поскольку справа стоит четырехмерный вектор, а оператор Даламбера — скаляр, то и потенциалы образуют вектор

$$\underline{A} = \{\varphi, \vec{A}\}. \quad (72)$$

Скалярное произведение градиента на этот вектор, равное нулю:

$$\underline{\nabla} \underline{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} = 0, \quad (73)$$

отражает условие Лоренца.

Заметим, что из трехмерных векторов напряженностей электрического и магнитного полей невозможно образовать четырехмерных векторов: все они вместе являются элементами тензора, поэтому их преобразование более сложно. Через этот тензор и уравнения Максвелла могут быть записаны в релятивистски ковариантном виде (см. [28]).

16. Относительная скорость. Это важное понятие очень просто вводится в обычной нерелятивистской механике: там относительная скорость равна просто разности скоростей. Ясно, что такое определение не подходит в теории относительности.

Как и в нерелятивистской механике, необходимо различать порядок частиц при определении относительной скорости. Назовем скоростью второй частицы относительно первой скорость ее в той системе отсчета, где первая покоится.

Пусть скорости частиц в какой-то системе равны соответственно

$$\underline{v}_1 = \gamma_1 \{c, \vec{v}_1\}, \quad \underline{v}_2 = \gamma_2 \{c, \vec{v}_2\}. \quad (74)$$

Применим преобразование Лоренца со скоростью $\vec{V} = \vec{v}_1$. Тогда в системе покоя первой частицы будет

$$\begin{aligned} \underline{v}_1 &= \{\gamma_1^2(c - \vec{v}_1^2/c), 0\} = \{c, 0\}, \\ \underline{v}_2 &= \{\gamma_1\gamma_2(c - \vec{v}_1 \vec{v}_2/c), \gamma_2\vec{v}_2 - \gamma_1\gamma_2\vec{v}_1 + (\gamma_1 - 1)\gamma_2(\vec{v}_1 \vec{v}_2)\vec{v}_1/v_1^2\}. \end{aligned} \quad (75)$$

Лоренцевский множитель у скорости второй частицы в системе покоя первой

$$\gamma_{21} = \gamma_{12} = \gamma_1\gamma_2(1 - \vec{v}_1 \vec{v}_2/c^2) = \underline{v}_1 \underline{v}_2/c^2 = \gamma_r \quad (76)$$

на самом деле не зависит от порядка частиц и является релятивистским инвариантом, так как выражается через скалярное произведение их четырехмерных скоростей. Для трехмерной же скорости второй частицы относительно первой, исключив из ее выражения

$$v_1^2 = c^2(1 - 1/\gamma_1^2), \quad \vec{v}_1 \vec{v}_2 = c^2(1 - \gamma_r/\gamma_1\gamma_2), \quad (77)$$

найдем

$$\vec{v}_{21} = \frac{\gamma_2}{\gamma_r} \left[\vec{v}_2 - \gamma_1\vec{v}_1 + \frac{\gamma_1}{\gamma_1+1} \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_r}{\gamma_2} \right) \vec{v}_1 \right] = \frac{1}{\gamma_r} \left(\gamma_2\vec{v}_2 - \gamma_1 \frac{\gamma_2 + \gamma_r}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 \right). \quad (78)$$

Квадрат относительной скорости

$$v_{21}^2 = |\vec{v}_{21}|^2 = \frac{c^2}{\gamma_r^2} \left[\gamma_2^2 - 1 + \frac{\gamma_r^2 + \gamma_2^2 + 2\gamma_r\gamma_2}{\gamma_1 + 1} (\gamma_1 - 1) - 2\frac{\gamma_r + \gamma_2}{\gamma_1 + 1} (\gamma_1\gamma_2 - \gamma_r) \right], \quad (79)$$

как и лоренцевский множитель, не зависит от системы координат и от порядка частиц. Величину этой скорости можно записать в другом виде, через трехмерные скорости частиц:

$$v_r = v_{12} = v_{21} = c\sqrt{1 - 1/\gamma_r^2} = c\frac{\sqrt{c^2(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 - (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2)^2}}{c^2 - \vec{v}_1 \vec{v}_2}. \quad (80)$$

Если скорость одной из частиц равна скорости света, то и относительная скорость равна c . Если скорости параллельны, то

$$\vec{v}_{21} = \frac{\gamma_1\gamma_2}{\gamma_r}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \quad (81)$$

При перпендикулярных скоростях

$$\gamma_r = \gamma_1\gamma_2, \quad \vec{v}_{21} = \vec{v}_2/\gamma_1 - \vec{v}_1. \quad (82)$$

Сумма взаимных относительных скоростей, конечно, симметрична относительно частиц:

$$\vec{v}_{12} + \vec{v}_{21} = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_r} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \vec{v}_2 \right) - \frac{\gamma_r - 1}{\gamma_r} \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1 + 1} \vec{v}_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + 1} \vec{v}_2 \right), \quad (83)$$

но равна нулю только в нерелятивистском пределе или в случае, если скорости обеих частиц совпадают ($\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, так как тогда $\gamma_1 = \gamma_2$, $\gamma_r = 1$).

§ 3. Излучение точечного заряда

1. *Постановка задачи.* Пусть точечный заряд e движется в свободном пространстве. Его радиус-вектор в некоторой системе отсчета является известной функцией $\vec{r}_0(t)$ времени t , введенного в этой системе. Тогда плотности заряда и тока даются формулами

$$\rho(\vec{r}, t) = e \delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t)), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{r}'_0(t). \quad (84)$$

Здесь и далее штрих означает производную по аргументу функции.

Движущийся заряд создает вокруг себя электромагнитное поле. Найдем его. Начнем с определения потенциалов.

Пусть в точке с радиусом-вектором \vec{r} находится наблюдатель, который измеряет потенциалы в момент времени t . Величины \vec{r} и t считаем фиксированными.

Потенциалы определяются неоднородными волновыми уравнениями (15), которые при $\varepsilon = 1$ принимают вид

$$\square \varphi = 4\pi \rho, \quad \square \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (85)$$

Их решения — запаздывающие потенциалы, определяемые формулами вида (17):

$$\varphi = \int \rho(\vec{r}_1, t_1) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \quad \vec{A} = \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}_1, t_1) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (86)$$

Здесь время t_1 — время влияния, которое меньше времени наблюдения t , так как сигнал от источника поля до наблюдателя должен успеть дойти со скоростью распространения, равной скорости света.

Таким образом, в (86) момент времени t_1 определяется соотношением

$$c(t - t_1) = |\vec{r} - \vec{r}_1|. \quad (87)$$

Приведенные общие формулы надо применить к случаю точечного заряда, т. е. подставить туда выражения (84). Тогда получится

$$\varphi(\vec{r}, t) = e \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \quad \vec{A} = \frac{e}{c} \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) \vec{r}'_0(t_1) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (88)$$

Поскольку под знаками интегралов стоит δ -функция, то фактически в каждый момент времени t интегралы должны браться по одной точке, а соответствующий момент влияния определяется из уравнения

$$c(t - t_1^0) = |\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|. \quad (89)$$

Поэтому можно вынести все множители при дельта-функции в этой точке и написать

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{R_0} \mathcal{I}, \quad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{e}{R_0} \vec{r}'_0(t_1^0) \mathcal{I}. \quad (90)$$

Здесь введен вектор, соединяющий положение заряда в момент влияния с положением наблюдателя (см. рис. 1):

$$\vec{R}_0 = \vec{R}_0(\vec{r}, t_1^0) = \vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0), \quad R_0 = R_0(\vec{r}, t_1^0) = |\vec{R}_0| = |\vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)|, \quad (91)$$

и общий для потенциалов интеграл

$$\mathcal{I} = \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t_1)) d^3 r_1. \quad (92)$$

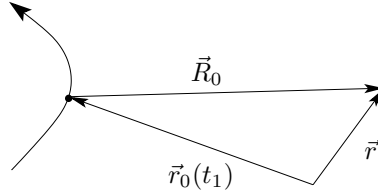


Рис. 1. Геометрия излучения заряда.

Таким образом, нахождение потенциалов сводится к вычислению одного интеграла от δ -функции. Однако, этот интеграл равен единице, только если величина \vec{r}_0 постоянна, т. е. для неподвижного заряда. В случае движущегося заряда это не так.

2. *Вычисление потенциалов.* Нам надо вычислить интеграл в (90) при условии (89). Ввиду важности результата и нетривиальности его получения мы дадим несколько способов вычисления указанного интеграла.

1) Непосредственное вычисление. Сделаем замену переменных интегрирования

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0(t - |\vec{r} - \vec{r}_1|/c) = \vec{r}_2. \quad (93)$$

Далее надо найти якобиан преобразования. После вычисления якобиана интеграл от δ -функции берется просто.

2) Релятивистские соображения. Релятивистские выражения для потенциалов можно получить, исходя из так называемых релятивистских соображений, а именно, из двух следующих требований. Во-первых, скалярный и векторный потенциалы вместе должны составлять четырехмерный вектор. Во-вторых, в пределе неподвижного заряда должен получаться известный результат:

$$\varphi = \frac{e}{R_0}, \quad \vec{A} = 0. \quad (94)$$

Искомые выражения надо сконструировать из имеющихся четырехмерных векторов. Таких векторов у нас два. Это вектор перемещения точки влияния заряда

$$\underline{R}_0 = \{c(t - t_1^0), \vec{r} - \vec{r}_0(t_1^0)\} = \{R_0, \vec{R}_0\} \quad (95)$$

и вектор скорости заряда

$$\underline{v}_0 = c\{\gamma_0, \gamma_0 \vec{\beta}_0\}, \quad \vec{\beta}_0 = \frac{\vec{v}_0}{c} = \frac{\vec{r}_0'(t_1^0)}{c}. \quad (96)$$

Первый вектор нулевой, так как он описывает распространение сигнала, которое происходит со скоростью света. Второй вектор времениподобен, как и должно быть для вектора скорости, так как

$$\gamma_0 = (1 - \beta_0^2)^{-1/2}. \quad (97)$$

Очевидно, что четырехмерный вектор потенциалов $\underline{A} = \{\varphi, \vec{A}\}$ должен быть пропорционален вектору скорости, ибо у обоих этих векторов в случае неподвижного заряда пространственные составляющие обращаются в нули. В знаменатель же надо поместить выражение, обращающееся в этом же случае в R_0 . Таким выражением

является скалярное произведение векторов \underline{u}_0 и \underline{R}_0 . Окончательно получаем

$$\underline{A} = \frac{e}{\underline{u}_0 \underline{R}_0} \underline{u}_0 = \frac{e}{R_0} \{1, \vec{\beta}_0\} \mathcal{I}, \quad \mathcal{I} = \frac{1}{1 - \vec{\beta}_0 \vec{R}_0 / R_0}. \quad (98)$$

3) Наглядное рассуждение. Наконец, последний способ вывода — наименее формальный из всех. Закрепим время t и место \vec{r} наблюдения. Уравнение (87) задает в каждый момент времени t_1 сферу радиусом $c(t - t_1)$ с центром в точке \vec{r} . Если сфера проходит через заряд, эта точка заряда вносит вклад в интеграл (90). Сфера влияния сходится к наблюдателю со скоростью света, а заряд движется с меньшей скоростью v . На рис. 2 показаны положения сферы влияния и заряда до и после их пересечения. Отражено движение заряда в обе стороны.

Для наглядности вывода временно откажемся от точечности заряда. Пусть заряд имеет постоянное поперечное сечение и длину a , а скорость его направлена прямо на наблюдателя. В какой-то момент сфера догонит заряд, т. е. коснется его заднего сечения, а потом перегонит его, т. е. коснется переднего его сечения (рис. 3а). Вклад в интеграл заряд будет давать только в те моменты, когда сфера его пересекает. Если бы заряд был неподвижен, этот промежуток времени был бы равен a/c . Из-за движения заряда в ту же сторону, что и сфера, промежуток времени влияния увеличивается. Обозначим расстояние, на котором происходит влияние заряда, через b . Тогда за одно и то же время заряд проходит расстояние $b - a$, а сфера b . Поделив эти расстояния на скорости и приравняв результаты, получим

$$\frac{b}{c} = \frac{b - a}{v}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{1 - v/c}. \quad (99)$$

Отношение b/a — это как раз тот дополнительный множитель, на который отличается величина интеграла в (90) от единицы, так как v — это проекция скорости заряда на направление на наблюдателя.

Аналогично рассматривается противоположный случай, когда заряд движется от наблюдателя навстречу сфере (рис. 3 б). Тогда получаются соотношения

$$\frac{b}{c} = \frac{a - b}{v}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{1 + v/c}. \quad (100)$$

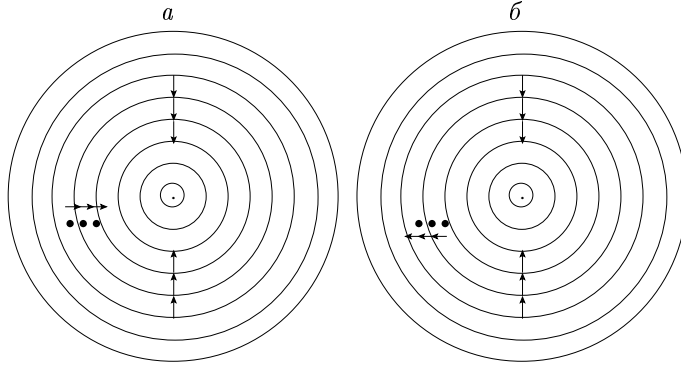


Рис. 2. Пересечение заряда сферой влияния при их движении:
a — в одном направлении, *б* — навстречу.

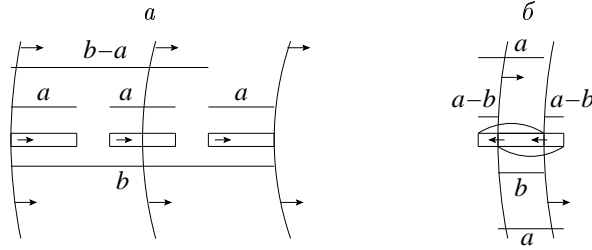


Рис. 3. Движение заряда и сферы: *a* — в одном направлении,
б — навстречу.

Здесь v — проекция скорости заряда на направление от наблюдателя, так что формула фактически та же. Интеграл \mathcal{I} как раз и равен отношению b/a .

Мы считали заряд неточечным. Однако поправочный множитель не зависит от a и остается тем же при $a \rightarrow 0$.

Итак, потенциалы точечного движущегося заряда, называемые обычно потенциалами Лиенара—Вихерта, определяются формулами (98) или подробнее

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{e}{s}, \quad \vec{A} = \frac{e \vec{r}'_0(t_1)}{c s}, \quad s = R_0(\vec{r}, t_1) - \vec{r}'_0(t_1) \vec{R}_0(\vec{r}, t_1)/c. \quad (101)$$

Здесь для краткости у аргумента t_1^0 , определяемого (89), опущен нулик, т. е.

$$c(t - t_1) = R_0(\vec{r}, t_1). \quad (102)$$

После получения формул для потенциалов можно найти напряженности электрического и магнитного полей. Эти напряженности состоят каждая из двух слагаемых, назовем их для краткости первые и вторые. Первые не содержат ускорения заряда, в то время как вторые, напротив, пропорциональны величине ускорения. Первые убывают с расстоянием от заряда R_0 как $1/R_0^2$, вторые — как $1/R_0$. Ясно, что только эти вторые слагаемые представляют электромагнитное поле на больших расстояниях. Именно они определяют то, что называется излучением, т. е. электромагнитные волны, отрывающиеся от своих источников и уносящие излучаемую зарядом энергию и импульс. Поскольку нас интересует именно излучение заряда, найдем выражения для потенциалов и напряженностей на больших расстояниях от него, в так называемой волновой зоне.

3. *Потенциалы точечного заряда на больших расстояниях.* Пусть заряд движется в некоторой ограниченной области размером a . Выберем в этой области точку с радиусом-вектором \vec{r}_c и закрепим ее. Вектор, идущий из этой точки к наблюдателю, обозначим

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_c. \quad (103)$$

Введем вектор смещения заряда от выбранной фиксированной точки:

$$\vec{x} = \vec{x}(t_1) = \vec{r}_0 - \vec{r}_c = \vec{R} - \vec{R}_0. \quad (104)$$

Ясно, что $\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{x}$ и

$$\vec{\beta} = \frac{1}{c} \vec{r}'_0(t_1) = \frac{1}{c} \vec{x}'(t_1), \quad \vec{\beta}'(t_1) = \frac{1}{c} \vec{r}''_0(t_1) = \frac{1}{c} \vec{x}''(t_1) = \frac{1}{c} \vec{w}, \quad (105)$$

где $\vec{w} = \vec{w}(t_1)$ — вектор ускорения заряда. При этом $|\vec{x}| \leq a$.

Обозначим единичный вектор направления от той же точки к наблюдателю через $\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R}$. Будем считать, что размер области движения заряда мал по сравнению с расстоянием до наблюдателя, т. е. $|\vec{x}| \leq a \ll R$. Это и означает, что наблюдатель находится на большом расстоянии от заряда. Тогда

$$\begin{aligned} R_0 &= \sqrt{R^2 + \vec{x}^2 - 2\vec{R}\vec{x}} = R \sqrt{1 - 2(\vec{x}/R)\vec{n} + (\vec{x}/R)^2} \approx \\ &\approx R[1 - (\vec{x}/R)\vec{n}] = R - \vec{x}\vec{n}, \quad \frac{\vec{R}_0}{R_0} = \frac{\vec{R} - \vec{x}}{R_0} \approx \frac{\vec{R}}{R} = \vec{n}. \end{aligned} \quad (106)$$

При выводе формул для составляющих напряженностей, определяющих излучение, достаточно ограничиться главными слагаемыми, убывающими как $1/R_0$ или, что то же самое, как $1/R$. Поэтому все слагаемые, убывающие быстрее, мы будем отбрасывать. В частности, в формулах (98) для потенциалов можно заменить \vec{R}_0 на \vec{R} и записать эти формулы в виде

$$\varphi(r, t) = \varphi(t_1) = \frac{e}{R - \vec{R} \vec{\beta}(t_1)}, \quad \vec{A}(r, t) = \vec{A}(t_1) = \frac{e \vec{\beta}(t_1)}{R - \vec{R} \vec{\beta}(t_1)} \quad (107)$$

или

$$\varphi(t_1) = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{\beta}(t_1)}, \quad \vec{A}(t_1) = \frac{e}{R} \frac{\vec{\beta}(t_1)}{1 - \vec{n} \vec{\beta}(t_1)}. \quad (108)$$

Теперь время t_1 в выражения для потенциалов входит только через аргумент скорости $\vec{\beta}$.

Можно ввести запаздывающее время T , связанное с закрепленной точкой и поэтому не зависящее от положения заряда:

$$R = c(t - T). \quad (109)$$

Тогда из (102), (106) и (109) следует, что на далеких расстояниях

$$t_1 - \frac{1}{c} \vec{n} \vec{x} = T = t - \frac{R}{c}. \quad (110)$$

Время T течет так же, как и t , только со смещением на R/c .

Чтобы вывести выражения для напряженностей поля необходимо вычислить производные по координатам и времени наблюдателя. Между тем потенциалы зависят от времени t_1 . Поэтому следует установить связь между производными по этим временам и найти выражение для градиента t_1 . Из (110) вытекают следующие формулы

$$dt_1 (1 - \vec{n} \vec{\beta}) = dt, \quad \vec{\nabla} t_1 (1 - \vec{n} \vec{\beta}) = -\frac{\vec{n}}{c}, \quad (111)$$

откуда

$$\frac{\partial t_1}{\partial t} = \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{\beta}}, \quad \frac{\partial t}{\partial t_1} = 1 - \vec{n} \vec{\beta}, \quad \vec{\nabla} t_1 = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{\beta}}. \quad (112)$$

Заметим, что скалярный потенциал связан с векторным соотношением

$$\varphi(t_1) = \frac{e}{R} + \vec{n} \vec{A}(t_1). \quad (113)$$

Еще одно упрощение заключается в том, что при нахождении градиента не нужно дифференцировать по координатам непосредственно, так как такое дифференцирование всегда увеличивает скорость убывания дифференцируемой функции с R . Действительно,

$$\vec{\nabla} r^\alpha = \alpha \vec{r} r^{\alpha-1}. \quad (114)$$

Следовательно, при вычислении градиента достаточно находить производные по координатам только через время t_1 , т. е. можно принять

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla} t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{\beta}} \frac{\partial}{\partial t_1}. \quad (115)$$

Приведенные упрощенные формулы взятия производных позволяют вывести еще некоторые соотношения между характеристиками поля. Например, комбинация (115) и (112) дает

$$\vec{\nabla} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (116)$$

так что

$$\vec{\nabla} \varphi = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \vec{A} = -\frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (117)$$

Таким образом, достаточно найти производные от потенциалов по времени:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial t} = \frac{e}{R} \frac{\vec{n} \vec{\beta}'}{(1 - \vec{n} \vec{\beta})^3}, \quad \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{e}{R} \frac{\vec{\beta}'(1 - \vec{n} \vec{\beta}) + \vec{\beta}(\vec{n} \vec{\beta}')}{(1 - \vec{n} \vec{\beta})^3}. \quad (118)$$

При помощи этих соотношений легко проверяется справедливость условия Лоренца:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0. \quad (119)$$

Несложно также убедиться, что потенциалы в этом приближении, как и точные, составляют компоненты четырехмерного вектора:

$$\underline{A} = \frac{e}{\underline{R} \underline{\beta}} \underline{\beta} = \frac{e}{R} \frac{\{1, \vec{\beta}\}}{1 - \vec{n} \vec{\beta}}, \quad \underline{R} = \{R, \vec{R}\}, \quad \underline{\beta} = \{1, \vec{\beta}\} / \sqrt{1 - \vec{\beta}^2}. \quad (120)$$

4. *Поле на больших расстояниях от источника.* Ввиду указанных упрощений не только потенциалы, но и напряженности на больших расстояниях находить довольно просто. Имеем

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (-\vec{A} + \vec{n} \varphi) = \\ &= \frac{e}{Rc} \frac{-\vec{\beta}' (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{n} - \vec{\beta}) \vec{n} \cdot \vec{\beta}'}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3}.\end{aligned}\quad (121)$$

Аналогично

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{e \vec{n}}{Rc} \times \frac{\vec{\beta}' (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) + \vec{\beta} (\vec{n} \cdot \vec{\beta}')}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3}.\quad (122)$$

Легко проверить, что формулу (121) можно переписать в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{cR} \frac{e \vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta}']}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^3}.\quad (123)$$

Кроме того, справедливы соотношения

$$\vec{H} = \vec{n} \times \vec{E}, \quad \vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}.\quad (124)$$

Таким образом, три вектора \vec{n} , \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны, т. е. на далеких расстояниях поле движущегося с ускорением точечного заряда представляет собой поперечную сферическую волну, близкую к плоской.

Заметим, что, как легко убедиться, формулы для напряженностей могут быть записаны в таком виде, что в них будет входить только производная по времени наблюдателя от векторного потенциала:

$$\vec{E} = \vec{n} \times \left(\frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right), \quad \vec{H} = -\frac{\vec{n}}{c} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.\quad (125)$$

Такая форма этих выражений полезна при нахождении преобразований Фурье от напряженностей.

Найдем энергетические характеристики поля. Электрическая и магнитная части плотности энергии, как легко видеть, равны. Поэтому плотность энергии электромагнитного поля равна $W = E^2/4\pi = H^2/4\pi$. Поток энергии, т. е. вектор Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{E^2}{4\pi} c \vec{n} = W c \vec{n}.\quad (126)$$

Таким образом, вектор потока энергии равен произведению плотности энергии на скорость распространения поля, т. е. энергия только перетекает. Поэтому, как легко проверить, выполняется уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{S} = \frac{\partial W}{\partial t} - \frac{\vec{n}}{c} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = 0. \quad (127)$$

§ 4. Излучение медленных и быстрых зарядов

1. *Дипольное приближение.* Сделаем еще одно предположение: пусть скорость заряда мала по сравнению со скоростью света, т. е. заряд нерелятивистский. Обозначим модуль его скорости через v . Тогда $v \ll c$. Это неравенство можно выразить в несколько другой форме. Заряд проходит область размером a за время a/v . Его излучение имеет примерно такой же период и, следовательно, частоту $\nu = v/a$ и длину волны $\lambda = c/\nu \sim ca/v$. Так как $v \ll c$, то $\lambda \gg a$. Таким образом, медленный заряд излучает на длине волны, значительно большей размера той области, в которой он движется.

Из соотношения (110), связывающего запаздывающие времена t_1 и T , видно, что разность между ними в случае медленного заряда значительно меньше, чем время, за которое заряд пересекает область: $a/c \ll a/v$. Поэтому изменение скорости заряда \vec{x}' за это время относительно мало, различием между временами T и t_1 можно пренебречь и производную по времени обозначать точкой. В этом случае

$$\varphi = \frac{e}{R} \frac{1}{1 - \vec{n} \vec{x}'(t_1)/c} = \frac{e}{R} \left[1 + \frac{\vec{n} \dot{\vec{x}}}{c} \right]. \quad (128)$$

Аналогично

$$\vec{A} = \frac{e}{Rc} \frac{\vec{x}'}{1 - \vec{n} \vec{x}'/c} = \frac{e}{Rc} \dot{\vec{x}}(T) \quad (129)$$

Тогда

$$\vec{H} = \frac{e}{Rc^2} \ddot{\vec{x}} \times \vec{n}, \quad \vec{E} = \vec{H} \times \vec{n}. \quad (130)$$

Найдем энергетические величины: плотность энергии поля

$$W = \frac{1}{4\pi} E^2 = \frac{1}{4\pi} H^2 = \frac{e^2}{c^4 R^2} |\ddot{\vec{x}} \times \vec{n}|^2 = \frac{1}{c^4 R^2} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2, \quad (131)$$

где $\vec{d} = e\vec{x}$ — дипольный момент заряда, и вектор потока энергии (вектор Пойнтинга)

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n} = \frac{\vec{n}}{4\pi c^3 R^2} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2 = W c \vec{n}. \quad (132)$$

Вектор Пойнтинга — это вектор потока энергии, т. е. величина, рассчитанная на единицу площади. Если находить количество энергии, которое идет в единицу телесного угла, то надо модуль (132) умножить на R^2 , т. е. это количество равно

$$\mathcal{W}(\Theta) = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{d}} \times \vec{n}|^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{x}}|^2 \sin^2 \Theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \sin^2 \Theta, \quad (133)$$

где Θ — угол между ускорением заряда и направлением на наблюдателя.

Равенство (133) называется формулой Лармора. Распределение излучения по направлениям таково, что прямо вперед по ускорению и в обратном направлении оно отсутствует. Во всех других направлениях излучение примерно одинаково, максимально оно в перпендикулярном к ускорению направлении.

Легко найти полное излучение, т. е. идущее во все стороны. Для этого возьмем интеграл по всем направлениям, выбрав в качестве полярного угла Θ и приняв во внимание осевую симметрию излучения:

$$I = 2\pi \int_0^\pi \mathcal{W}(\Theta) \sin \Theta d\Theta = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 2\pi \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \sin^2 \Theta = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} w^2. \quad (134)$$

Последняя формула дает полную мощность излучения заряда, т. е. количество энергии, которое он излучает в единицу времени во всех направлениях. Ее тоже называют формулой Лармора.

Формулы (133) и (134) получены в так называемом дипольном приближении, так как в них входит вторая производная от дипольного момента заряда. Если в разложениях по отношению скорости заряда к скорости света учесть слагаемые более высокого порядка малости, то добавятся так называемые мультипольные составляющие полей (квадрупольные, магнитные дипольные и т. д.) Для нерелятивистского заряда мы ограничимся дипольным приближением.

2. *Полное излучение быстрого заряда.* Самый простой способ найти полное излучение релятивистского заряда — это использовать релятивистские соображения, аналогичные тем, с помощью которых были получены формулы для потенциалов точечного движущегося заряда.

Должны выполняться два требования по отношению к искомым формулам. Они должны быть релятивистски ковариантны и оставаться правильными при переходе к нерелятивистскому пределу. Поэтому напомним два столбца формул, нерелятивистские и релятивистские, заполняя сначала левый сверху вниз, а затем правый снизу вверх. В формулах правого столбца используется время t_1 , так как излучение относится к заряду.

$$\begin{array}{l|l}
 \text{Нерелятив.} & \text{Релятивист.} \\
 \underline{d\mathbf{x}} = \{c dt, 0\}, & \underline{d\mathbf{x}} = \{c dt_1, d\vec{x}(t_1)\}, \\
 \underline{dP} = \{dP_0, 0\} = I\{dt/c, 0\} = & \underline{dP} = \{dP_0, \vec{P}\} = I\{dt_1/c, d\vec{x}(t_1)/c^2\} = \\
 = (I/c^2)\{c dt, 0\} = (I/c^2)\underline{d\mathbf{x}}, & = (I/c^2)\{c dt_1, d\vec{x}(t_1)\} = (I/c^2)\underline{d\mathbf{x}}(t_1), \\
 \vec{w}^2 = w^2, & \underline{w}^2 = \gamma^6[(\vec{\beta} \times \vec{w})^2 - w^2], \\
 I = (2/3)(e^2/c^3)w^2, & I = (2/3)(e^2/c^3)(-\underline{w}^2).
 \end{array} \tag{135}$$

При определении излучения нерелятивистского заряда учитывается только излучаемая им энергия и мощность его полного (во все стороны) излучения дается формулой Лармора. Однако время t (или t_1) и энергия cP_0 связаны лишь с нулевыми компонентами четырехмерных векторов положения \underline{x} и энергии-импульса \underline{P} . При нерелятивистских (малых) скоростях заряда составляющими, отличными от времени и энергии, пренебрегают (в наших формулах в левом столбце они приняты равными нулю). При релятивистском подходе к описанию процесса необходимо рассматривать не отдельно энергию и время, а все компоненты четырехмерных векторов \underline{x} и \underline{P} , точнее их дифференциалов $\underline{d\mathbf{x}}$ и \underline{dP} . В релятивистском случае пространственные составляющие векторов сравнимы по величине с временными.

Из полученных формул следует, что релятивистский заряд излучает не только энергию, но и заметный импульс, т.е. оторвавшееся от него электромагнитное поле уносит с собой и энергию и импульс. Сферическая расходящаяся волна расширяется со скоростью света, но кроме того ее центр смещается со сравнимой по величине скоростью.

Физическая величина — мощность излучения I (точнее I/c^2) — оказывается коэффициентом пропорциональности между бесконечно малыми векторами энергии-импульса и смещения заряда. Квадрат ускорения естественно заменяется на квадрат четырехмерного ускорения. Знак минус берется потому, что четырехмерный вектор ускорения пространственно подобен и в нерелятивистском пределе его квадрат согласно формуле (50) переходит в $-w^2$. Воспользовавшись этой формулой, можно написать

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \gamma^6 [w^2 - (\vec{\beta} \times \vec{w})^2]. \quad (136)$$

3. *Угловое распределение.* Запишем формулу для напряженности электрической составляющей излучаемого зарядом поля

$$\vec{E} = \frac{e}{c^2 R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (137)$$

Количество лучистой энергии, излучаемое в направлении \vec{n} в телесном угле d^2n в единицу времени, равно

$$dI_*(\vec{n}) = \mathcal{W}_* d^2n = \frac{c}{4\pi} E^2 R^2 d^2n = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]|^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^6} d^2n. \quad (138)$$

Чтобы отсюда получить выражение для полного излучения, найденного в пункте 1, необходимо проинтегрировать по всем направлениям на наблюдателя \vec{n} , закрепив при этом вектор скорости $\vec{\beta}(t_1)$, а значит момент времени t_1 . В разных направлениях \vec{n} этому времени будут соответствовать различные моменты времени наблюдения t на одном и том же расстоянии R или разные расстояния R при одном t . Если закрепляется время t_1 , то и мощность излучения надо рассчитывать на единицу времени t_1 .

Мощность же излучения \mathcal{W}_* рассчитана на единицу времени наблюдателя t . Для пересчета на мощность по отношению ко времени излучающего заряда t_1 величину \mathcal{W}_* следует умножить на производную $\partial t / \partial t_1 = 1 - \vec{n}\vec{\beta}$. Тогда мощность в расчете на единицу времени заряда и единицу телесного угла будет

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\vec{n}) &= \mathcal{W}_*(1 - \vec{n}\vec{\beta}) = \frac{c}{4\pi} R^2 |\vec{E}|^2 (1 - \vec{n}\vec{\beta}) = \\ &= \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2(1 - \vec{n}\vec{\beta})^2 + 2(\vec{n}\vec{w})(\vec{\beta}\vec{w})(1 - \vec{n}\vec{\beta}) - (1 - \beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^5}. \end{aligned} \quad (139)$$

Обозначив угол между векторами $\vec{\beta}$ и \vec{w} через $\pi/2 - \alpha$, построим на них базис с ортами

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1(\vec{\beta}, \vec{w}) = \frac{\vec{w}/w - \sin \alpha \vec{\beta}/\beta}{\cos \alpha}, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_2(\vec{\beta}, \vec{w}) = \frac{\vec{\beta} \times \vec{w}}{\beta w \cos \alpha}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{\beta}}{\beta}. \quad (140)$$

Тогда

$$\vec{\beta} = \beta \vec{e}_3, \quad \vec{w} = w(\cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_3). \quad (141)$$

Разложим и вектор направления излучения по построенным ортам:

$$\vec{n} = \sin \theta (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2) + \cos \theta \vec{e}_3. \quad (142)$$

Тогда

$$\vec{\beta} \vec{n} = \beta \cos \theta, \quad \vec{\beta} \vec{w} = \beta w \sin \alpha, \quad \vec{n} \vec{w} = w \mu, \quad \mu = \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta \cos \phi. \quad (143)$$

Подставив эти скалярные произведения в формулу (139), получим зависимость интенсивности от полярных углов, определяющих направление излучения:

$$\mathcal{W}(\vec{n}) = \frac{e^2 w^2}{4\pi c^3} \left[\frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} + 2 \frac{\beta \mu \sin \alpha}{(1 - \beta \cos \theta)^4} - \frac{(1 - \beta^2) \mu^2}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \right]. \quad (144)$$

Проинтегрировав выражение (144) по направлениям, мы, естественно, получим полную интенсивность (136). Запишем наряду с этим еще одно соотношение:

$$\int \mathcal{W} d^2 n = I, \quad \int \mathcal{W} \vec{n} d^2 n = \vec{\beta} I. \quad (145)$$

Оба соотношения проверяются посредством вычисления несложных интегралов.

4. *Излучаемые импульс и энергия.* Формулы (145) позволяют записать формулу для четырехмерного импульса, представляющего энергию и импульс, которые уносит излучаемое зарядом поле, в следующем виде:

$$d\underline{P} = \frac{I}{c^2} d\underline{x}(t_1) = \frac{I}{c^2} \{c dt_1, d\vec{x}(t_1)\} = \frac{I}{c} dt_1 \{1, \vec{\beta}(t_1)\} = \frac{dt_1}{c} \int \mathcal{W} \{1, \vec{n}\} d^2 n. \quad (146)$$

Можно проверить прямой выкладкой релятивистскую ковариантность этой формулы. Но можно продемонстрировать ее явно, если ввести четырехмерные векторы мгновенной безразмерной скорости $\underline{\beta}(t_1) = \gamma(t_1)\{1, \vec{\beta}(t_1)\}$ и мгновенного ускорения

$$\underline{w}(t_1) = \gamma^2\{\gamma^2\vec{\beta}\vec{w}, \vec{w} + \gamma^2(\vec{\beta}\vec{w})\vec{\beta}\}, \quad (147)$$

а также волновой вектор излучаемого поля

$$\underline{x} = \varkappa\{1, \vec{n}\}, \quad (148)$$

выбрав какую-нибудь величину волнового числа \varkappa . Поскольку все частоты (или волновые числа, или модули импульсов) фотонов преобразуются одинаково, т. е. умножаются на множители, которые не зависят от исходной частоты, то безразлично, какую величину \varkappa взять.

Тогда легко показать, что формула (146) может быть записана так:

$$dP = -\frac{e^2}{4\pi c^3} d\tau_1 \int \frac{(\underline{x}\underline{\beta})^2 \underline{w}^2 + (\underline{x}\underline{w})^2}{(\underline{x}\underline{\beta})^5} \varkappa^2 d^2 n \underline{x}. \quad (149)$$

Сюда входят инвариантные величины: дифференциал собственного времени заряда в данный момент $d\tau_1 = dt_1/\gamma$, инвариант $\varkappa^2 d^2 n$ и дробь, содержащая только скалярные произведения четырехмерных векторов, а также вектор \underline{x} . Введенная для удобства и наглядности величина \varkappa входит в одной и той же степени в числитель и знаменатель подынтегрального выражения и сокращается.

Таким образом, мощность излучения можно представить в виде выражения, содержащего явно инвариантный множитель (последняя дробь) и в свою очередь входящего в ковариантное выражение для излучаемого импульса:

$$\mathcal{W} = -\frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\varkappa^3}{\gamma} \frac{(\underline{x}\underline{\beta})^2 \underline{w}^2 + (\underline{x}\underline{w})^2}{(\underline{x}\underline{\beta})^5}. \quad (150)$$

При мгновенной остановке заряда, т. е. при переходе в его мгновенную собственную систему отсчета, где $\vec{\beta} = 0$, будет $\underline{w}^2 = -w^2$, $\varkappa = \varkappa_0$, $\underline{x}\underline{\beta} = \varkappa_0$, $\underline{w}\underline{x} = -\varkappa_0 \vec{n}\vec{w}$ и формула (150) перейдет в формулу Лармора (133).

5. *Движение по прямой.* Рассмотрим этот случай подробнее, так как для него формулы получаются проще и нагляднее. При

параллельных скорости и ускорению ($\vec{\beta}||\vec{w}$) излучение не зависит от азимута и

$$\mathcal{W} = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5}. \quad (151)$$

Поскольку на концах промежутка изменения угла θ неотрицательная функция \mathcal{W} обращается в нуль, внутри она должна иметь максимум. Действительно, он достигается при

$$\cos \theta_{\max} = \frac{\sqrt{1+15\beta^2}-1}{3\beta}, \quad \sin \theta_{\max} = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{2}{1+3\beta^2+\sqrt{1+15\beta^2}}}. \quad (152)$$

При малых скоростях последний знаменатель в (151) можно заменить единицей. Тогда распределение излучения по направлениям описывается простым множителем $\sin^2 \theta$. Прямо вперед и назад излучения нет, а во всех других направлениях оно примерно одинаково. Максимум достигается при $\theta = \pi/2$.

Если заряд ультрарелятивистский, то характер излучения совсем другой. Разность в знаменателе $1 - \beta \cos \theta$ в (151) при близких к единице β близка к единице при всех углах, кроме малых. Если же $0 < \theta \ll 1$, то этот знаменатель близок к нулю и дробь становится очень большой. Продемонстрируем это количественно.

При малых углах и скоростях, близких к скорости света, рассматриваемую разность можно преобразовать следующим образом:

$$1 - \beta \cos \theta = 1 - \beta + \beta(1 - \cos \theta) = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta} + 2\beta \sin^2 \frac{\theta}{2} \sim \frac{1}{2\gamma^2} + \frac{\theta^2}{2} = \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2\gamma^2}. \quad (153)$$

Подставив ее в (151) и заменив синус на угол, получим

$$\mathcal{W} \sim \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 \theta^2 \left(\frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \right)^5 = \frac{e^2}{4\pi c^3} w^2 2^5 \gamma^8 \frac{u}{(1 + u)^5}, \quad u = (\theta\gamma)^2. \quad (154)$$

Таким образом, в существенной части мощность излучения зависит от произведения $\theta\gamma$. В частности, максимум эта мощность достигает при $u = 1/4$, т.е. $\theta_{\max} = 1/(2\gamma)$, что согласуется с (152). Максимальное значение дроби $u/(1 + u)^5$ равно $2^8/5^5$. Половинное от максимального значение мощности принимает при двух корнях уравнения $u/(1 + u)^5 = 2^7/5^5$. Эти корни $u = 0.05303$ и $u = 0.8216$. Соответствующие значения углов $\theta = 0.2303/\gamma$ и $\theta = 0.9065/\gamma$.

На рис. 4а приведены полярные диаграммы безразмерных множителей $\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \frac{1}{32\gamma^8}$, определяющих направленность излучаемой зарядом энергии (151), при $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98$. Соответствующие значения $\gamma = 1.154, 1.167, 2.294, 3.203, 5.025$. Диаграммы с ростом β становятся все более узкими и вытянутыми. Множители $32\gamma^8$, для выбранных значений β равны соответственно $32, 1.01 \cdot 10^2, 1.91 \cdot 10^3, 2.46 \cdot 10^4, 3.54 \cdot 10^5, 1.30 \cdot 10^7$. Они введены (в знаменатель) для возможности помещения кривых на один график. Без этих множителей реальная вытянутость кривых с приближением β к единице растет катастрофически. На рис. 4б значения тех же функций отложены в зависимости от аргумента $u = (\theta\gamma)^2$. Большим значениям β соответствуют большие величины максимумов. Там же помещена и предельная кривая $u/(1+u)^5$, отвечающая $\beta = 1, \gamma = \infty$. Видно, как кривые с приближением β к 1 приближаются к своей предельной кривой, причем значительная близость достигается уже при не очень больших γ .

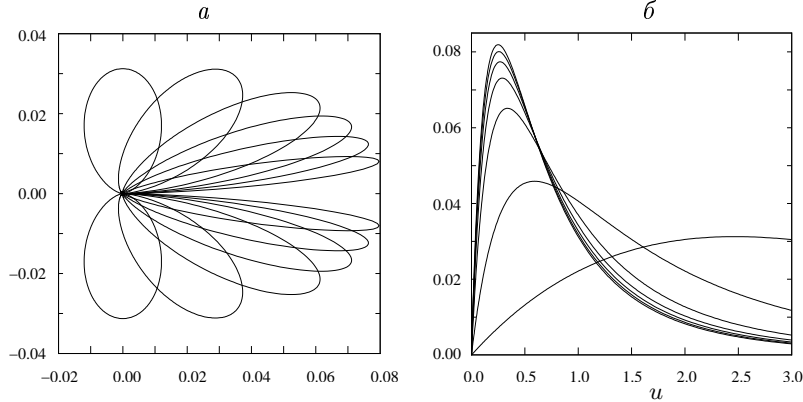


Рис. 4а. Отношения $\frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \frac{1}{32\gamma^8}$ при $\beta = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95$ и 0.98 в полярных координатах.

Рис. 4б. Те же величины, что и на рис. 4а, в зависимости от аргумента $u = (\theta\gamma)^2$ и предел при $\beta \rightarrow 1.0$.

Хотя точная функция распределения излучения по направлениям заменена на приближенную, ошибка при больших γ невелика. Так, полная интенсивность, находимая по точной и по приближенной формулам, если во второй продолжить интегрирование по углу

до бесконечности, получается одной и той же. Действительно, два интеграла равны:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3 \theta d\theta}{(1 - \beta \cos \theta)^5} = \int_{-1}^1 \frac{1 - \eta^2}{(1 - \beta \eta)^5} d\eta = I_{05} - I_{25} = \frac{4}{3} \gamma^6,$$

$$2^5 \gamma^{10} \int_0^\infty \frac{\theta^3 d\theta}{(1 + \theta^2 \gamma^2)^5} = 2^5 \gamma^6 I_{235} = \frac{4}{3} \gamma^6. \quad (155)$$

Здесь и далее используются интегралы с двумя и тремя индексами, вычисляемые в Приложении В.

Тот же порядок, что и угол максимальной мощности излучения, имеют средние степени угла, взвешенные по распределению интенсивности:

$$\begin{aligned} \langle \theta^\delta \gamma^\delta \rangle &= \frac{3}{4\gamma^6} 2^5 \gamma^{10+\delta} \int_0^\infty \frac{\theta^{\delta+3} d\theta}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^5} = 24 I_{2\delta+35} = \\ &= \frac{1}{2} \Gamma(3 - \delta/2) \Gamma(2 + \delta/2) = \left(1 - \frac{\delta}{4}\right) \left(1 - \frac{\delta^2}{4}\right) \frac{\pi \delta/2}{\sin(\pi \delta/2)}. \end{aligned} \quad (156)$$

Средние имеют смысл при $-4 < \delta < 6$. В частности, средний угол и средний квадрат угла

$$\langle \theta \rangle = \frac{9\pi}{32} \frac{1}{\gamma} = \frac{0.8836}{\gamma}, \quad \langle \theta^2 \rangle = \frac{24}{\gamma^2} I_{255} = \frac{1}{\gamma^2}. \quad (157)$$

Соответственно дисперсия и стандарт равны

$$D\theta = \frac{0.2193}{\gamma^2}, \quad \sqrt{D\theta} = \frac{0.4683}{\gamma}. \quad (158)$$

Таким образом, излучение ультррелятивистского заряда, который движется мгновенно по прямой, т.е. проходит через точку перегиба своей траектории, где вторая производная от радиуса-вектора по времени равна нулю, сосредоточено в узком конусе с углом раствора порядка $1/\gamma$ в сторону его движения, хотя прямо по направлению этого движения излучения нет. Заметим, что в собственной системе отсчета заряд неподвижен и соответственно излучает. Движущийся заряд увлекает за собой и создаваемое им поле.

Случай движения заряда по окружности заслуживает отдельного рассмотрения, которое будет осуществлено в разделе, посвященном магнито-тормозному механизму излучения.

§ 5. Спектр излучения в волновой зоне

1. *Преобразования Фурье от потенциалов.* В этом параграфе получим представление спектра излучения движущегося заряда на больших расстояниях от него, т. е. в волновой зоне. Для этого найдем преобразования Фурье по времени от электромагнитных величин и начнем с потенциалов (108).

Определим эти преобразования обычным способом, не вводя в них множителей:

$$\varphi_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \varphi(t_1) dt, \quad \vec{A}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{A}(t_1) dt. \quad (159)$$

У всех величин в этом параграфе не будем писать аргумента \vec{r} , так как он у них принимает одно и то же значение, т. е. точка наблюдения закреплена. Заметим также, что хотя потенциалы и другие величины зависят от времени t_1 , преобразования вычисляются по времени наблюдателя t .

Воспользовавшись соотношениями, связывающими времена t и t_1 (110) и их дифференциалы (111), получим

$$\varphi_\omega = \frac{e}{R} e^{i\omega R/c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1 - \vec{x}\vec{n}/c)} dt_1, \quad \vec{A}_\omega = \frac{e}{R} e^{i\omega R/c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1 - \vec{x}\vec{n}/c)} \vec{\beta} dt_1. \quad (160)$$

Эти преобразования можно представить в четырехмерных обозначениях через один вектор, а именно

$$\underline{A}_\omega = \{\varphi_\omega, \vec{A}_\omega\} = \frac{e}{R} e^{i\omega R/c} 2\pi \underline{G}(\vec{\alpha}), \quad (161)$$

где

$$\underline{G}(\vec{\alpha}) = \underline{G}_\omega(\vec{n}) = \{G_0(\vec{\alpha}), \vec{G}(\vec{\alpha})\} = \frac{1}{2\pi c} \int e^{i\vec{\alpha}\vec{x}} d\vec{x}. \quad (162)$$

Аргументом этого вектора является пространственная часть четырехмерного вектора

$$\underline{x} = \{\varkappa, \vec{\varkappa}\}, \quad \vec{\varkappa} = \varkappa \vec{n}, \quad \varkappa = \omega/c, \quad (163)$$

т. е. волновой вектор, длина которого равна волновому числу. Интеграл в (162) берется по траектории заряда в пространстве Минковского, называемой мировой линией:

$$\underline{x} = \{c t_1, \vec{x}(t_1)\}, \quad d\underline{x}/c = \{dt_1, \vec{\beta}(t_1) dt_1\}. \quad (164)$$

Фазовый множитель перед преобразованиями Фурье в (160) и (161) не играет никакой роли, так как его модуль равен 1. В равенствах (159)–(161), как и дальше, где вместо вектора $\vec{\varkappa}$ в качестве аргумента написана частота ω в индексе, зависимость преобразований Фурье от вектора \vec{n} подразумевается.

Из условия Лоренца следует соотношение между преобразованиями Фурье от потенциалов

$$\varkappa \underline{A}_\omega = 0, \quad \varkappa \varphi_\omega = \vec{\varkappa} \vec{A}_\omega \quad (165)$$

или (что то же самое) между составляющими вектора (162)

$$\varkappa \underline{G}(\vec{\varkappa}) = 0, \quad \varkappa G_0(\vec{\varkappa}) = \vec{\varkappa} \vec{G}(\vec{\varkappa}). \quad (166)$$

Поскольку потенциалы вещественны, то должны выполняться соотношения

$$\underline{A}_{-\omega} = \underline{A}_\omega^*, \quad (167)$$

т. е. изменение знака аргумента преобразования равносильно комплексному сопряжению. Обратные преобразования

$$\underline{A}(t_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \underline{A}_\omega d\omega. \quad (168)$$

2. Преобразования напряженностей. Поскольку напряженности электромагнитного поля выражаются линейно через производные от векторного потенциала по времени согласно (125), то преобразования Фурье от напряженностей найти очень просто. Для электрического поля получается

$$\begin{aligned}\vec{E}_\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \vec{E}(t_1) dt = \frac{i}{\mathfrak{a}} \vec{\mathfrak{a}} \times (\vec{A}_\omega \times \vec{\mathfrak{a}}) = i\mathfrak{a}\vec{n} \times (\vec{A}_\omega \times \vec{n}) = \\ &= i\mathfrak{a} [\vec{A}_\omega - \vec{n}(\vec{A}_\omega \vec{n})] = i\mathfrak{a} [\vec{A}_\omega - \vec{n}\varphi_\omega].\end{aligned}\quad (169)$$

Аналогично для магнитного поля

$$\vec{H}_\omega = i\vec{\mathfrak{a}} \times \vec{A}_\omega = \vec{n} \times \vec{E}_\omega. \quad (170)$$

Вещественность напряженностей влечет для их преобразований справедливость соотношений, аналогичных (167) для потенциалов. Поэтому равенство Парсевалья запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\vec{E}_\omega|^2 d\omega. \quad (171)$$

Легко убедиться, что входящий сюда квадрат преобразования в силу равенств (165) и (161) выражается через вектор \underline{G} :

$$\begin{aligned}|\vec{E}_\omega|^2 &= \mathfrak{a}^2 \left[|\vec{A}_\omega|^2 + |\varphi_\omega|^2 - \vec{n}(\vec{A}_\omega \varphi_\omega^* + \vec{A}_\omega^* \varphi_\omega) \right] = \\ &= \mathfrak{a}^2 \left[|\vec{A}_\omega|^2 - |\varphi_\omega|^2 \right] = -\mathfrak{a}^2 \underline{A}_\omega \underline{A}_\omega^* = -4\pi^2 \frac{e^2}{R^2} \mathfrak{a}^2 \underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^*.\end{aligned}\quad (172)$$

3. *Энергетические величины.* Теперь найдем энергетические, т. е. квадратичные по напряженностям величины. Равенство (171) через мощность излучения переписывается так:

$$\overline{\mathcal{W}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W} dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_* dt = \frac{c}{4\pi} R^2 \int_0^{\infty} |\vec{E}|^2 dt = \frac{c}{4\pi^2} R^2 \int_0^{\infty} d\omega |\vec{E}_\omega|^2 \quad (173)$$

и ввиду (172)

$$\overline{\mathcal{W}} = -4\pi^2 \frac{e^2 c}{4\pi^2} \int_0^{\infty} d\omega \mathfrak{a}^2 \underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^*. \quad (174)$$

Из выражения для дифференциала излучаемого четырехмерного импульса (146) с учетом соотношений (145) получается

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{c^2} \int I d\underline{x} = \frac{1}{c} \int \{1, \vec{\beta}(t_1)\} I dt_1 = \frac{1}{c} \int \{1, \vec{\beta}\} dt_1 \int \mathcal{W} d^2n = \\ &= \frac{1}{c} \int d^2n \int \{1, \vec{\beta}\} dt_1 \mathcal{W} = \frac{1}{c} \int d^2n \{1, \vec{n}\} \overline{\mathcal{W}}.\end{aligned}\quad (175)$$

Наконец, воспользовавшись выражением (173) для интеграла от интенсивности, получим окончательно

$$\underline{P} = -e^2 c \int d^2 n \{1, \vec{n}\} \int_0^\infty \mathfrak{x}^2 d\mathfrak{x} \underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^* = -e^2 c \int \frac{d^3 \mathfrak{x}}{\mathfrak{x}} \underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^*. \quad (176)$$

Это выражение представляет излучаемую энергию и импульс в спектральной форме.

Четырехмерное скалярное произведение с учетом соотношения (166) можно представить в форме

$$\underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^* = (\vec{n} \vec{G}_\omega) (\vec{n} \vec{G}_\omega^*) - \vec{G}_\omega \vec{G}_\omega^* = -|\vec{n} \times \vec{G}_\omega|^2 = -|\vec{G}_\omega|^2 \sin^2 \Theta_\omega. \quad (177)$$

Углы для каждой частоты могут быть свои.

4. Разложения Фурье при периодическом движении заряда.

Если движение заряда периодическое, то все величины, связанные с этим движением, например, координаты заряда, его скорость, ускорение, а следовательно и напряженности излучаемого им электромагнитного поля, тоже периодические. Пусть период составляет T_0 по времени влияния t_1 . Легко показать, что и по времени наблюдателя t излучение заряда имеет тот же период. Действительно, пусть f — некоторая периодическая функция времени t_1 , т. е. $f(t_1 + T_0) = f(t_1)$. Времена t и t_1 связаны равенством (110), представляющим t как функцию t_1 . Найдя обратную зависимость t_1 от t и подставив ее в качестве аргумента функции f , получим другую функцию, обозначим ее f_1 , с теми же значениями, т. е. $f_1(t) = f(t_1)$. Но из (110) ясно, что если добавить T_0 к t_1 , то точно та же величина добавится к t и наоборот. Поэтому $f_1(t + T_0) = f(t_1 + T_0) = f(t_1) = f_1(t)$.

Периодические напряженности излучаемого поля раскладываются в ряды Фурье. Поэтому спектр излучения периодически движущегося заряда состоит из отдельных линий, причем расстояние между соседними линиями по круговой частоте равно $\omega_0 = 2\pi/T_0$ — круговой частоте, соответствующей периоду T_0 . Формулы, определяющие этот спектр, аналогичны приведенным выше для случая непериодического движения, только обычно множитель 2π включается в преобразование, а не в обращение его. Кроме того, размерность коэффициентов Фурье отличается от размерности преобразований, так как интеграл, входящий в их выражение, берется по периоду и делится на период.

Представим разложения четырех потенциалов в виде рядов Фурье:

$$\underline{A} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega_0 lt) \underline{A}_l. \quad (178)$$

Коэффициенты Фурье выражаются через потенциалы следующей формулой:

$$\underline{A}_l = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underline{A} \exp(i l \omega_0 t) dt. \quad (179)$$

Очевидно, что для вещественности потенциалов должно выполняться соотношение, аналогичное (167):

$$\underline{A}_{-l} = \underline{A}_l^*. \quad (180)$$

Так как потенциалы подчиняются условию Лоренца во всех случаях (периодическое движение или нет), то коэффициенты разложений потенциалов удовлетворяют соотношению

$$\vec{n} \vec{A}_l = \varphi_l. \quad (181)$$

Поскольку напряженности электромагнитного поля представляются через производную по времени от векторного потенциала согласно (125), то разложения напряженностей имеют тот же вид, что и (178), и их коэффициенты выражаются через (179):

$$\vec{E}_l = -\frac{i}{c} l \omega_0 \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{A}_l) = -\frac{i}{c} l \omega_0 [\vec{n}(\vec{n} \vec{A}_l) - \vec{A}_l], \quad \vec{H}_l = \frac{i}{c} l \omega_0 \vec{n} \times \vec{A}_l. \quad (182)$$

Точно такая же аналогия выполняется и для выражений коэффициентов рядов Фурье через вектор — аналог (161). После подстановки соотношения между временами наблюдения и влияния (110) и выражений (179) для потенциалов получится

$$\begin{aligned} \underline{A}_l &= \frac{\omega_0}{2\pi} \exp(i l \omega_0 R/c) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \underline{A} \exp(i l \omega_0 (t_1 - \vec{n} \vec{x}/c)) (1 - \vec{n} \vec{\beta}) dt_1 = \\ &= \frac{\omega_0}{2\pi} \frac{e}{R} \exp(i l \omega_0 R/c) \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp(i l \omega_0 (t_1 - \vec{n} \vec{x}/c)) \{1, \vec{\beta}\} dt_1. \end{aligned} \quad (183)$$

Отсюда следует

$$\underline{A}_l = \frac{e\omega_0}{R} \exp(i l \omega_0 R/c) \underline{G}_l, \quad (184)$$

где четырехмерный коэффициент \underline{G}_l , определенный с тем же множителем, что и в (162):

$$\underline{G}_l(\vec{n}) = \{G_{0l}, \vec{G}_l\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp(i l \omega_0(t_1 - \vec{n}\vec{x}/c)) \{1, \vec{\beta}\} dt_1, \quad (185)$$

причем $G_{0l}(\vec{n}) = \vec{n}\vec{G}_l(\vec{n})$.

Формулы (182) также можно переписать:

$$\vec{E}_l = -i \frac{e}{R} \frac{l\omega_0^2}{c} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{G}_l), \quad \vec{H}_l = i \frac{e}{R} \frac{l\omega_0^2}{c} \vec{n} \times \vec{G}_l. \quad (186)$$

5. *Спектр излучения периодического заряда.* Квадраты коэффициентов Фурье напряженностей

$$|\vec{E}_l|^2 = |\vec{H}_l|^2 = \frac{l^2}{c^2} \omega_0^2 (|\vec{A}_l|^2 + |\varphi_l|^2 - \vec{n}\vec{A}_l\varphi_l^* - \vec{n}\vec{A}_l^*\varphi_l) = \frac{l^2}{c^2} \omega_0^2 (|\vec{A}_l|^2 - |\varphi_l|^2) \quad (187)$$

также выражаются через \underline{G}_l :

$$|\vec{E}_l|^2 = -\frac{l^2}{c^2} \omega_0^2 \underline{A}_l \underline{A}_l^* = -\frac{l^2}{c^2} \omega_0^4 \frac{e^2}{R^2} \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (188)$$

Запишем уравнение замкнутости для вектора \vec{E} :

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \vec{E}^2 dt = T_0 \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\vec{E}_l|^2 = -T_0 \frac{e^2}{R^2} \frac{\omega_0^4}{c^2} 2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (189)$$

Через полное излучение его можно переписать так:

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} \mathcal{W} dt_1 = \frac{c}{4\pi} R^2 \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \vec{E}^2 dt = -\frac{e^2}{c} \omega_0^3 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (190)$$

Четырехмерный импульс, переносимый излучением за период, находится, как и выше. Комбинация равенств (175) для случая периодического движения и (190) дает

$$\underline{P} = \frac{1}{c} \int d^2 n \{1, \vec{n}\} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt_1 \mathcal{W} = -\frac{e^2}{c^2} \omega_0^3 \int d^2 n \{1, \vec{n}\} \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^*. \quad (191)$$

Таким образом, спектр излучения периодически движущегося заряда состоит из отдельных равноотстоящих друг от друга линий. Формула (191) определяет интенсивности этих линий. Для возможности сравнения с распределением интенсивности в непрерывном спектре и интенсивность линий рассчитывают на единичный интервал частот, т. е. вводят множитель $1/\omega_0$. В расчете на единицу частоты и единичный телесный угол интенсивность l -той линии излучения заряда, совершающего периодическое движение, равна

$$W_l = R^2 \frac{c}{\omega_0} |\vec{E}_l|^2 = -\frac{e^2}{c^2} l^2 \omega_0^2 \underline{G}_l \underline{G}_l^* = \frac{e^2}{c^2} l^2 \omega_0^2 |\vec{n} \times \vec{G}_l|^2 = \frac{e^2}{c^2} l^2 \omega_0^2 |\vec{G}_l|^2 \sin^2 \Theta_l, \quad (192)$$

так что четырехмерный импульс излучения, испускаемого зарядом во все стороны, равен

$$\underline{P} = \omega_0 \int d^2n \{1, \vec{n}\} \sum_{l=1}^{\infty} W_l. \quad (193)$$

Для нахождения W_l необходимо вычислить три интеграла \vec{G}_l — пространственную часть четырехмерного вектора (185).

Отметим еще поведение интенсивности (192) при преобразованиях Лоренца. Поскольку в формуле вектор $\omega_0 \{1, \vec{n}\}$ преобразуется как импульс фотона, а $\omega_0^2 d^2n$ и квадрат вектора \underline{G} инвариантны, то инвариантом является также частное W_l/ω_0^2 .

6. *Нерелятивистский заряд.* Если заряд нерелятивистский, то времена t и t_1 отличаются только на постоянное слагаемое и в экспонентах в формулах преобразований, например, в (160) и (185), присутствует только частота. Поэтому спектр не зависит от направления излучения. Достаточно для непрерывного излучения вычислить три (вообще говоря) интеграла в зависимости от частоты

$$\vec{G}_\omega = \frac{1}{2\pi c} \int e^{i\omega t} \dot{\vec{r}}_0 dt, \quad (194)$$

В нерелятивистском пределе дифференциалы $d\vec{x}$ и $d\vec{r}_0$ не различаются. Вектор \vec{G} для нерелятивистского заряда можно связать с преобразованием ускорения. Действительно, проинтегрировав по частям в этом преобразовании, найдем

$$\vec{w}_\omega = \int e^{i\omega t} \vec{w} dt = -i\omega \int e^{i\omega t} \dot{\vec{r}}_0 dt = -i\omega \int e^{i\omega t} d\vec{r}_0 = -2\pi i c \omega \vec{G}_\omega. \quad (195)$$

Излучает нерелятивистский заряд только энергию (излучаемый им импульс пренебрежимо мал), причем легко вычисляется и полная спектральная интенсивность I_ω , так как все интегралы от квадратов синусов совпадают и равны $8\pi/3$. Напишем равенство (175) только для энергии

$$cP_0 = \int I dt = -\frac{e^2}{c} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int d^2n \underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^* = \int_0^\infty I_\omega d\omega. \quad (196)$$

Здесь

$$I_\omega = -\frac{e^2}{c} \omega^2 \int d^2n \underline{G}_\omega \underline{G}_\omega^* = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2}{c} \omega^2 |\vec{G}_\omega|^2. \quad (197)$$

Аналогичные формулы справедливы для периодического движения. Коэффициент Фурье

$$\vec{G}_l = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{il\omega_0 t} \dot{\vec{r}}_0 dt = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{il\omega_0 t} d\vec{r}_0. \quad (198)$$

Точно так же, как в (195), устанавливается связь вектора \vec{G}_l с преобразованием ускорения:

$$\vec{w}_l = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{il\omega_0 t} \vec{w} dt = -ic\omega_0^2 \vec{G}_l. \quad (199)$$

Полная интенсивность (энергия) линии также рассчитывается на единицу частоты:

$$I_l = \int d^2n W_l = -\frac{e^2}{c} \omega^2 \int d^2n \underline{G}_l \underline{G}_l^* = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2}{c} \omega_0^2 l^2 |\vec{G}_l|^2. \quad (200)$$

Формулы (197) и (200) фактически совпадают, так как частота линии с номером l равна $l\omega_0$. Эти формулы можно вывести и непосредственно из формулы Лармора (134).

В книге А. А. Соколова и И. М. Тернова [51] вывод формул, описывающих спектры излучающих зарядов, производится без использования понятия волновой зоны, возможность чего была показана в работе [50].

§ 6. Термодинамическое равновесие

В заключение этой главы кратко опишем состояние термодинамического равновесия, понятие о котором не относится прямо к содержанию главы, однако оно используется в дальнейшем.

Термодинамическое равновесие подробно описано в различных учебниках, например, в курсе Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица [29]. При нем происходят различные процессы, но каждый прямой процесс уравнивается обратным, так что в целом ничего не меняется. Состояние вещества и излучения характеризуется одним параметром — температурой.

Здесь укажем используемые в других главах формулы, выполняющиеся при термодинамическом равновесии (ТДР).

Это во-первых, формула Максвелла распределения частиц по скоростям, которая приводится в тех местах, где она применяется.

Во-вторых, формула Больцмана, устанавливающая равновесное распределение населенностей атомов (или ионов) по связанным состояниям при температуре T :

$$\frac{n_i}{n_j} = \frac{g_i}{g_j} e^{-(E_i - E_j)/k_B T}, \quad (201)$$

где n_i и n_j — концентрации атомов в состояниях с энергиями E_i и E_j , g_i и g_j — статистические веса этих состояний (число подуровней). Третья формула называется формулой ионизации или формулой Саха и определяет распределение элементов по стадиям ионизации:

$$n_e \frac{n^+}{n_1} = 2 \frac{g^+}{g_1} \frac{(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{-\chi_1/k_B T}. \quad (202)$$

В этой формуле n^+ — концентрация ионов, n_1 — концентрация атомов массой m в основном состоянии с энергией $E_1 = -\chi_1 < 0$, g^+ и g_1 — соответствующие статистические веса.

Три указанные формулы определяют равновесное состояние вещества. Состояние излучения характеризуется формулой Планка, согласно которой интенсивность излучения при ТДР дается функцией Планка $B_\nu(T)$:

$$I_\nu = B_\nu(T), \quad B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1}. \quad (203)$$

Глава II. Тормозной и рекомбинационный механизмы

§ 1. Излучение при кулоновском взаимодействии

В этом параграфе дадим точный вывод формул, характеризующих излучение нерелятивистского электрона в поле иона в рамках классической электродинамики. Сначала приведем решение задачи о движении двух нерелятивистских заряженных частиц при их кулоновском взаимодействии.

1. *Уравнения движения частиц.* Задача о движении нерелятивистских частиц под действием кулоновской силы совпадает с классической задачей двух тел, подчиняющихся закону тяготения Ньютона. Кратко воспроизведем ее решение отдельно для случаев ограниченной и неограниченной орбит. Задача сводится к уравнениям

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = Z_1 Z_2 e^2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = Z_1 Z_2 e^2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}. \quad (1)$$

Здесь \vec{r}_1 и \vec{r}_2 — радиусы-векторы частиц, m_1 и m_2 — их массы, а $Z_1 e$ и $Z_2 e$ — заряды.

Уравнения допускают разделение движений на движение центра масс и движение одной частицы относительно другой. Примем за основную частицу 1, считая, что вторая движется около нее. Обозначим через \vec{R} радиус-вектор их центра масс, а через $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ радиус-вектор относительного движения:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (2)$$

Тогда радиусы-векторы каждой из частиц выразятся через \vec{R} и \vec{r} :

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m}{m_1} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m}{m_2} \vec{r}. \quad (3)$$

Здесь m — приведенная масса:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (4)$$

Уравнения (1) перейдут в два новых уравнения, первое из которых соответствует равномерному и прямолинейному движению центра масс, а второе описывает относительное движение:

$$(m_1 + m_2)\ddot{\vec{R}} = 0, \quad m\ddot{\vec{r}} = Z_1 Z_2 e^2 \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (5)$$

Умножим второе уравнение в (5) на $\dot{\vec{r}}$, примем во внимание очевидные соотношения $\dot{\vec{r}}^2 = \dot{r}^2$ и $\dot{\vec{r}}\ddot{\vec{r}} = r\dot{r}$ и проинтегрируем результат. Получится первый интеграл уравнения — закон сохранения энергии

$$\frac{m(\dot{\vec{r}})^2}{2} + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} = \mathcal{E}, \quad (6)$$

где \mathcal{E} — полная энергия относительного движения.

Введя вектор момента $\vec{L} = m\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$, убедимся, что он не изменяется со временем. Действительно,

$$\dot{\vec{L}} = m \left[\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \right] = 0, \quad (7)$$

так как в обоих векторных произведениях сомножители коллинеарны. Таким образом, как всегда в задаче двух тел с консервативной силой, движение плоское.

Нас интересует излучение электрона в поле иона. Будем считать ион водородоподобным с некомпенсированным зарядом Ze . Положим $Z_2 = -1, Z_1 = Z$. Поскольку масса иона значительно больше массы электрона, можно принять, что приведенная масса совпадает с массой электрона (которую мы также будем обозначать просто m).

2. Траектории движения. В плоскости, перпендикулярной вектору момента, введем полярную систему координат, в которой радиус-вектор электрона и вектор его скорости

$$\vec{r} = r(\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}(\cos \varphi, \sin \varphi, 0) + r(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)\dot{\varphi}. \quad (8)$$

Тогда $\vec{L} = mr^2\dot{\varphi}(0, 0, 1)$, $\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}$ ($L > 0$) и

$$(\dot{\vec{r}})^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}. \quad (9)$$

Из (9) и (6) с учетом сделанного выбора зарядов находим производную по времени от расстояния между частицами:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{Ze^2}{r} + \mathcal{E} \right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}}. \quad (10)$$

Траектория электрона в полярных координатах $r = r(\varphi)$ определяется уравнением

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{Ze^2}{r} + \mathcal{E} \right) - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \quad (11)$$

Заметим, что в этом параграфе через \vec{r} обозначается радиус-вектор электрона относительно иона, который можно считать неподвижным. Поэтому здесь \vec{r} совпадает с вектором, который в Главе I обозначался \vec{x} . Далее не указываем нулевой аппликаты траектории.

Хотя для определения тормозного излучения достаточно рассмотреть случай положительной энергии, мы опишем для полноты случаи обоих знаков \mathcal{E} . При отрицательной энергии орбита электрона ограничена, при положительной — бесконечна.

а) Конечная орбита. Если энергия относительного движения отрицательна, электрон движется по эллипсу. Уравнение эллипса в полярных координатах

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad a = \frac{Ze^2}{2|\mathcal{E}|}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|\mathcal{E}|L^2}{mZ^2e^4}}, \quad (12)$$

где $\varepsilon < 1$ — эксцентриситет эллипса, а a — его большая полуось.

Зависимость полярных координат от времени удобно представить в параметрической форме:

$$r = a(1 - \varepsilon \cos \chi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{Ze^2}}(\chi - \varepsilon \sin \chi), \quad (13)$$

$$\cos \varphi = \frac{\cos \chi - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos \chi}, \quad \sin \varphi = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \frac{\sin \chi}{1 - \varepsilon \cos \chi}. \quad (14)$$

Это движение периодическое, его круговая частота и период

$$\omega_0 = \frac{(2|\mathcal{E}|)^{3/2}}{Ze^2 m^{1/2}} = \sqrt{\frac{Ze^2}{ma^3}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (15)$$

Ввиду периодичности движения параметр χ достаточно изменять в пределах от 0 до 2π .

Таким образом, радиус-вектор электрона в плоскости его движения

$$\vec{r} = (x, y) = (a(\cos \chi - \varepsilon), b \sin \chi), \quad b = \sqrt{1 - \varepsilon^2}a. \quad (16)$$

б) Бесконечная орбита. При положительной полной энергии траектория — гипербола. Ее уравнение в полярных координатах

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad a = \frac{Ze^2}{2\mathcal{E}}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}L^2}{mZ^2e^4}}, \quad (17)$$

что легко проверить непосредственно. В этих равенствах a — большая полуось, а $\varepsilon > 1$ — эксцентриситет гиперболы.

Полярные координаты от времени также представим в параметрической форме:

$$r = a(\varepsilon \operatorname{ch} \chi - 1), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{Ze^2}}(\varepsilon \operatorname{sh} \chi - \chi), \quad (18)$$

$$\cos \varphi = \frac{\varepsilon - \operatorname{ch} \chi}{\varepsilon \operatorname{ch} \chi - 1}, \quad \sin \varphi = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \frac{\operatorname{sh} \chi}{\varepsilon \operatorname{ch} \chi - 1}. \quad (19)$$

Радиус-вектор электрона при таком движении (a и b — большая и малая полуоси гиперболы)

$$\vec{r} = (x, y) = (a(\varepsilon - \operatorname{ch} \chi), b \operatorname{sh} \chi), \quad b = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}a. \quad (20)$$

Для наглядности приведем траектории движения электрона в виде софокусных эллипсов, параболы и гипербол в трех вариантах. В первом примем за единицу длины величину $a_0 = L^2/(Ze^2m) = (\varepsilon^2 - 1)a$ и выразим энергию через нее и эксцентриситет:

$$\mathcal{E} = (\varepsilon^2 - 1) \frac{Ze^2}{2a_0} = (\varepsilon^2 - 1) \frac{Z^2e^4m}{2L^2}. \quad (21)$$

При произвольных $\varepsilon \geq 1$ уравнения траектории можно записать единым образом:

$$(1 - \varepsilon^2) \frac{x^2}{a_0^2} + 2\varepsilon \frac{x}{a_0} + \frac{y^2}{a_0^2} = 1. \quad (22)$$

Во втором варианте за масштабную единицу примем несколько другую величину: $d_0 = \frac{L^2}{Ze^2m(\varepsilon + 1)} = a_0/(\varepsilon + 1)$. Если считать ее постоянной, то уравнения семейства траекторий примут вид

$$(1 - \varepsilon) \frac{x^2}{d_0^2} + 2\varepsilon \frac{x}{d_0} + \frac{y^2}{(1 + \varepsilon)d_0^2} = 1 + \varepsilon, \quad (23)$$

а энергия

$$\mathcal{E} = \frac{Ze^2}{2a} = \frac{Ze^2}{2a_0}(\varepsilon^2 - 1) = \frac{Ze^2}{2d_0}(\varepsilon - 1). \quad (24)$$

Наконец, гиперболы третьего семейства различаются значениями эксцентриситета, но имеют общее значение малой полуоси. Их уравнение

$$-\frac{x^2}{b^2} + 2\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}\frac{x}{b} + \frac{y^2}{b^2(\varepsilon^2 - 1)} = 1, \quad (25)$$

а энергия $\mathcal{E} = \frac{Ze^2}{2b}\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$.

На рис. 1 изображены софокусные окружность, эллипсы, парабола и левые ветви гипербол (общий фокус в начале координат). На рис. 1а закреплено значением a_0 , а на рис. 1б — значение d_0 и все расстояния выражаются в этих масштабах. Все кривые на рис. 1а проходят через точки $(0, \pm a_0)$, а их правые точки располагаются с равномерным шагом $\frac{1}{8}a_0$. Второй фокус у эллипса находится в точке $-\frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}a_0$, а центр в точке $-\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}a_0$. На рис. 1б у кривых общая правая точка $(1, 0)$, а вторые фокусы и центры помещаются в точках $-\frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon}d_0$ и $-\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}d_0$ соответственно. При $\varepsilon = 0$ это окружность радиуса 1, у которой два фокуса слиты и совпадают с центром. При $\varepsilon \rightarrow 1$ левый фокус и центр эллипса уходят на $-\infty$ и траектория превращается в параболу. Когда эксцентриситет становится больше единицы, парабола переходит в две ветви гиперболы, из которых нас интересует только левая. Формулы для центра и второго фокуса гипербол остаются теми же, что и для эллипсов, но так как у гипербол $\varepsilon > 1$, эти точки располагаются справа от первого фокуса. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ обе ветви гиперболы сливаются и превращаются в вертикальные прямые: ось ординат на рис. 1а и $x = 1$ на рис. 1б. Большие полуоси эллипсов и гипербол на рис. 1а и 1б

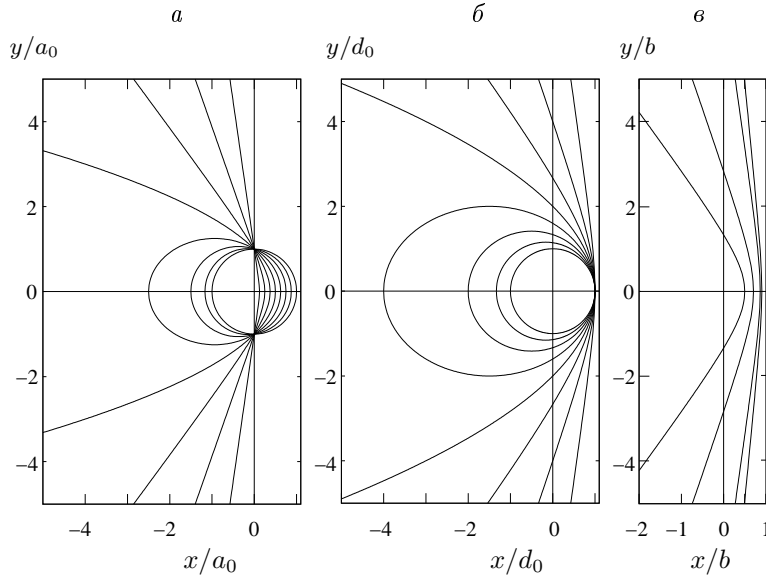


Рис. 1. Траектории электрона вокруг иона при
 (а, б) $\varepsilon = 0, \frac{1}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, 1, \frac{5}{3}, 3, 7$ и (в) $\varepsilon = \frac{5}{3}, 3, 7, 10, \infty$.

$a = \frac{a_0}{|1 - \varepsilon^2|}$ и $a = \frac{d_0}{|1 - \varepsilon|}$, малые — $b = \frac{a_0}{\sqrt{|1 - \varepsilon^2|}}$ и $b = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{|1 - \varepsilon|}} d_0$.
 У гипербол на рис. 1 в закреплено значение малой полуоси b , являющейся одновременно прицельным расстоянием. Тогда $a = \frac{b}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}$,
 центры гипербол в точках $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} b$, вторые фокусы — в точках $2 \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} b$. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ гиперболы стремятся к своему предельному положению: вертикальной прямой $x = b$.

Заметим, что если взаимодействуют заряды одного знака, то энергия положительна, эллиптические траектории невозможны, а гиперболические представляются правыми ветвями.

3. Излучение электрона. Снова рассматриваем два случая траекторий. В качестве направления излучения выберем единичный вектор $\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$.

а) Периодическое движение. Мощность излучения в единицу телесного угла находим по формуле (I.138): $\mathcal{W}(\theta, \phi, t) =$

$$= \frac{Z^2 e^6}{4\pi m^2 c^3 a^4} \frac{(1 - \varepsilon \cos \chi)^2 - [(\cos \chi - \varepsilon) \cos \phi + \sqrt{1 - \varepsilon^2} \sin \chi \sin \phi]^2 \sin^2 \theta}{(1 - \varepsilon \cos \chi)^6}. \quad (26)$$

Мощность излучения во все направления

$$I(t) = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 a_0^4} \frac{(1 - \varepsilon^2)^4}{(1 - \varepsilon \cos \chi)^4}. \quad (27)$$

Излучение периодическое и задается параметрически при зависимости времени от параметра χ согласно (13). Полное излучение за период

$$\int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} I(t) dt = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 a_0^4} (1 - \varepsilon^2)^4 \frac{2}{\omega_0} \int_0^\pi \frac{d\chi}{(1 - \varepsilon \cos \chi)^3} = \frac{2\pi}{3} \frac{Z^4 e^{10} m}{c^3 L^5} (2 + \varepsilon^2). \quad (28)$$

Когда траектория близка к параболической, излучение идет почти целиком в моменты времени, соответствующие значению параметра $\chi = 0$ (и через промежутки, кратные периоду T_0). Тогда разность $1 - \varepsilon \cos \chi$ можно представить как $\frac{1 - \varepsilon^2 + \chi^2}{2}$. Если положить $\chi = \sqrt{1 - \varepsilon^2} \chi_0$, то эта разность представится в виде $(1 - \varepsilon^2)(1 + \chi_0^2)/2$, а радиус-вектор в виде $\vec{r} = a((1 - \varepsilon^2)/2 - \chi^2/2, \sqrt{1 - \varepsilon^2} \chi) = a_0((1 - \chi_0^2)/2, \chi_0)$. Угловое распределение излучения будет

$$\mathcal{W} = \frac{Z^2 e^6}{4\pi m^2 c^3 a_0^4 [(1 + \chi_0^2)/2]^4} \left[1 - 4 \frac{[(1 - \chi_0^2)^2 \cos \phi/2 + \chi_0 \sin \phi]^2 \sin^2 \theta}{(1 + \chi_0^2)^2} \right], \quad (29)$$

а полная мощность

$$I = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 a_0^4 [(1 + \chi_0^2)/2]^4}. \quad (30)$$

При движении по параболе $\varepsilon = 1$, $\chi_0 = 0$, так что

$$\mathcal{W} = \frac{Z^2 e^6}{4\pi m^2 c^3} \frac{16}{a_0^4} (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \phi), \quad I = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3} \frac{16}{a_0^4}. \quad (31)$$

Отметим, что интеграл от приближенного выражения (30) по времени, если его взять по χ_0 от $-\infty$ до ∞ , причем $dt = (1 - \varepsilon \cos \chi) \frac{d\chi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{m a_0^3}{Z e^2}} (1 + \chi_0^2) \frac{d\chi_0}{2}$, получится совпадающим с (28) при $\varepsilon = 1$.

б) Движение по гиперболе. Излучение при гиперболической траектории характеризуется похожими формулами: $\mathcal{W}(\theta, \phi, t) =$

$$= \frac{Z^2 e^6}{4\pi m^2 c^3 a^4} \frac{(\varepsilon \operatorname{ch} \chi - 1)^2 - [(\varepsilon - \operatorname{ch} \chi) \cos \phi + \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \operatorname{sh} \chi \sin \phi]^2 \sin^2 \theta}{(\varepsilon \operatorname{ch} \chi - 1)^6}, \quad (32)$$

$$I(t) = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 a_0^4} \frac{(\varepsilon^2 - 1)^4}{(\varepsilon \operatorname{ch} \chi - 1)^4}, \quad (33)$$

однако периодичности здесь нет, время меняется от $-\infty$ до ∞ согласно (18). Полное излучение за все время движения (см. (B.159))

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt &= \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3 a_0^{5/2}} (\varepsilon^2 - 1)^{5/2} \sqrt{\frac{m}{Z e^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi}{(\varepsilon \operatorname{ch} \chi - 1)^3} = \\ &= \frac{2}{3} \frac{Z^4 e^{10} m}{c^3 L^5} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\varepsilon} \right) (\varepsilon^2 + 2) + 3\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Для параболы ($\varepsilon = 1$) формулы (28) и (34) дают одно и то же.

Движение, близкое к параболическому со стороны гиперболического обладает практически теми же свойствами, что и со стороны эллиптического. Так же излучение сосредоточено около момента, когда $\chi = 0$, преобразование радиуса-вектора получается в виде $\vec{r} = a_0((1 - \chi_0^2)/2, \chi_0)$, где $\chi_0 = \chi/\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, а остальные величины по виду вообще не отличаются от приведенных выше.

При очень больших эксцентриситетах траектория близка к прямолинейной. Из формул (32)–(34) следует, что при $\varepsilon \rightarrow \infty$ мгновенные величины остаются конечными, а полное излучение становится бесконечным.

4. *Спектр излучения электрона.* Для вывода спектрального распределения тормозного излучения необходимо вычислить преобразование Фурье от напряженности электрического поля. Здесь снова случаи отрицательной и положительной энергии рассматриваем отдельно.

а) Движение по эллипсу. Согласно формулам (I.185) вычисляем вектор, который вследствие того, что движение плоское, содержит лишь две компоненты, так что надо вычислить два интеграла, причем оба интеграла, как следует из формул (Б.38), выражаются через функцию Бесселя:

$$\begin{aligned}\vec{G}_l &= \frac{1}{2\pi c} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} e^{il\omega_0 t} (-a \sin \chi, b \cos \chi) \frac{d\chi}{dt} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi c} \int_{-\pi}^{\pi} e^{il(\chi - \varepsilon \sin \chi)} (-a \sin \chi, b \cos \chi) d\chi = \frac{1}{c} \left(ia J'_l(l\varepsilon), \frac{b}{\varepsilon} J_l(l\varepsilon) \right).\end{aligned}\quad (35)$$

Таким образом, энергия в линии с номером l в расчете на единицу частоты

$$I_l = \frac{8\pi}{3} \frac{e^2}{c^3} a^2 \omega_0^2 l^2 \left[J'^2_l(l\varepsilon) + \frac{1 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2} J_l^2(l\varepsilon) \right]. \quad (36)$$

б) Движение по гиперболе. И здесь вычисляем вектор (I.162), причем интегрирование произведем по параметру χ :

$$\vec{G}_\omega = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\vec{r} = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu(\varepsilon \operatorname{sh} \chi - \chi)} (-a \operatorname{sh} \chi, b \operatorname{ch} \chi) d\chi, \quad (37)$$

где безразмерная величина $\mu = \omega \sqrt{\frac{ma^3}{Ze^2}}$.

Для выражения интегралов через известные функции воспользуемся интегралом из теории бесселевых функций, представляющим функцию Макдональда мнимого порядка $K_{i\mu}(z)$. Эта функция изучена в Приложении Б. С помощью полученных там равенств (Б.99) и (Б.101) преобразование (37) представится так:

$$\vec{G}_\omega = \frac{1}{\pi c} e^{\pi\mu/2} \left(ia K'_{i\mu}(\mu\varepsilon), \frac{b}{\varepsilon} K_{i\mu}(\mu\varepsilon) \right). \quad (38)$$

Итак, спектральное разложение

$$I_\omega = \frac{8}{3\pi} \frac{e^2}{c^3} \omega^2 a^2 e^{\pi\mu} \left[K'^2_{i\mu}(\mu\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2} K_{i\mu}^2(\mu\varepsilon) \right]. \quad (39)$$

5. *Расчет на поток.* Интерес представляет излучение не отдельного электрона, а потока таких электронов. Проинтегрируем полученное выражение по прицельным расстояниям.

Обозначим через \vec{v} относительную скорость электрона, когда он находился на бесконечном расстоянии от иона. Полная энергия относительного движения электрона равна $\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2}$. Прицельное расстояние, равное b , в рассматриваемом случае — это расстояние между проекцией скорости \vec{v} на плоскость, перпендикулярную этой скорости и проходящую через ион, и ионом. Это расстояние равно также расстоянию фокуса гиперболы до ее асимптоты и ее малой полуоси. Через b и $v = |\vec{v}|$ момент и эксцентриситет выражаются так: $L = mbv$, $\varepsilon = \sqrt{1 + m^2v^4b^2/(Z^2e^4)}$.

Нам нужно вычислить интеграл

$$\frac{dq}{d\omega} = 2\pi \int_0^{\infty} I_{\omega} b db. \quad (40)$$

При закрепленной скорости электрона v величина большой полуоси гиперболы $a = \frac{Ze^2}{mv^2}$ постоянна, а малая полуось b связана с эксцентриситетом. Так как $b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$, то $b db = a^2 \varepsilon d\varepsilon$, причем эксцентриситет изменяется от 1 до бесконечности. Таким образом,

$$\frac{dq}{d\omega} = 2\pi a^2 \int_1^{\infty} I_{\omega} \varepsilon d\varepsilon = \frac{16}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^2 \frac{a^4}{\mu^2} e^{\pi\mu} \int_{\mu}^{\infty} \left[K'_{i\mu}{}^2(z) + \left(1 - \frac{\mu^2}{z^2}\right) K_{i\mu}^2(z) \right] z dz. \quad (41)$$

Здесь сделана подстановка $z = \mu\varepsilon$. Интеграл вычисляется при помощи уравнения для функции Макдональда

$$K_{i\mu}''(z) + \frac{1}{z} K_{i\mu}'(z) - \left(1 - \frac{\mu^2}{z^2}\right) K_{i\mu}(z) = 0. \quad (42)$$

Легко проверить, что

$$\frac{d}{dz} [z K_{i\mu}(z) K_{i\mu}'(z)] = z \left[K_{i\mu}''(z) + \left(1 - \frac{\mu^2}{z^2}\right) K_{i\mu}(z) \right], \quad (43)$$

и следовательно,

$$\frac{dq}{d\omega} = -\frac{16}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega^2 \frac{a^4}{\mu} e^{\pi\mu} K_{i\mu}(\mu) K_{i\mu}'(\mu). \quad (44)$$

Знак минус стоит потому, что $K_{i\mu}(z)$ убывающая функция z .

6. *Частные случаи.* Рассмотрим предельные случаи малых и больших частот, а также различные типы траекторий заряда.

1) Конечная траектория. Начнем со случая движения по окружности, когда $\varepsilon = 0$. Тогда $a = a_0$, энергия принимает наименьшее возможное при заданных величине момента и заряде иона значение $\mathcal{E} = -\frac{Z^2 e^4 m}{2L^2} = -\frac{Ze^2}{2a_0}$, а основная частота $\omega_0 = \sqrt{\frac{Ze^2}{ma_0^3}}$.

Принимая во внимание поведение функции Бесселя вблизи нуля, находим, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$I_l \sim \frac{8\pi}{3} \frac{e^2}{c^3} a_0^2 \omega_0^2 \left(\frac{l(l/2)^l}{l!} \right)^2 2\varepsilon^{2l-2}. \quad (45)$$

Отсюда ясно, что заряд, движущийся по окружности, излучает только одну линию — с номером 1, причем $I_1 = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{c^3} a_0^2 \omega_0^2 = \frac{4\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{L^2 c^3}$.

Напротив, когда эллипс приближается к параболе, т. е. $\varepsilon \rightarrow 1$,

$$I_l \sim \frac{8\pi}{3} \frac{Z^2 e^6}{L^2 c^3} l^2 (1 - \varepsilon^2) J_l'^2(l). \quad (46)$$

Понятно, что заметное излучение при этом может быть только в линиях с большими номерами, поэтому рассмотрим этот случай подробнее, воспользовавшись асимптотиками функций Бесселя.

В нашем случае аргумент меньше порядка, так что следует применить формулы (Б.73) и (Б.76) с функциями Макдональда. В них надо подставить l вместо ν , $u = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$ и соответствующую функцию v_- . Получающиеся формулы справедливы для больших номеров l . В случае почти параболического движения $u \ll 1$, $v_- \sim u^3/3$ и

$$I_l = \frac{8}{\pi} \frac{Z^2 e^6}{L^2 c^3} \mathcal{X}^2 \left[K_{2/3}^2(\mathcal{X}) + K_{1/3}^2(\mathcal{X}) \right], \quad (47)$$

где $\mathcal{X} = lu^3/3$. В крайних предельных случаях больших и малых значений \mathcal{X} получается следующее. При $\mathcal{X} \ll 1$ ($l \ll 3/u^3$) интенсивности линий $I_l \sim \frac{8}{\pi} 2^{-2/3} \Gamma^2(2/3) \frac{Z^2 e^6}{L^2 c^3} \mathcal{X}^{2/3}$, т. е. растут пропорционально $l^{2/3}$. В противоположном случае интенсивности линий экспоненциально убывают: $I_l \sim \frac{Z^2 e^6}{L^2 c^3} \mathcal{X} e^{-2\mathcal{X}}$. При номерах $l \sim 3/u^3 \gg 1$ интенсивности плавно растут до максимума, а затем плавно спадают, пока не включится экспоненциальное убывание.

2) Бесконечная траектория. Получим асимптотики величин, характеризующих излучение в случае почти прямолинейного движения. Если $\varepsilon \rightarrow \infty$ и при этом не очень велика частота ω , кроме того постоянна величина момента L , а значит масштаб a_0 , то справедливы асимптотики $a \sim \frac{a_0}{\varepsilon^2}$, $b \sim \frac{a_0}{\varepsilon}$, $\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} \sim (Ze^2/2a_0)\varepsilon^2$, $\mu \sim \frac{\omega}{\varepsilon^3}\mu_0$, $\mu_0 = \sqrt{\frac{ma_0^3}{Ze^2}} = \frac{L^3}{Z^2e^4m}$, $L = \sqrt{Ze^2ma_0}$. По формулам (Б.78), (Б.47) и (А.18) находим, что при малых μ и z будет $K_{i\mu}(z) \sim -\ln(z/2) - \gamma_E$, где γ_E — постоянная Эйлера, а $K'_{i\mu}(z) \sim -1/z$, так что

$$I_\omega \sim \frac{8}{3\pi} \frac{e^2 a_0^2}{c^3 \mu_0^2} = \frac{8}{3\pi} \frac{Z^2 e^6}{c^3 L^2}. \quad (48)$$

Спектр получается плоским, т. е. не зависящим от частоты. Этот случай осуществляется, если электрон летит почти прямо на ион ($b \sim a_0/\varepsilon \leq 1$). Если же прицельное расстояние конечно, как в случаях рис. 1б и 1в, для чего требуется, чтобы момент соответственно был $L \sim \sqrt{Ze^2md_0\varepsilon}$ и $L \sim \sqrt{Ze^2mb\varepsilon}$, то излучение исчезающе мало.

На больших частотах велика величина μ и можно воспользоваться асимптотиками функции $K_{i\mu}(z)$ и ее производной, т. е. формулами (Б.99) и (Б.101). Здесь надо взять $u = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}$, v_+ и представление через функции Макдональда. Подробнее рассмотрим случай движения, близкого к параболическому. Тогда $v_+ \sim u^3/3$ и $\mu \sim \omega\mu_0/u^3$, так что $\mu v_+ \sim \omega\mu_0/3$ и

$$I_\omega = \frac{8}{3\pi} \frac{e^2}{c^3} \omega^2 \frac{a_0^2}{3} \left[K_{2/3}^2(\omega\mu_0/3) + K_{1/3}^2(\omega\mu_0/3) \right]. \quad (49)$$

Если частота большая, но все же $\omega \ll 3/\mu_0$, то

$$I_\omega = \frac{2^{7/3}}{3^{2/3}} \frac{\Gamma^2(2/3)}{\pi} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{Ze^2}{m} \right)^{2/3} \omega^{2/3}. \quad (50)$$

Если же выполняется противоположное неравенство, то

$$I_\omega = \frac{8}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega a_0^{7/2} \sqrt{\frac{m}{Ze^2}} e^{-2\omega\mu_0/3}. \quad (51)$$

Здесь наблюдается та же закономерность, что и выше: сначала с ростом частоты интенсивность спектра растет пропорционально степени $2/3$ частоты, затем наблюдается пологий максимум, а затем экспоненциальный спад.

Наконец, найдем предельное выражение спектра, рассчитанного на поток электронов, на высоких частотах, когда $\mu \gg 1$. Тогда подставив формулы (Б.100) и (Б.102) в (44), получим

$$\frac{dq}{d\omega} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{e^2}{c^3} \omega^2 \frac{a^4}{\mu^2} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c^3} \frac{1}{v^2}. \quad (52)$$

Формулы (34) и (52) были выведены Х. А. Крамерсом в 1923 году.

§ 2. Тормозной механизм (нерелятивистская теория)

1. *Постановка задачи.* В этом параграфе рассмотрим конкретно и более подробно тормозной механизм излучения.

Тормозное излучение — это излучение заряда при кулоновском столкновении заряженных частиц. При излучении заряд теряет энергию, т. е. тормозится, что и определяет название механизма излучения. Однако, при выводе формул, описывающих это излучение, потери энергии зарядами считаются малыми и во внимание не принимаются. В этом параграфе частицы считаем нерелятивистскими.

Задача о тормозном излучении относится к теории неупругих столкновений, когда в результате столкновения двух частиц рождается еще одна частица — фотон.

Как мы видели в § 1, заряды движутся по гиперболам и, поскольку это движение с ускорением, в каждый момент времени излучают электромагнитные волны. Для нахождения этого излучения и его спектра надо было найти напряженности поля, а затем их преобразования Фурье по времени. Здесь вместо этого воспроизведем простой вывод формулы для сечения тормозного излучения, основанный на порядковых оценках. Этот вывод дан, например, в книге Я. Б. Зельдовича и Ю. П. Райзера [17].

Мощность полного (во всех направлениях) излучения движущегося точечного заряда в дипольном приближении дается формулой Лармора [28] (см. также (I.134))

$$I(t) = \frac{2}{3} \frac{1}{c^3} \ddot{\vec{d}}^2 \quad (53)$$

Здесь \vec{d} — дипольный момент системы двух зарядов $Z_1 e$ и $Z_2 e$:

$$\vec{d} = e (Z_1 \vec{r}_1 + Z_2 \vec{r}_2), \quad (54)$$

а точкой отмечается производная по времени.

Будем считать, что частица 2 с зарядом $Z_2 e$ и массой m_2 пролетает мимо частицы 1 с зарядом $Z_1 e$ и массой m_1 . Обозначим через \vec{R} радиус-вектор их центра масс, а через $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ радиус-вектор относительного движения. Тогда радиусы-векторы каждой из частиц выразятся через \vec{R} и \vec{r} по формулам (3). Дипольный момент также можно выразить через эти векторы:

$$\vec{d} = e [(Z_1 + Z_2) \vec{R} + m (Z_2/m_2 - Z_1/m_1) \vec{r}]. \quad (55)$$

Поскольку движение центра масс двух частиц (равномерное и прямолинейное) не приводит к излучению, достаточно рассматривать относительное движение, т. е. в (53) надо подставить

$$\ddot{\vec{d}} = m e (Z_2/m_2 - Z_1/m_1) \vec{w}. \quad (56)$$

Здесь \vec{w} — ускорение относительного движения.

Из (56) видно, что не всякие заряды могут излучать. В частности, взаимодействие одинаковых частиц не приводит к излучению в дипольном приближении.

Наибольший интерес представляет тормозное излучение электрона в поле иона. Будем считать ион водородоподобным с компенсированным зарядом Ze . Положим, как и в § 1, $Z_2 = -1, Z_1 = Z$ и примем, что приведенная масса совпадает с массой электрона $m_2 = m$.

2. *Оценка излучаемой энергии.* Закрепим относительную скорость v и прицельное расстояние налетающего электрона b . Основная часть взаимодействия происходит тогда, когда частицы достаточно близки друг к другу. В качестве характерного расстояния взаимодействия можно взять b . Тогда характерное время взаимодействия частиц $t \sim b/v$. Характерная величина ускорения (сила, деленная на приведенную массу) $w \sim Z e^2/(m b^2)$. Полное излучение за все время взаимодействия

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} I(t) dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dt \quad (57)$$

можно оценить так:

$$\Delta E \approx \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{Z e^2}{m b^2} \right)^2 \frac{b}{v} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{Z^2 e^4}{m^2} \frac{1}{b^3 v}. \quad (58)$$

Проинтегрируем эту величину по всем прицельным расстояниям, т. е. найдем излучение q равномерно распределенного потока налетающих электронов. Нас будет интересовать спектр этой величины. Спектральную плотность излучения обозначим $dq/d\omega$. Тогда

$$q = \int_0^{\infty} \Delta E 2 \pi b db = \int_0^{\infty} \frac{dq}{d\omega} d\omega. \quad (59)$$

3. *Спектр излучения электрона.* Для нахождения $dq/d\omega$ свяжем прицельное расстояние с частотой. Основной вклад в преобразование Фурье по времени на частоте ω дают значения t , для которых $\omega t \sim 1$. Следовательно, частота, на которой в основном излучает частица с прицельным расстоянием b , по порядку величины $\omega \sim v/b$. Поэтому основной вклад в излучение на частоте ω дают частицы с прицельным расстоянием $b \sim v/\omega$. Подставляя это соотношение в (59) (в том числе и в дифференциал db), получаем

$$q \approx \int_0^{\infty} \Delta E 2 \pi b^3 d\omega/v. \quad (60)$$

Отсюда находим

$$\frac{dq}{d\omega} \approx \frac{4\pi Z^2 e^6}{3 m^2 c^3 v^2}. \quad (61)$$

Если сравнить выведенные формулы с полученными точно в рамках классической электродинамики, то окажется, что все переменные входят в них одинаково, а выражение (58) отличается от (34) (с учетом того, что $L = mvb$, $2\mathcal{E} = mv^2 = Ze^2\sqrt{\varepsilon^2 - 1}/b$) лишь на численный множитель π , а (61) от (52) — на множитель $4/\sqrt{3}$.

Релятивистские и квантовомеханические эффекты учитывают, вводя дополнительный множитель g_{cc} — так называемый множитель Гаунта (или гаунт-фактор).

Окончательно, выражение для $dq/d\omega$ можно записать в форме

$$\frac{dq}{d\omega} = \frac{16\pi Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m^2 c^3 v^2} g_{cc}(v, \nu). \quad (62)$$

Аргумент множителя Гаунта — ν , обычная (не круговая) частота, применяемая, как правило, в астрофизике. Величину (62) также рассчитывают на единицу частоты ν , т. е. полагают

$$\frac{dq}{d\nu} = 2\pi \frac{dq}{d\omega} = \frac{32\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m^2 c^3 v^2} g_{cc}(v, \nu). \quad (63)$$

Вместо (63) в физике часто используется другая величина, а именно, дифференциальное сечение тормозного излучения (сс означает переход электрона из континуума в континуум):

$$\beta_{\text{сс}}(v, \nu) = \frac{1}{h\nu} \frac{dq}{d\nu}. \quad (64)$$

Эта величина размерности $\text{см}^2/\text{с}$ представляет собой число излучаемых фотонов в расчете на единицу частоты и единицу времени, если падает единичный поток (1 электрон на единичную площадку в единицу времени) на одну мишень. Согласно формуле (63)

$$\beta_{\text{сс}}(v, \nu) = \frac{32 \pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m^2 c^3 v^2 h \nu} g_{\text{сс}}(v, \nu). \quad (65)$$

Величина (63) отличается от (65) тем, что она дает излучаемую энергию, а не число фотонов.

4. *Усреднение по скоростям.* Теперь выражение (65) можно усреднить по скоростям налетающих электронов. Почти всегда можно считать, что они распределены по Максвеллу:

$$f(v) = \frac{4 \pi v^2 m^3}{(2 \pi m k_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m v^2}{2 k_B T}\right), \quad \int_0^{\infty} f(v) dv = 1. \quad (66)$$

Энергия фотонов с частотами от ν до $\nu + d\nu$, испускаемых в единице объема в единицу времени электронами со скоростями от v до $v + dv$, равна $h \nu \beta_{\text{сс}}(v, \nu) dv n_e n^+ f(v) v dv$. Произведение $f(v) dv$ равно доле электронов с указанными скоростями, множитель v учитывает, что из этих электронов попадут в мишень за единицу времени лишь те, которые находятся от нее на расстоянии, не большем (численно), чем v .

Полная энергия, испускаемая всеми электронами, получается интегрированием. В результате найдем количество энергии, испускаемой единицей объема за единицу времени в единичном интервале частот в единичном телесном угле. Эта величина называется излучательной способностью, или объемным коэффициентом излучения $\epsilon_{\text{сс}}(\nu)$. Во все направления излучается

$$4 \pi \epsilon_{\text{сс}}(\nu) = n_e n^+ h \nu \int_{v_{\min}}^{\infty} \beta_{\text{сс}}(v, \nu) f(v) v dv. \quad (67)$$

Нижний предел в интеграле отражает тот факт, что не всякий электрон может излучить фотон частоты ν . Действительно, после испускания фотона в поле иона скорость электрона уменьшается. Обозначим скорость электрона после излучения через v' . Ясно, что должен выполняться закон сохранения энергии

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{m (v')^2}{2} + h \nu. \quad (68)$$

Справа и слева величины положительны, следовательно справедливо неравенство $v \geq v_{\min} = \sqrt{2 h \nu / m}$.

Интеграл в (67) удобнее вычислять, взяв в качестве переменной интегрирования v' . Принимая во внимание соотношения между дифференциалами скоростей $v dv = v' dv'$ и значениями функции Максвелла $f(v)/v^2 = f(v') \exp(-h \nu / k_B T) / (v')^2$, а также вынося из-под интеграла среднее значение множителя Гаунта (который слабо зависит от скорости), находим окончательно

$$\epsilon_{cc}(\nu) = n_e n^+ \frac{32 \pi^2 Z^2 e^6}{3 \sqrt{3} c^3} \frac{k_B T}{(2 \pi m k_B T)^{3/2}} \bar{g}_{cc}(\nu, T) \exp\left(-\frac{h \nu}{k_B T}\right). \quad (69)$$

Экспоненциальный множитель определяет характерный для тормозного излучения так называемый завал по частоте.

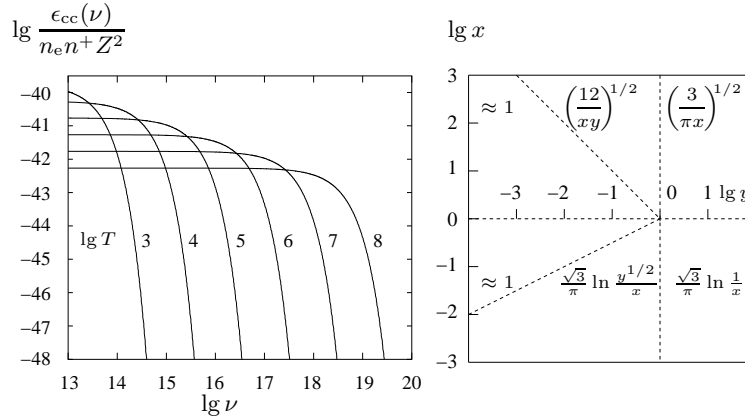


Рис. 2. Коэффициент тормозного излучения $\epsilon_{cc}(\nu)$. **Рис. 3.** Оценки множителя Гаунта $g_{cc}(\nu, T)$.

На рис. 2 отражен спектр коэффициента тормозного излуче-

ния для ряда значений температуры без учета гаунтовских множителей.

Формула для полного излучения, т. е. во всех частотах, также легко выводится, если опять вынести среднее значение множителя $g_{cc}(\nu, T)$:

$$\epsilon_{cc}(T) = \int_0^{\infty} \epsilon_{cc}(\nu) d\nu = n_e n^+ \frac{32 \pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3}} \frac{(k_B T)^2}{c^3 h (2 \pi m k_B T)^{3/2}} \bar{g}_{cc}. \quad (70)$$

Если подставить в (70) значения всех постоянных, то получится (здесь и дальше численные оценки даются без учета множителя Гаунта)

$$4 \pi \epsilon_{cc}(T) = 1.42 \cdot 10^{-27} Z^2 T^{1/2} n_e n^+ (\text{эрг см}^{-3} \text{с}^{-1}). \quad (71)$$

5. *Поглощение.* Найдем сечение поглощения. Это процесс, обратный тормозному излучению: пролетающий мимо иона электрон поглощает фотон, энергия которого добавляется к кинетической энергии электрона согласно закону сохранения (68). Но теперь начальная энергия электрона может быть произвольной (нерелятивистской), в частности, нулевой.

Для вывода формулы для сечения поглощения воспользуемся обычным приемом. Примем, что выполняется термодинамическое равновесие (ТДР). Концентрации атомов в состоянии ТДР отметим звездочкой. Запишем условие детального баланса: число фотонов, излучаемых единицей объема в единицу времени, равно числу поглощаемых фотонов:

$$n_e n_*^+ f(v) dv v \frac{\beta_{cc}}{4\pi} d\nu \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T) \right] = n_e n_*^+ f(v') dv' k_{cc} \frac{B_\nu(T)}{h\nu} d\nu. \quad (72)$$

Здесь v и v' скорости электрона, удовлетворяющие соотношению (68). Множитель в квадратных скобках учитывает вынужденное излучение. Подставив в (72) распределение Максвелла и формулу Планка (I.203), получим

$$k_{cc}(v', \nu) = \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \frac{v^2}{v'} \beta_{cc}(v, \nu) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{m^2 c h} \frac{g_{cc}(v, \nu)}{v' \nu^3} = 1.80 \cdot 10^{14} \frac{Z^2}{v' \nu^3}. \quad (73)$$

Сечение поглощения также можно усреднить по максвелловскому распределению скоростей электронов, но проще написать

условие детального баланса, которое имеет вид соотношения Кирхгофа—Планка, и из него получить усредненное сечение (в выражении (70) при этом надо тоже написать n_*^+):

$$n_e n_*^+ \bar{k}_{cc}(\nu, T) B_\nu(T) = \epsilon_{cc}(\nu, T) \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(t) \right], \quad (74)$$

$$\bar{k}_{cc}(\nu, T) = \int_0^\infty k_{cc}(v', \nu) f(v') dv' =$$

$$= \frac{16\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3}} \frac{k_B T}{ch} \frac{1}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \bar{g}_{cc}(\nu, T) \frac{1}{\nu^3} = 3.69 \cdot 10^8 \frac{Z^2}{T^{1/2}} \frac{1}{\nu^3}. \quad (75)$$

Размерность сечений поглощения $k_{cc} - \text{см}^5$, а коэффициента поглощения $\alpha_{cc} = n_e n_*^+ k_{cc} - 1/\text{см}$.

6. *Гаунтовские множители.* Многие авторы оценивали эти множители, исходя из различных предположений. Здесь на рис. 3 воспроизведены данные книги [84]. Используются обозначения $x = \frac{h\nu}{k_B T}$, $y = \frac{k_B T}{Z^2 \chi_H}$, где $\chi_H = me^4/2\hbar^2 = 2\pi^2 me^4/h^2$ — энергия ионизации водорода из основного состояния.

Исходя из выведенных формул можно получить сечения фотоионизации и фоторекомбинации, что мы сделаем в параграфе 4.

§ 3. Релятивистское тормозное излучение

1. *Описание процесса.* В этом параграфе дадим описание процесса тормозного излучения электрона при пролете его в поле ядра с учетом релятивистских и квантовых эффектов [5].

Будем считать, что ядро имеет заряд Z , а масса его настолько велика, что ее можно принять равной бесконечности, т. е. рассматривать ядро как неподвижный центр. Электрон считается релятивистским, т. е. его скорость достаточно велика, чтобы его можно было рассматривать как свободную частицу, описываемую плоской волной.

Пусть электрон с импульсом \vec{p} излучает фотон с импульсом \vec{k} , а сам приобретает новый импульс \vec{p}_1 . Этот электрон называют вторичным. Излучение свободным электроном фотона невозможно, однако при наличии ядра излишний импульс $\vec{q} = \vec{p}_1 + \vec{k} - \vec{p}$ забирает

это ядро. Бесконечность массы ядра позволяет не принимать во внимание отдачу при излучении, т. е. положить передаваемую ядру энергию равной нулю. В связи с этим закон сохранения энергии в рассматриваемом процессе соблюдается, в то время как сохранения импульса не происходит.

Все вычисления производятся в системе отсчета, в которой рассеивающий центр покоится. Ввиду неучета отдачи не все приводимые величины являются релятивистски ковариантными.

Квантовому процессу тормозного излучения электрона отвечают две диаграммы Фейнмана:

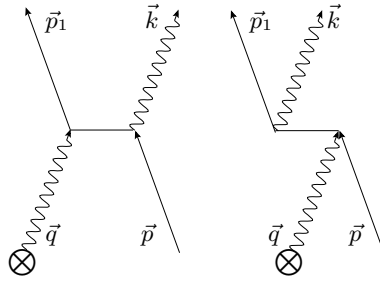


Рис. 4. Диаграммы тормозного излучения.

На диаграмме сплошными линиями изображается электрон, а волнистыми — фотон. Точки, где линия фотона выходит из линии электрона или входит в нее (узлы), соответствуют взаимодействию между ними, так что тормозное излучение является процессом второго порядка. В промежутках между взаимодействиями изображается так называемый виртуальный электрон. В реакции участвует внешнее стационарное электрическое поле ядра, что отмечено волнистой линией с перечеркнутым кружком на ее конце.

Для описания релятивистских частиц вводим четырехмерные импульсы фотона и электронов: $\underline{k} = \{k, \vec{k}\}$, $\vec{k} = k\vec{\omega}$, $|\vec{\omega}| = 1$, $\underline{p} = \{p_0, \vec{p}\}$, $\underline{p}_1 = \{p_{01}, \vec{p}_1\}$. Их компоненты подчиняются соотношениям $\underline{k}^2 = k^2 - \vec{k}^2 = 0$, $\underline{p}^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$, $\underline{p}_1^2 = p_{01}^2 - \vec{p}_1^2 = m^2 c^2$.

Скалярное произведение определяется, как обычно: $\underline{p}\underline{k} = kp_0 - \vec{k}\vec{p} = k(p_0 - \vec{p}\vec{\omega})$. Как уже говорилось, выполняется только один закон сохранения: $p_{01} + k = p_0$. Поэтому из шести неизвестных компонент импульсов электрона и фотона после излучения можно найти только одну. Обычно принимают, что это энергия электрона после излу-

чения: $p_{01} = p_0 - k$. Частоту фотона (или величину импульса k), его направление $\vec{\omega}$, а также направление электрона после излучения $\vec{\Omega}$ необходимо задать.

Введем обозначения для безразмерных импульсов и энергий фотона и электронов:

$$x = \frac{k}{mc}, \quad z = \frac{p}{mc}, \quad z_1 = \frac{p_1}{mc}, \quad \gamma = \sqrt{1 + z^2}, \quad \gamma_1 = \sqrt{1 + z_1^2}. \quad (76)$$

2. *Сечение тормозного излучения.* Оно получается обычной процедурой квантовой электродинамики [5]. Полное сечение, т. е. сечение, проинтегрированное по направлениям вторичного электрона и излученного фотона, когда закреплены лишь энергия исходного электрона и частота излучаемого фотона, можно представить в виде

$$d\sigma(x, z) = 4Z^2 \alpha_{\text{fs}} r_e^2 \frac{z_1}{z} \frac{dx}{x} F, \quad (77)$$

где $F(\gamma, x) = F_1 + F_2$,

$$F_1 = \frac{4}{3} - 2\gamma\gamma_1 \left(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z_1^2} \right) + l \frac{\gamma_1}{z^3} + l_1 \frac{\gamma}{z_1^3} - \frac{ll_1}{zz_1}, \quad F_2 = \quad (78)$$

$$= \mathcal{L} \left[\frac{8}{3} \frac{\gamma\gamma_1}{zz_1} + \frac{x^2}{z^3 z_1^3} (\gamma^2 \gamma_1^2 + z^2 z_1^2 + \gamma\gamma_1) + \frac{x}{2zz_1} \left(l \frac{\gamma\gamma_1 + z^2}{z^3} - l_1 \frac{\gamma\gamma_1 + z_1^2}{z_1^3} \right) \right]. \quad (79)$$

Здесь для краткости введены обозначения для логарифмов комбинаций энергий электрона до и после излучения:

$$l = \ln \frac{\gamma + z}{\gamma - z} = 2 \ln(\gamma + z), \quad l_1 = \ln \frac{\gamma_1 + z_1}{\gamma_1 - z_1} = 2 \ln(\gamma_1 + z_1), \quad (80)$$

$$\mathcal{L} = \ln \frac{\gamma\gamma_1 + zz_1 - 1}{\gamma\gamma_1 - zz_1 - 1} = 2 \ln \frac{\gamma\gamma_1 + zz_1 - 1}{x}. \quad (81)$$

Использованы обозначения: $\alpha_{\text{fs}} = e^2/\hbar c$ — постоянная тонкой структуры, $r_e = e^2/mc^2$ — классический радиус электрона, а безразмерная энергия электрона после рассеяния $\gamma_1 = \gamma - x$. Сечение $F(\gamma, x)$ симметрично по отношению к характеристикам электрона до и после излучения.

Формула для сечения справедлива в борновском приближении, когда отношение $Z\alpha_{\text{fs}}c/v = Z\alpha_{\text{fs}}\gamma/z \ll 1$. При релятивистских скоростях $v \sim c$ и $\gamma \sim z$, так что заряд иона Z не должен быть слишком велик.

При малых z_1 в формулах (78)–(79) происходят сокращения, которые во избежание потерь точности при вычислениях следует произвести аналитически.

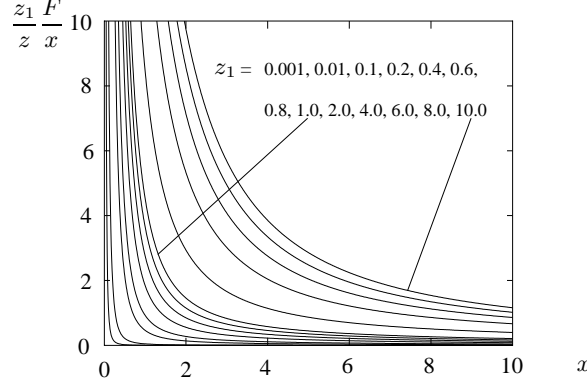


Рис. 5. Спектр тормозного излучения при различных импульсах вторичного электрона.

На рис. 5 представлены графики безразмерного произведения $\frac{z_1 F}{z x}$ в зависимости от частоты испущенного фотона при некоторых значениях импульса вторичного электрона. Соответствующие значения скорости падающего электрона $\frac{z}{\gamma} = \frac{\sqrt{z_1^2 + x^2 + 2x\gamma_1}}{\gamma_1 + x}$. Хотя по требованиям теории эта скорость не может бы малой, рисунок это требование не учитывает. Для получения сечения (77) приведенные величины нужно умножить на $5.795 \cdot 10^{-28} Z^2 dx \text{ см}^2$.

3. *Частные и предельные случаи.* Рассмотрим, какие формы принимает сечение в предельных случаях соотношений между определяющими его величинами.

1) Остановившийся электрон. В пределе $z_1 \rightarrow 0$, когда вся энергия электрона передается фотону, часть сечения F стремится к конечной функции частоты x . Действительно, перейдя к пределу в формулах, получим

$$\mathcal{F}_1 = \lim_{z_1 \rightarrow 0} F_1 = -\frac{4}{3}(\gamma - 1) - 2\frac{l}{z} + \frac{2}{z^2} \left(\frac{l}{2z} - \gamma \right), \quad (82)$$

$$\mathcal{F}_2 = \lim_{z_1 \rightarrow 0} F_2 = \frac{2}{x} \left[\frac{8}{3}\gamma + x^2 + x \left(l \frac{\gamma + z^2}{2z^3} - 1 \right) + \frac{x\gamma}{z^2} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{6} \right) \right]. \quad (83)$$

В приведенных формулах величины представлены как функции аргументов z , γ и частоты фотона x . Однако только одна из них может быть выбрана в качестве независимой, так как они связаны соотношениями $\gamma = 1 + x = \sqrt{1 + z^2}$, $z = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{x(2 + x)}$, $x = \gamma - 1 = \frac{z^2}{\gamma + 1}$. Обозначение l теперь представляет предельную величину: $l = 2 \ln(\gamma + z) = 2 \ln(1 + x + \sqrt{x(2 + x)})$. Если и частоту фотона устремить к нулю, то $z \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$. При этом предел \mathcal{F}_1 при $x \rightarrow 0$ равен конечной величине, величина же \mathcal{F}_2 стремится к бесконечности, так что мы приведем первое слагаемое, характеризующее его поведение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \mathcal{F}_1 = -\frac{4}{3}, \quad \mathcal{F}_2 \sim \frac{16}{3} \frac{1}{x}. \quad (84)$$

2) Нерелятивистский предел. Если импульс начального электрона настолько мал, что можно принять $z \ll 1$ (но по-прежнему $z \gg Z\alpha_{\text{fs}}$, так что зазор возможных значений z невелик), то импульс фотона еще меньше, так как в нерелятивистском пределе закон сохранения энергии $x = \gamma - \gamma_1$ переходит в

$$x = \frac{z^2 - z_1^2}{2} \ll z. \quad (85)$$

Поэтому $F_1 \ll F_2$, в этой, большей величине (79) можно опустить все слагаемые в квадратных скобках кроме первого, в котором γ и γ_1 положить равными 1, а в логарифме (81) заменить их разложениями с удержанием одного слагаемого:

$$\mathcal{L} \sim \ln \frac{1 + (z^2 + z_1^2)/2 + zz_1 - 1}{1 + (z^2 + z_1^2)/2 - zz_1 - 1} = \ln \frac{(z + z_1)^2}{(z - z_1)^2} = 2 \ln \frac{z + z_1}{z - z_1}. \quad (86)$$

В результате в формуле для сечения F_1 окажется равным нулю, так что

$$F = F_2 = \frac{16}{3} \frac{1}{zz_1} \ln \frac{z + z_1}{z - z_1}. \quad (87)$$

3) Ультрарелятивистский предел. Здесь в формулах надо положить $z \sim \gamma$, $z_1 \sim \gamma_1$, $x = \gamma - \gamma_1$ и пренебречь слагаемыми порядка $1/\gamma^2$, $1/\gamma_1^2$ и выше. Тогда

$$\mathcal{L} \sim 2 \ln \frac{2\gamma\gamma_1}{x}, \quad F_1 \sim -2 \left(\frac{\gamma}{\gamma_1} + \frac{\gamma_1}{\gamma} - \frac{2}{3} \right), \quad F_2 \sim -\mathcal{L}F_1, \quad F_1 + F_2 = -F_1(\mathcal{L} - 1). \quad (88)$$

Если энергии электрона до и после излучения велики, то под знаком логарифма стоит большая величина даже при $x \approx \gamma$.

4) Граница спектра. Это случай, когда релятивистский электрон излучает почти всю свою энергию, но все же не останавливается. Тогда $x \approx \gamma \approx z \gg 1$, $z_1 \ll \gamma$ и $\mathcal{L} \sim 2 \ln \frac{\gamma\gamma_1 + \gamma z_1}{\gamma} = l_1$,

$$F_1 \sim 2 \frac{\gamma}{z_1^2} \left(\frac{l_1}{2z_1} - \gamma_1 \right), \quad F_2 \sim l_1 \frac{\gamma}{z_1^3} \left(\gamma_1^2 + z_1^2 - \gamma_1 \frac{l_1}{2z_1} \right), \quad (89)$$

так что

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 &= 2 \frac{\gamma}{z_1^2} \left[2\gamma_1^2 \frac{l_1}{2z_1} - \gamma_1 - \gamma_1 \left(\frac{l_1}{2z_1} \right)^2 \right] = \\ &= 2 \frac{\gamma\gamma_1}{z_1^2} \left(\gamma_1 + z_1 - \frac{l_1}{2z_1} \right) \left(\frac{l_1}{2z_1} - \gamma_1 + z_1 \right). \end{aligned} \quad (90)$$

4. *Связь с нерелятивистскими величинами.* В астрофизической литературе используется сечение тормозного излучения размерности $\text{см}^2 \text{с}$, которое в нерелятивистском приближении дается формулой (65):

$$\beta_{\text{cc}}(v, \nu) = \frac{32 \pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} m^2 c^3} \frac{g_{\text{cc}}(v, \nu)}{v^2 h \nu} = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} Z^2 \alpha_{\text{fs}} r_e^2 \frac{1}{z^2} \frac{1}{\nu} g_{\text{cc}}(v, \nu). \quad (91)$$

Дадим обобщение такого сечения на релятивистский случай, для чего выразим $\beta_{\text{cc}}(z, x)$ через величину F . Заметим, что в нерелятивистском пределе согласно формуле (87)

$$F = \frac{16}{3} \frac{1}{z z_1} \ln \frac{(z + z_1)^2}{2x}. \quad (92)$$

Для обобщения нерелятивистской формулы (91) достаточно положить

$$\beta_{\text{cc}}(z, x) = Z^2 \alpha_{\text{fs}} r_e^2 \frac{z_1}{z} \frac{F}{\nu} = 2\pi z^2 \frac{r_e^3}{c} \frac{z_1}{z} \frac{F}{x}. \quad (93)$$

Тогда формулы (93) в нерелятивистском пределе и (91) совпадут, если принять в качестве множителя Гаунта

$$g_{\text{cc}}(v, \nu) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \ln \frac{(z + z_1)^2}{2x}, \quad (94)$$

что обычно и делается.

5. *Поглощение и излучение.* Теперь выразим через введенные величины коэффициенты поглощения и излучения. Сначала скорость электронов будем считать закрепленной. Составим релятивистские аналоги соотношений детального баланса тормозных процессов при ТДР. Нерелятивистское соотношение для сечений имеет вид (см. формулу (72))

$$n_e n_*^+ f(v) dv v \frac{\beta_{cc}(v, \nu)}{4\pi} d\nu \left[1 + \frac{c^2 B_\nu(T)}{2h\nu^3} \right] = n_e n_*^+ f(v_1) dv_1 k_{cc}(v_1, \nu) \frac{B_\nu(T)}{h\nu} d\nu. \quad (95)$$

Здесь $k_{cc}(v_1, \nu)$ — сечение тормозного поглощения (коэффициент поглощения при фиксированной скорости электрона, принимающего энергию фотона, равен $n_e n_*^+ k_{cc}(v_1, \nu)$). Функция $f(v)$ — нерелятивистское максвелловское распределение (66), нормированное на единичный интеграл по скоростям. При переходе к релятивистским величинам его надо заменить релятивистским распределением Максвелла

$$f_M(\gamma) = \frac{y}{4\pi K_2(y)} e^{-y\gamma}, \quad (96)$$

где $y = mc^2/k_B T$ — безразмерная обратная температура, а $K_2(y)$ — функция Макдональда. Это распределение нормируется условием

$$4\pi \int_0^\infty f_M(\gamma) z^2 dz = 1. \quad (97)$$

Ввиду различной нормировки двух распределений замена должна выглядеть так:

$$f(v) dv \rightarrow 4\pi f_M(\gamma) z^2 dz. \quad (98)$$

Впрочем, численные множители в (95) можно опустить, так как они одинаково появятся как слева, так и справа.

Скорость v в левой части равенства (95) следует заменить на cz/γ . Тогда релятивистское обобщение равенства (95) предстанет в форме

$$\begin{aligned} n_e n_*^+ f_M(\gamma) z^2 dz c \frac{z}{\gamma} \beta_{cc}(z, x) d\nu \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T) \right] = \\ = 4\pi n_e n_*^+ f_M(\gamma_1) z_1^2 dz_1 k_{cc}(z_1, x) \frac{B_\nu(T)}{h\nu} d\nu. \end{aligned} \quad (99)$$

Здесь, как и в (95), написано количество фотонов, слева — излучаемых (включая вынужденное излучение), а справа — поглощаемых

единицей объема в единицу времени электронами с определенной скоростью в определенном интервале частот.

Для упрощения соотношения (99) примем во внимание равенства

$$\gamma = \gamma_1 + x, \quad f_M(\gamma) = e^{-xy} f_M(\gamma_1), \quad \frac{z dz}{\gamma} = \frac{z_1 dz_1}{\gamma_1}, \quad (100)$$

а также подставим функцию Планка. Тогда получится связь сечения поглощения с сечением излучения и величиной F :

$$k_{cc}(z_1, x) = \frac{\beta_{cc}(z, x) c^3}{8\pi} \frac{z^2}{\nu^2 z_1 \gamma_1} = \frac{Z^2}{8\pi} \alpha_{fs} r_e^2 \frac{z}{\gamma_1} F \frac{c^3}{\nu^3}. \quad (101)$$

Нерелятивистский предел этого коэффициента, вытекающий из равенств (95) и (91), имеет вид

$$k_{cc}(v_1, \nu) = \frac{\beta_{cc}(v, \nu) c^2 v^2}{8\pi} \frac{1}{\nu^2 v_1} = \frac{2}{3\sqrt{3}} Z^2 \alpha_{fs} r_e^2 \frac{c^2}{\nu^3} \frac{g_{cc}(v, \nu)}{v_1}. \quad (102)$$

Это выражение полностью соответствует формуле (101), так как в нерелятивистском случае $v = cz$, $v_1 = cz_1$, $\gamma_1 = 1$ и выполняются формулы (92) и (94).

6. *Усреднение по энергиям электронов.* Из соотношения (99), проинтегрированного по импульсам электронов, находим связь между усредненными коэффициентами теплового тормозного излучения $\epsilon_{cc}(x, y)$ и поглощения $\alpha_{cc}(x, y) = n_e n_*^+ k_{cc}(x, y)$, которое запишем в виде

$$\epsilon_{cc}(x, y) \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T) \right] = \alpha_{cc}(x, y) B_\nu(T). \quad (103)$$

Эта связь совпадает с соотношением Кирхгофа—Планка.

Коэффициент излучения в расчете на один электрон и один ион дается формулами

$$\frac{\epsilon_{cc}(x, y)}{n_e n^+} = h\nu c \int_{z_{\min}}^{\infty} \beta_{cc}(z, x) \frac{z^3}{\gamma} f_M(\gamma) dz = Z^2 \alpha_{fs} r_e^2 h c e^{-xy} \int_0^{\infty} F f_M(\gamma_1) \frac{z}{\gamma_1} z_1^2 dz_1. \quad (104)$$

Здесь z_{\min} — наименьший импульс электрона, способного излучить фотон частоты x . Ясно, что $\gamma_{\min} = 1 + x$, так что $z_{\min} = \sqrt{x(2+x)}$. Звездочку у концентрации ионов в общем случае ставить не надо.

Полное сечение поглощения (т.е. усредненное по скоростям электронов) выражается через тот же интеграл:

$$k_{cc}(x, y) = \int_0^{\infty} k_{cc}(z_1, x) 4\pi z_1^2 f_M(\gamma_1) dz_1 = \frac{Z^2}{2} \alpha_{fs} r_e^2 \frac{c^3}{\nu^3} \int_0^{\infty} F f_M(\gamma_1) \frac{z}{\gamma_1} z_1^2 dz_1. \quad (105)$$

Из формул (101) и (105) с очевидностью следует, что размерность сечений поглощения $см^5$.

Таким образом, для получения коэффициентов релятивистского тормозного поглощения и излучения надо вычислить интеграл

$$\tilde{F}(x, y) = \int_0^{\infty} F(\gamma, x) f_M(\gamma_1) \frac{z}{\gamma_1} z_1^2 dz_1 = \frac{y}{4\pi K_2(y)} \int_1^{\infty} F(\gamma, x) e^{-y\gamma_1} z z_1 d\gamma_1. \quad (106)$$

Интеграл (106) вычисляется численно. На рис. 6 приведены графики, отражающие зависимость произведения $4\pi\tilde{F}(x, y)$ от частоты x , для некоторых температур, характеризуемых параметром y .

Заметим, что если энергия электрона сравнима с энергией покоя протона, то ион нельзя считать бесконечно тяжелым. Расчет тормозного излучения ультрарелятивистских частиц более сложен (см. [5]). Тормозное излучение возможно также при взаимодействии электрона с электроном и электрона с позитроном, но это процессы третьего порядка по взаимодействию и их описание более громоздко [5].

§ 4. Рекомбинационный механизм

1. *Сечение рекомбинации.* Рекомбинация, точнее фоторекомбинация, — это присоединение ионом электрона с излучением фотона и превращение иона в атом (или ион меньшей стадии ионизации). Рекомбинация может произойти как на основной уровень атома, так и на возбужденные уровни. В последнем случае вслед за рекомбинацией происходят каскадные переходы на уровни, расположенные ниже, в результате чего излучаются фотоны в спектральных линиях.

В этом параграфе тем же способом, что и в § 2, выведем выражения для сечения рекомбинации с образованием водородоподобного иона. Снова следуем изложению книги [17].

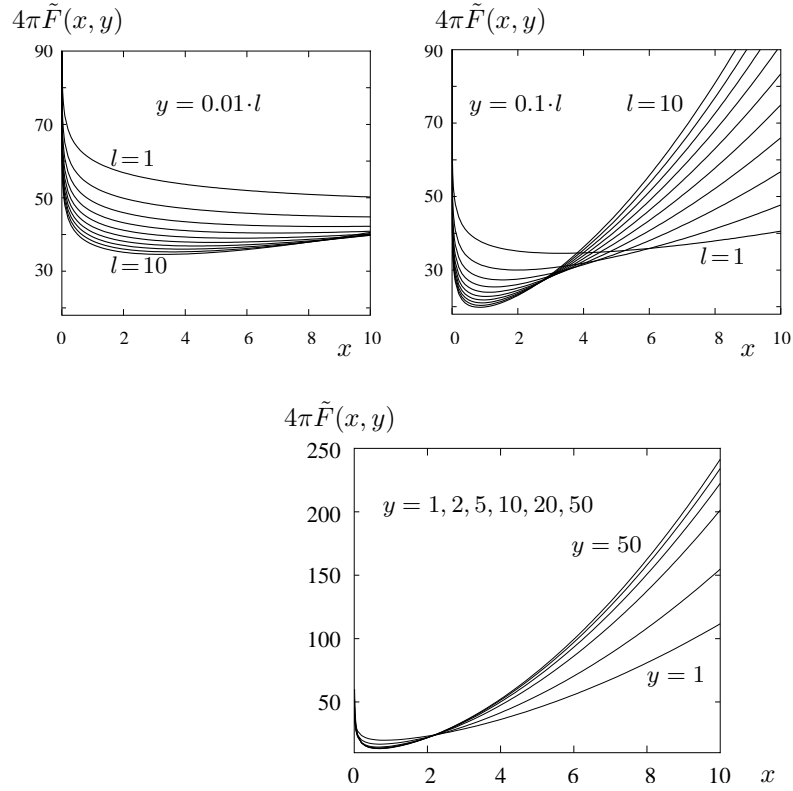


Рис. 6. Спектральная зависимость интеграла $\tilde{F}(x, y)$ при различных температурах

Энергии дискретных состояний водородоподобного иона $E_i = -Z^2\chi_{\text{H}}/i^2$, где χ_{H} — энергия ионизации водорода, а i — главное квантовое число. Пусть электрон с положительной энергией $mv^2/2$ переходит в одно из связанных состояний i . При этом излучается фотон, частота которого определяется законом сохранения энергии:

$$h\nu = \frac{mv^2}{2} - E_i. \quad (107)$$

Закрепим скорость электрона v и будем считать, что дискретные уровни расположены близко друг к другу, так что их номер можно рассматривать как непрерывно изменяющуюся переменную.

Тогда можно написать (приближенное) дифференциальное соотношение

$$\frac{d\nu}{di} = -\frac{1}{h} \frac{dE_i}{di} = Z^2 \frac{2}{h} \frac{\chi_H}{i^3}. \quad (108)$$

Сечение рекомбинации получим, рассматривая этот процесс как продолжение тормозного излучения на дискретные конечные состояния. При действии обоих механизмов излучаются фотоны с частотами от ν до $\nu + d\nu$, количество которых $\frac{1}{h\nu} \frac{dq_\nu}{d\nu} d\nu$. Но при рекомбинации ион переходит в состояние атома с интервалом дискретных уровней энергии с номерами от i до $i + di$. Поэтому по аналогии с (64) можно написать следующее соотношение:

$$\beta_{ci}(v, \nu) = \frac{1}{h\nu} \frac{dq_\nu}{d\nu} \frac{d\nu}{di} = \frac{2^7 \pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{Z^4 e^{10}}{mc^3 h^4} \frac{1}{i^3} \frac{1}{v^2 \nu} g_{ci}(\nu), \quad (109)$$

где $g_{ci}(\nu)$ — соответствующий гаунтовский множитель.

2. *Излучательная способность.* Теперь найдем, сколько энергии излучается при рекомбинациях в единице объема за единицу времени в расчете на единичный интервал частот и в единицу телесного угла. Для этого закрепим не скорость электрона, а номер уровня, на который происходит рекомбинация. Тогда соотношение (107) устанавливает связь между скоростью электрона и частотой излучаемого фотона, причем $mv dv = h d\nu$. Частота излучаемого фотона может быть любой, но не меньшей частоты предела i -той серии $\nu_i = -E_i/h$, так что при рекомбинации излучается непрерывный спектр за пределом i -той серии. Из сказанного следует, что

$$\epsilon_{ci}(\nu) d\nu = n_e n^+ h\nu \frac{1}{4\pi} \beta_{ci}(\nu) v dv f(v). \quad (110)$$

Подставив выражение для сечения (109) и для функции Максвелла (66), а также учтя связь скорости электрона и частоты (107), найдем

$$\epsilon_{ci}(\nu) = n_e n^+ \frac{2^7 \pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{Z^4 e^{10} m}{c^3 h^2} \frac{g_{ci}(\nu)}{i^3} \frac{\exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T} + Z^2 \frac{\chi_H}{2i^2 k_B T}\right)}{(2\pi m k_B T)^{3/2}}. \quad (111)$$

Формулы (109) и (111) (без множителей Гаунта) также были получены Х. А. Крамерсом. Множитель Гаунта задается приближенной формулой [23]

$$g_{ci}(\nu) \approx 1 - 0.1728 \left(\frac{h\nu}{Z^2 \chi_H} \right)^{1/3} \left(\frac{2}{i^2} \frac{Z^2 \chi_H}{h\nu} - 1 \right). \quad (112)$$

Наряду с излучательной способностью часто используется интегральная величина, а именно, коэффициент спонтанной рекомбинации. Это число рекомбинаций в единице объема в единицу времени

$$A_{ci}(T) = \frac{4\pi}{n_e n^+} \int_{\nu_i}^{\infty} \epsilon_{ci}(\nu) \frac{d\nu}{h\nu} = \int_0^{\infty} \beta_{ci}(\nu) f(\nu) \nu d\nu. \quad (113)$$

Если вынести среднее значение гаунтовского множителя из-под интеграла, то для коэффициента рекомбинации получится приближенная формула

$$A_{ci}(T) = \frac{2^9 \pi^5 Z^4 e^{10} m}{3\sqrt{3} c^3 h^3} \frac{1}{i^3} \frac{\bar{g}_{ci}}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} E_1 \left(\frac{h\nu_i}{k_B T} \right) \exp \left(\frac{h\nu_i}{k_B T} \right). \quad (114)$$

Здесь $E_1(x)$ — интегральная показательная функция. На рис. 7 представлены кривые зависимости $A_{ci}(T)$ от температуры.

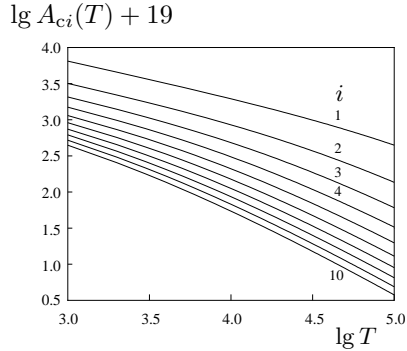


Рис. 7. Коэффициенты $A_{ci}(T)$ при $i = 1(1)10$.

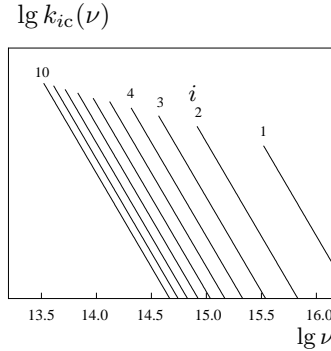


Рис. 8. Коэффициенты $k_{ic}(\nu)$ при $i = 1(1)10$.

3. Коэффициент ионизации. Сечение ионизации находится точно так же, как и сечение тормозного поглощения — из условия детального баланса при ТДР:

$$4\pi n_i^* k_{ic}(\nu) B_\nu(T) \frac{d\nu}{h\nu} = n_e n_*^+ f(\nu) \nu d\nu \beta_{ci}(\nu) \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T) \right]. \quad (115)$$

Приняв во внимание формулы Больцмана (I.201), Саха (I.202) (для водородоподобного иона $g^+ = 1$) и Планка (I.203), получим

$$k_{ic}(\nu) = \frac{1}{g_i} \frac{c^2 m^2 \nu^2}{h^2 \nu^2} \beta_{ci}(\nu) = \frac{2^6 \pi^4}{3\sqrt{3}} Z^4 \frac{e^{10} m}{ch^6} \frac{1}{i^5} \frac{1}{\nu^3} g_{ci}(\nu). \quad (116)$$

Эта окончательная формула справедлива для водородоподобных ионов при произвольных условиях. Напомним, что входящая в ряд величин скорость электрона должна находиться из соотношения (107), причем, как и выше, формула для $k_{ic}(\nu)$ справедлива при $\nu \geq \nu_i$. На рис. 8 даны графики сечения поглощения $k_{ic}(\nu)$ для $i = 1(1)10$ в зависимости от частоты в некоторых относительных единицах.

Согласно формуле (116) наибольшие значения сечения поглощения за счет ионизации наблюдается у пределов серий, т. е. при $\nu = \nu_i$, причем при ионизации из i -го состояния оно пропорционально i .

Для получения коэффициента поглощения надо найти сумму $\alpha_{\text{bf}}(\nu) = \sum_{i=i_0(\nu)}^{\infty} n_i k_{ic}(\nu)$, где нижний предел в сумме определяется из условия $\nu \geq \nu_{i_0}(\nu)$. Напомним, что высокие состояния не осуществляются, хотя здесь это обстоятельство не столь существенно, как при вычислении суммы по состояниям, так как ряд сходится.

При выполнении условия локального термодинамического равновесия, когда справедливы формулы Максвелла, Больцмана и Саха (но не Планка), коэффициент поглощения за счет ионизации представляют в таком же виде, что и α_{cc} : $\alpha_{ic} = n_e n^+ \tilde{k}_{ic}$, где

$$\tilde{k}_{ic}(\nu) = \frac{2^6 \pi^4}{3\sqrt{3}} \frac{Z^4 m e^{10}}{ch^3} \frac{g_{ci}(\nu)}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \frac{1}{i^3} \frac{1}{\nu^3} e^{-E_i/k_B T}. \quad (117)$$

Размерность $k_{ic} - \text{см}^2$, а $\tilde{k}_{ic} - \text{см}^5$.

Для примера приведены графики спектральной зависимости коэффициентов поглощения за счет связанно-свободных переходов (bound-free) $\alpha_{\text{bf}}(\nu)$ и полных коэффициентов поглощения $\alpha(\nu) = \alpha_{\text{cc}}(\nu) + \alpha_{\text{bf}}(\nu)$ за счет тормозного и рекомбинационного механизмов, вычисленные без учета множителей Гаунта для больцмановского распределения по состояниям атома водорода и при выполнении формулы Саха. Даны значения $\lg[\alpha_{\text{bf}}(\nu)/n_1] + 19$ (рис. 9) и $\lg[\alpha(\nu)/(n_e n^+)] + 41$ (рис. 10) для температур $T = T_5 \cdot 10^5$ K. Величины T_5 указаны около кривых. Ясно виден пилообразный характер

зависимости от частоты. Заметим также, что при частотах, больших частоты ионизации с первого уровня, определяющий вклад в коэффициент вносит первое слагаемое ($i = 1$). Действительно, в долях этого первого слагаемого сумма, представляющая α_{bf} , выглядит так:

$$1 + \frac{1}{8}e^{-3\chi_{\text{H}}/4k_{\text{B}}T} + \frac{1}{27}e^{-8\chi_{\text{H}}/9k_{\text{B}}T} + \frac{1}{64}e^{-15\chi_{\text{H}}/16k_{\text{B}}T} + \dots = \\ = 1 + \frac{1}{8}e^{-3\chi_{\text{H}}/4k_{\text{B}}T} + \left(1 + \frac{8}{27}e^{-5\chi_{\text{H}}/36k_{\text{B}}T} \left(1 + \frac{27}{64}e^{-7\chi_{\text{H}}/144k_{\text{B}}T} + \dots\right)\right). \quad (118)$$

Отношение $\chi_{\text{H}}/k_{\text{B}} \approx 157000 \text{ K}$ настолько велико, что при выбранных температурах вклады остальных слагаемых при высоких частотах незаметны. При меньших частотах относительные вклады разных слагаемых различаются с увеличением $i_0(\nu)$ все меньше. Различие уменьшается также с ростом температуры. Этим объясняется то обстоятельство, что коэффициент при больших температурах на отдельных участках растет с уменьшением частоты не только за счет множителя $1/\nu^3$.

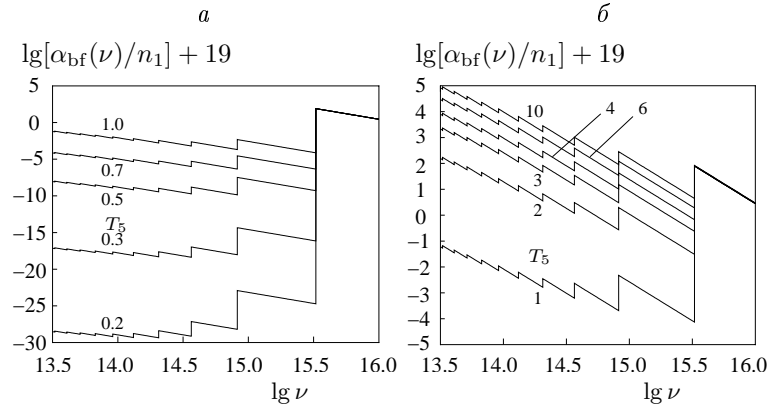


Рис. 9. Значения $\lg[\alpha_{\text{bf}}(\nu)/n_1] + 19$ для $T = T_5 \cdot 10^5$, $T_5 = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ (а) и $T_5 = 1, 2, 3, 4, 6, 10$ (б).

Пропорциональность коэффициента поглощения при свободно-свободных и связанно-свободных переходах обратной третьей степени частоты имеет важные следствия. Например, нейтральный водород непрозрачен для излучения с длиной волны, меньшей 912 \AA , и становится прозрачным только в рентгеновском диапазоне. В

этом диапазоне существенную роль играет поглощение тяжелыми элементами, в первую очередь ионами железа, несмотря на значительно меньшее содержание тяжелых элементов по сравнению с водородом. Это объясняется сильной зависимостью коэффициента поглощения α_{bf} от заряда ядра ($\propto Z^4$). Свободно-свободные переходы ($\propto Z^2$) здесь роли не играют.

Формулы для коэффициентов поглощения и излучения, приведенные в двух первых параграфах, широко используются в теории звездных атмосфер, газовых туманностей и других объектов (см. [49]). Сведения о сечениях тормозного излучения при взаимодействии электронов с атомами приводятся, например, в книге [4].

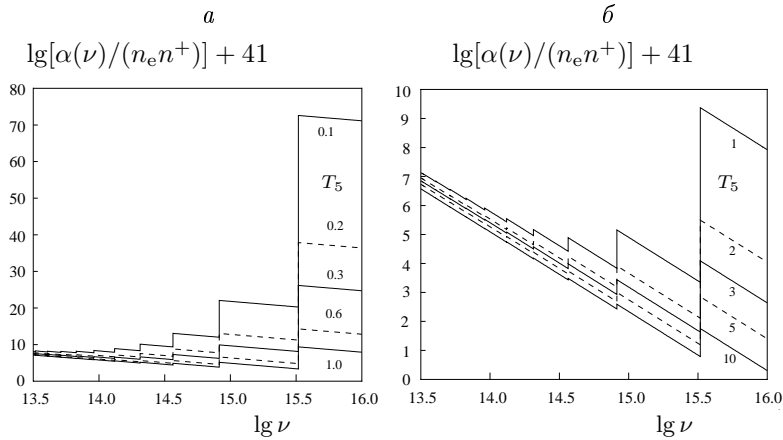


Рис. 10. Значения $\lg[\alpha(\nu)/(n_e n^+)] + 41$ для $T = T_5 \cdot 10^5$, $T_5 = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1$ (а) и $T_5 = 1, 2, 3, 4, 6, 10$ (б).

4. *Рекомбинационные радиолнии (РРЛ)*. Это линии, возникающие при переходах между высокими уровнями атомов. Для находящихся на таких уровнях внешних электронов почти несущественно внутреннее строение атомного остатка, имеет значение только масса и заряд. Заряд ядра экранируется близкими к нему электронами, так что результирующий заряд совпадает с зарядом остатка. Поле остатка в высокой степени можно считать кулоновским. Поэтому положения линий разных элементов с одинаковыми главными квантовыми числами состояний внешнего электрона близки: различия определяются только различием масс ядер и вследствие этого — приведенных масс. Для определенности рассмотрим здесь линии атома наиболее распространенного элемента — водорода.

В высоко возбужденных состояниях электрон в среднем находится на довольно большом расстоянии от ядра. Среднее расстояние электрона в состоянии с главным квантовым числом i и азимутальным l составляет $\bar{r}_i = 0.269[3i^2 - l(l+1)] \text{ \AA}$ [6], так что при $i = 1000$ размер атома водорода достигает $\approx 10^{-8} \cdot 10^6 = 10^{-2} \text{ см}$, т. е. такой атом можно было бы увидеть невооруженным глазом. Однако, осуществлению состояний с высокими уровнями энергии мешают соседние частицы, причем чем больше их концентрация N , тем меньше номер i_* последнего уровня, который еще может создаваться. Этот номер определяется из условия разрушения высоких уровней атомов соседними частицами.

Номер i_0 для атома водорода можно определить, например, отождествив с ним номер последней бальмеровской линии, которая наблюдается в спектре рассматриваемого объекта.

В связи с этим возникает следующий способ определения концентрации частиц N в астрофизических объектах. Ясно, что радиус, который еще может иметь атом, не подвергаясь разрушению окрестными частицами, приблизительно определяется условием $Nr_{i_*}^3 \sim 1$. Так как это i_* , как правило, достаточно большое, то $r_{i_*} \approx 10^{-8}i_*^2 \text{ см}$, так что $N \propto i_*^{-6}$. Номер i_* можно определить из наблюдений, хотя это сделать не очень просто из-за конечной ширины линий и слияния их у предела бальмеровской серии. Влияние эффекта Штарка, дополнительно расширяющего линии и приводящего к их более раннему слиянию, еще увеличивает степень номера до 7.5. Эта трудность усугубляется, если недостаточно разрешение спектрографа. В то же время ошибка в номере на несколько единиц приведет к большой ошибке в концентрации, так как зависимость N от i_* очень сильная. Тем не менее, когда лучшего способа нет, приходится прибегать к этому. Еще в 30-е годы была выведена формула Инглиса—Теллера, связывающая N и i_* :

$$\lg N = 23.26 - 7.5 \lg i_*. \quad (119)$$

Эта формула затем многократно уточнялась.

В спектрах звезд i_* порядка десятка (например, в атмосфере Солнца $N = n_e = 10^{12}$, так что $i_* = 32$), в газовых туманностях $n_e = 10^3 \div 10^4$ и $i_* = 500 \div 370$, а в межзвездной среде число бальмеровских линий доходит до тысячи (там возможно $n_e = 1$, тогда по формуле (119) $i_* = 1260$). Столь высокие уровни проявляются не в бальмеровской серии, а при переходах между высокими уровнями, когда и образуются рекомбинационные радиолнии.

Как известно, линии водорода, объединенные тем, что у них общий нижний уровень, образуют серии. Если переход происходит на первый уровень, линии попадают в УФ область, называются лаймановскими и обозначаются $L_\alpha, L_\beta, L_\gamma, \dots$. Вторая серия — бальмеровская — располагается в видимой области, ее линии $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \dots$. Первые две серии выделены тем, что они отделены друг от друга и от других серий. Все остальные серии в той или иной степени перекрываются, а линии высоких серий сильно перепутаны, так что для их отождествления необходимо точное измерение частоты или длины волны. В отличие от линий первых серий символами $H_{i+1\alpha}, H_{i+2\beta}, H_{i+3\gamma}, \dots$ обозначаются линии, у которых общий нижний уровень с главным квантовым числом i . Для примера укажем, что линия $H_{103\gamma}$ образуется при переходе $103 \rightarrow 100$.

Наибольшую вероятность перехода и, следовательно, интенсивность имеют первые линии серий. У серий с высокими общими уровнями i интенсивность линии $H_{i\alpha}$ в пять раз больше, чем у $H_{i+1\beta}$, и в 100 раз больше, чем у $H_{i+5\epsilon}$. Частоты первых линий серий можно вычислить по формуле

$$\nu_{H_{i\alpha}} = 3288052 \frac{2i+1}{i^2(i+1)^2} \text{ ГГц}. \quad (120)$$

При i порядка нескольких сотен линии попадают в радиодиапазон.

Эйнштейновские коэффициенты спонтанного перехода $A_{i+1,i}$ при больших i пропорциональны i^{-5} , так что для накопления вдоль луча заметного излучения необходимо много атомов, что осуществляется только в космическом пространстве. Однако оптические толщины в этих линиях все равно очень малы и рассеяния в них не происходит.

На возможность и важность наблюдений РРЛ указал Н. С. Кардашев [26] в 1959 году. Он рассчитал вероятности переходов для этих линий. Первые наблюдения РРЛ были получены в ФИАН (переход $91 \rightarrow 90$) и на Большом Пулковском телескопе (БПР, переход $105 \rightarrow 104$) в 1964 году. В 1966 году были обнаружены РРЛ гелия и углерода.

Часто оказывается, что РРЛ подвержены мазерному усилению. Это объясняется следующим образом. В межзвездной среде (МЗС) в зонах II водород сильно ионизован. Почти все нейтральные атомы находятся на основном уровне, населенность второго на много порядков меньше, чем основного. Однако, вследствие того, что сво-

бодные электроны эффективно взаимодействуют с высокими уровнями атомов, относительные населенности высоких уровней оказываются близки к равновесным, то есть к определяемым по формуле Больцмана. Более того, чем выше уровень, тем эта близость сильнее. Причиной этого является равновесное (максвелловское) распределение электронов по скоростям, которое достаточно быстро устанавливается за счет кулоновских столкновений.

Обозначим отношение реальной концентрации атома водорода в состоянии с главным квантовым числом i к равновесной через b_i , так что $n_i = b_i n_i^*$. Величины b_i называются мензеловскими множителями. Они были введены Д. Мензелом [74] в связи с расчетами бальмеровского декремента, т. е. отношений интенсивностей бальмеровских линий.

Запишем уравнение переноса излучения в линии $H_{i+1\alpha}$:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -n_i k_i(\nu) I_\nu + C_i(\nu) n_{i+1} \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} I_\nu \right]. \quad (121)$$

Коэффициент $C_i(\nu)$ определяем, как всегда, приравняв правую часть уравнения при ТДР к нулю:

$$n_i^* k_i(\nu) B_\nu(T) = C_i(\nu) n_{i+1}^* \left[1 + \frac{c^2}{2h\nu^3} B_\nu(T) \right], \quad C_i(\nu) = \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{2h\nu^3}{c^2} k_i(\nu). \quad (122)$$

Уравнение переноса переписывается в виде

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -n_i k_i(\nu) \left(1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}}{n_i} \right) I_\nu + \frac{2h\nu^3}{c^2} k_i(\nu) \frac{g_i}{g_{i+1}} n_{i+1}. \quad (123)$$

Выражение, стоящее в круглых скобках, может быть преобразовано так:

$$1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}}{n_i} = 1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}^*}{n_i^*} \frac{b_{i+1}}{b_i} = 1 - \frac{b_{i+1}}{b_i} e^{-h\nu/k_B T}. \quad (124)$$

Оба множителя в последнем выражении близки к 1. Разложим их по формуле Тейлора:

$$\frac{b_{i+1}}{b_i} \approx \frac{b_i + \Delta b_i}{b_i} = 1 + \Delta(\ln b_i), \quad e^{-h\nu/k_B T} \approx 1 - \frac{h\nu}{k_B T}. \quad (125)$$

Тогда

$$1 - \frac{g_i}{g_{i+1}} \frac{n_{i+1}}{n_i} \approx \frac{h\nu}{k_B T} - \Delta(\ln b_i). \quad (126)$$

Расчеты населенностей высоких уровней, произведенные путем решения уравнений стационарности, показали, что второе слагаемое в (126) $\Delta(\ln b_i) > 0$ (так как чем выше уровень, тем он ближе к равновесию, т. е. b_{i+1} ближе к единице, чем b_i) и может быть больше первого. Таким образом коэффициент поглощения может быть отрицательным, что и приводит к мазерному эффекту. Хотя оптические толщины в РРЛ невелики, эти линии оказываются более интенсивными и более узкими, чем получается по теории, не учитывающей мазерного эффекта.

В настоящее время наблюдение РРЛ является мощным средством исследования физических условий в разреженных астрофизических объектах, таких как туманности и межзвездная среда. Более подробно о РРЛ можно прочитать в книгах [24],[52] и в энциклопедии [54].

Рекомбинационный механизм излучения имеет значение и в других случаях. Он лежит в основе интерпретации линейчатых спектров туманностей и атмосфер звезд (см. [49]). Им же в значительной степени определяется формирование непрерывного спектра звезд типа Солнца, где роль “иона” играет нейтральный атом водорода, а роль “атома” — отрицательный ион водорода H^- . Об этом подробно говорится в книгах [49] и [32].

При рекомбинации электрона и позитрона образуется легкий атом, называемый позитронием. О нем будет сказано в главе VI.

Глава III. Магнито-тормозной механизм

§ 1. Геометрия и терминология

1. *Движение и излучение заряда.* Пусть заряд e массой m равномерно движется по окружности в некоторой системе отсчета. Центр окружности находится в начале координат этой системы и считается неподвижным, т. е. система отсчета жестко связана с ним.

По окружности движется заряд во внешнем однородном магнитном поле, если не учитывать излучение заряда и если его скорость перпендикулярна магнитному полю. Если имеется составляющая скорости вдоль поля, то траектория заряда — спираль, точнее — винтовая линия (см., например, [28]). Этот более сложный случай будем рассматривать во вторую очередь.

Влиянием потерь энергии заряда на излучение мы пренебрегаем, т. е. считаем, что траектория заряда в результате излучения не изменяется. Так можно поступать ввиду того, что энергия излучения заряда составляет малую долю его энергии.

Излучение рассматриваемого заряда или совокупности таких зарядов называется магнито-тормозным (именно потому, что заряды тормозятся вследствие излучения, и по аналогии с тормозным излучением заряженных частиц в электрическом поле других зарядов). Если заряды нерелятивистские или ультрарелятивистские, то их излучение называют соответственно циклотронным или синхротронным, в диапазоне промежуточных энергий говорят о гироциклотронном излучении.

Поскольку главное излучение дают заряды с наименьшей массой, в дальнейшем под словом заряд подразумеваем электрон.

2. *Системы отсчета.* При изучении магнито-тормозного излучения приходится рассматривать следующие системы отсчета.

I. Собственная система отсчета заряда. Эта система движется вместе с зарядом по окружности. Ее оси не меняют своих направлений. В собственной системе отсчета определено собственное время t_* .

II. Система отсчета, в которой электрон равномерно вращается (обращается) по окружности. Начало координат этой системы совмещено с центром указанной окружности. Такую систему можно

назвать лабораторной или естественной. Все величины, относящиеся к этой системе, отмечаем индексом e . Внешнее электрическое поле в ней отсутствует, $\vec{\mathcal{E}}_e = 0$, а напряженность магнитного поля направлена по вектору \vec{e}_3 , перпендикулярному плоскости вращения заряда: $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_* \vec{e}_3$ (см. рис. 1).

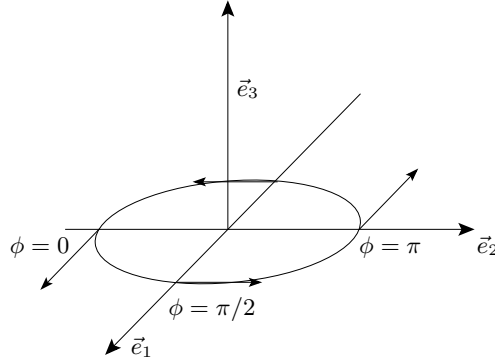


Рис. 1. Вращающийся по окружности заряд.

III. Система отсчета, в которой заряд имеет безразмерную (в единицах скорости света) составляющую скорости по полю

$$\vec{\beta}_{\parallel} = \beta_{\parallel} \vec{e}_3. \quad (1)$$

Величина β_{\parallel} , которая может быть положительной и отрицательной в зависимости от направления скорости заряда по отношению к направлению поля, является параметром, определяющим скорость заряда и тем самым соответствующую систему отсчета, так что можно рассматривать семейство таких систем. Будем считать, что при любых β_{\parallel} начала координат у них всех расположены на прямой, проходящей через центр окружности вращения электрона и перпендикулярной ей. Эти системы движутся относительно друг друга вдоль магнитного поля и координаты их связаны преобразованиями Лоренца, которые естественно назвать продольными.

Из формул преобразования напряженностей поля (см. [28]) непосредственно следует, что во всех таких системах, координаты и время в которых связаны продольным преобразованием Лоренца, напряженность внешнего магнитного поля одна и та же, а внешнего электрического поля нет $\vec{\mathcal{E}}_f = 0$. Для возможности краткого

упоминания таких систем назовем их системами поля. Все величины, относящиеся к этим системам, отмечаем индексом f .

IV. Система отсчета источника. Источник магнито-тормозного излучения — это объект, в котором в магнитном поле движутся заряды, образующие какие-то потоки или облака. В источнике выбирается система отсчета. Она тоже связана с магнитным полем, т. е. это одна из систем поля, и внешнего электрического поля в ней нет. В этой системе должно быть произведено усреднение по импульсам электронов. Система источника отличается от других систем поля тем, что в ней средний продольный импульс электронов равен нулю. Такую систему отсчета называют также сопутствующей газу электронов.

V. Система отсчета наблюдателя. Система источника движется относительно системы наблюдателя с некоторой (произвольной) скоростью.

Можно считать, что во второй и третьей системах излучает один заряд, в двух последних излучают их ансамбли. Рассмотрим каждую из систем по очереди, но сначала перечислим некоторые постоянные и скалярные величины задачи.

3. *Постоянные.* В задаче о заряде в магнитном поле имеется несколько величин, которые закрепляются. Это прежде всего величина напряженности магнитного поля во всех системах поля $\mathcal{H}_* > 0$. Ей соответствует циклотронная частота $\omega_* = \frac{e\mathcal{H}_*}{mc}$, где $e > 0$ — заряд электрона, а m — его масса, и период $T_* = 2\pi/\omega_*$.

Далее, радиус окружности R_* , по которой обращается заряд, также одинаков во всех системах поля. Из указанных величин можно образовать произведение размерности скорости $R_*\omega_* > 0$, а также безразмерную величину $R_*\omega_*/c > 0$. Так как напряженность поля и радиус окружности могут быть произвольными, то введенные величины также могут быть сколь угодно большими.

4. *Лабораторная система.* Введем в этой системе ортонормальный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Пусть окружность, по которой движется электрон, лежит в плоскости векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , а магнитное поле $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_* \vec{e}_3$.

Зададим радиус-вектор заряда относительно центра окружности в виде

$$\vec{r}_e = \vec{r}_e(\phi) = R_* (\vec{e}_1 \sin \phi - \vec{e}_2 \cos \phi), \quad (2)$$

где $\phi = \omega_e t_e$, ω_e — угловая скорость движения заряда по окружности, t_e — время в лабораторной системе отсчета. Четырехмерный вектор положения заряда в этой системе

$$\underline{r}_e = \{ct_e, \vec{r}_e\}. \quad (3)$$

Безразмерный четырехмерный импульс заряда (или, что то же самое, четырехмерная безразмерная скорость) в той же системе отсчета

$$\underline{z}_e = \frac{1}{c} \frac{dr_e}{dt_*} = \frac{\gamma_e}{c} \frac{dr_e}{dt_e} = \{\gamma_e, \vec{z}_e\}, \quad \vec{z}_e = \gamma_e \vec{\beta}_e, \quad (4)$$

где безразмерная скорость вращения заряда по окружности

$$\vec{\beta}_e = \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}_e}{dt_e} = \beta_e (\vec{e}_1 \cos \phi + \vec{e}_2 \sin \phi), \quad \beta_e = \frac{R_*}{c} \frac{d\phi}{dt_e} = \frac{R_*}{c} \omega_e. \quad (5)$$

Безразмерная энергия электрона γ_e выражается через его безразмерные скорость β_e и импульс z_e в этой системе отсчета обычным образом:

$$\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} = \sqrt{1 + z_e^2}. \quad (6)$$

Этот множитель связывает собственное время заряда t_* со временем в лабораторной системе отсчета и, соответственно, угловую частоту обращения заряда с циклотронной частотой:

$$t_* = \frac{t_e}{\gamma_e}, \quad \omega_e = \frac{\omega_*}{\gamma_e}, \quad (7)$$

так что $\phi = \omega_e t_e = \omega_* t_*$. Периоды обращения связаны точно так же: $T_e = T_* \gamma_e$. Отметим, что так как длина вектора скорости заряда постоянна, то хотя время t_* относится к неинерциальной системе отсчета, оно течет равномерно, т. е. отличается от времени t_e на постоянную величину. Собственное время t_* — самое медленное для заряда. Радиус $R_* = \beta_e c \gamma_e / \omega_e$ называется радиусом Лармора.

Из (4) и (5) следует, что характеристики вращательного движения: модули импульса и скорости, лоренцевский множитель и частота вращения при закреплении величин, указанных в п. 3, также постоянны. Действительно,

$$z_e = \gamma_e \beta_e = \frac{R_* \omega_*}{c}, \quad \gamma_e = \sqrt{1 + z_e^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{R_* \omega_*}{c}\right)^2}, \quad (8)$$

$$\beta_e = \frac{z_e}{\gamma_e} = \frac{R_* \omega_*}{\sqrt{c^2 + R_*^2 \omega_*^2}}, \quad \omega_e = \frac{\omega_*}{\sqrt{1 + (R_* \omega_* / c)^2}}. \quad (9)$$

Четырехмерный вектор ускорения и трехмерное ускорение задаются простыми формулами:

$$\underline{w}_e = c \frac{dz_e}{dt_*} = \{0, \gamma_e^2 \vec{w}_e\}, \quad \vec{w}_e = w_e (-\vec{e}_1 \sin \phi + \vec{e}_2 \cos \phi), \quad (10)$$

$$w_e = R_* \omega_e^2 = c \beta_e \omega_e = c \omega_* \frac{\beta_e}{\gamma_e} = \frac{R_* \omega_*^2}{\gamma_e^2}, \quad (11)$$

из которых видно, что величина ускорения w_e является постоянной в указанном выше смысле, как и релятивистский скаляр $-\underline{w}^2 = \gamma_e^4 w_e^2 = R_*^2 \omega_*^4$.

Рассмотрим описание движения заряда в системах поля.

5. *Системы отсчета поля.* Можно считать, что векторы \vec{e}_1 и \vec{e}_2 у всех таких систем отсчета общие, ибо они, как и другие величины, относящиеся к плоскости этих векторов, например, угол ϕ , не изменяются при продольных преобразованиях Лоренца. Вектор \vec{e}_3 , рассматриваемый как часть четырехмерного, изменяет свою длину, но мы будем временную часть этого вектора во всех системах поля игнорировать, а пространственную нормировать на 1, так что этот вектор тоже можно считать неизменным.

В каждой такой системе электрон равномерно движется по винтовой линии. Составляющую безразмерной скорости электрона вдоль поля, т. е. ее проекцию на вектор \vec{e}_3 мы обозначаем β_{\parallel} , так что вектор безразмерной продольной скорости задается приведенной выше формулой (1).

В отличие от строго положительной величины β_e проекция β_{\parallel} может быть положительной или отрицательной. Соответствующий множитель Лоренца определим, как обычно: $\gamma_{\parallel} = 1/\sqrt{1 - \beta_{\parallel}^2}$.

Чтобы получить выражение для вектора, описывающего движение заряда в системе поля, надо преобразовать (3) по Лоренцу из лабораторной системы в систему поля. Вторая движется по отношению к первой со скоростью $-\beta_{\parallel} c$. Продольное преобразование

отличается тем, что его скорость перпендикулярна преобразуемому трехмерному вектору \vec{r}_e , поэтому радиус окружности, которая получается при проецировании траектории электрона на плоскость, перпендикулярную полю, не изменяется и

$$\underline{r}_f = \{ct_f, \vec{r}_f\} = \{\gamma_{\parallel} ct_e, \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel} \vec{e}_3 ct_e + \vec{r}_e\}. \quad (12)$$

Таким образом, времена в системах поля и лабораторной системе связаны лоренцевскими множителями: $t_f = \gamma_{\parallel} t_e = \gamma_{\parallel} \gamma_e t_* = \gamma_f t_*$, так что $\gamma_f = \gamma_{\parallel} \gamma_e$. Радиус-вектор заряда в системе поля

$$\vec{r}_f = \vec{r}_f(t_f) = \gamma_{\parallel} \vec{\beta}_{\parallel} ct_e + \vec{r}_e(\phi) = \vec{\beta}_{\parallel} ct_f + R_*(\vec{e}_1 \sin \phi - \vec{e}_2 \cos \phi) \quad (13)$$

равен сумме векторов, один из которых отражает обращение по окружности, а другой — равномерное движение вдоль поля.

Полная безразмерная скорость заряда

$$\vec{\beta}_f = \frac{d\vec{r}_f}{cdt_f} = \vec{\beta}_{\parallel} + \vec{\beta}_{\perp}. \quad (14)$$

Ее перпендикулярная составляющая

$$\vec{\beta}_{\perp} = \beta_{\perp}(\vec{e}_1 \cos \omega_f t_f + \vec{e}_2 \sin \omega_f t_f), \quad \beta_{\perp} = \frac{R_*}{c} \frac{d\phi}{dt_f} = \frac{R_*}{c} \frac{d\phi}{dt_e} \frac{dt_e}{dt_f} = \frac{\beta_e \omega_e}{\omega_e \gamma_{\parallel}} = \frac{\beta_e}{\gamma_{\parallel}}. \quad (15)$$

Так как составляющие скорости ортогональны, квадрат ее

$$\beta_f^2 = \beta_{\perp}^2 + \beta_{\parallel}^2 = \frac{\beta_e^2}{\gamma_{\parallel}^2} + \beta_{\parallel}^2 = (1 - \beta_{\parallel}^2) \beta_e^2 + \beta_{\parallel}^2, \quad (16)$$

так что лоренцевский множитель полного движения заряда

$$\gamma_f = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_f^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{\perp}^2 - \beta_{\parallel}^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_{\parallel}^2)(1 - \beta_e^2)}} = \gamma_e \gamma_{\parallel} \quad (17)$$

равен произведению множителей, соответствующих обращению и движению вдоль поля, что уже отмечалось.

Частоты обращения заряда связаны, как и времена, а именно, частота обращения в системе поля равна $\omega_f = \omega_e / \gamma_{\parallel} = \omega_* / \gamma_f$. Поскольку электрон проходит по одной и той же окружности на плоскости, на которую проецируется его траектория, а времена в системах отличаются на постоянные множители, то величина аргумента

тригонометрических функций $\phi = \omega_* t_* = \omega_e t_e = (\omega_e/\gamma_{\parallel}) t_f = \omega_f t_f$ остается неизменной. Период обращения заряда в системе поля составляет $T_f = 2\pi/\omega_f = (2\pi/\omega_e)\gamma_{\parallel} = T_*\gamma_f$. Простота связей между соответствующими величинами в рассматриваемых системах отсчета объясняется тем, что все движения, в которые вовлечены электроны, включая обращение по окружности, равномерные.

Безразмерный импульс электрона в системе поля

$$\underline{z}_f = \frac{1}{c} \frac{dr_f}{dt_*} = \frac{\gamma_e}{c} \frac{dr_f}{dt_e} = \frac{\gamma_f}{c} \frac{dr_f}{dt_f} = \{\gamma_f, \vec{z}_f\}, \quad (18)$$

где

$$\vec{z}_f = z_{\parallel} \vec{e}_3 + z_{\perp} (\vec{e}_1 \cos \omega_f t_f + \vec{e}_2 \sin \omega_f t_f), \quad z_{\parallel} = \beta_{\parallel} \gamma_f, \quad z_{\perp} = \beta_{\perp} \gamma_f = z_e. \quad (19)$$

Его перпендикулярная полю часть остается инвариантом.

Определим так называемый питч-угол α , т. е. угол между скоростью электрона в системе поля и направлением магнитного поля, так что

$$\beta_{\parallel} = \beta_f \cos \alpha, \quad \beta_{\perp} = \beta_f \sin \alpha. \quad (20)$$

Так как движение вдоль поля равномерное и прямолинейное, то ускорение во всех системах поля определяется формулами, аналогичными (10):

$$\underline{w}_f = c \frac{d\underline{z}_f}{dt_*} = \{0, \gamma_f^2 \underline{w}_f\}, \quad \underline{w}_f = c \frac{d\underline{z}_f}{dt_f} = \frac{d^2 \vec{r}_f}{dt_f^2} = w_f (-\vec{e}_1 \sin \phi + \vec{e}_2 \cos \phi), \quad (21)$$

$$w_f = R_* \omega_f^2 = \frac{w_e}{\gamma_{\parallel}^2} = c \beta_{\perp} \omega_f = c \frac{\omega_*}{\gamma_f} \beta_f \sin \alpha. \quad (22)$$

Инвариант

$$-\underline{w}^2 = \gamma_f^4 w_f^2 = R_*^2 \omega_*^4 = c^2 \omega_*^2 \gamma_f^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha. \quad (23)$$

Если наряду с величиной поля \mathcal{H}_* постоянным принимается радиус окружности R_* , то можно считать, что рассматривается один и тот же электрон. В дальнейшем мы будем сравнивать излучение электронов с закрепленными величинами скорости β_f и питч-угла α . Следует помнить, что они могут относиться к различным электронам, т. е. эти электроны могут обращаться по разным окружностям и иметь различные скорости вдоль поля, связанные только величиной β_f .

Систему источника рассмотрим позже. Что касается системы наблюдателя, то она рассматривается при применении теории к конкретным объектам, относительно которых известно, как они движутся. Если объект находится на космологическом расстоянии, то следует использовать приемлемую космологическую модель.

6. *Полное излучение и классификация.* Найдем полное излучение электрона, движущегося по спирали, т.е. в системе поля, в волновой зоне.

Как известно, релятивистский заряд излучает не только энергию, но и импульс, которые уносятся излучаемой зарядом электромагнитной волной. Перенос импульса означает, что центр расходящейся сферической волны смещается в сторону движения заряда. Четырехмерный вектор излучаемого импульса пропорционален вектору смещения электрона (формулы (I.135)), в качестве dt_1 следует взять dt_e или dt_f , а коэффициентом пропорциональности является мощность излучения, которая в общем случае дается выражением (I.136)

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} [-\underline{w}^2], \quad \underline{w}^2 = -\gamma^6 [w^2 - (\vec{\beta} \times \vec{w})^2], \quad (24)$$

где $\underline{w} = \gamma^2 \{ \gamma^2 \vec{\beta} \vec{w}, \vec{w} + \gamma (\vec{\beta} \vec{w}) \vec{\beta} \}$ — пространственноподобный четырехмерный вектор ускорения. Для нашего случая этот вектор определяется формулой (21), а его квадрат — формулой (23), так что

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \gamma_f^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \beta_e^2 \gamma_e^4 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} R_*^2 \omega_*^4. \quad (25)$$

Зафиксируем скорость заряда в системе поля и тем самым величины β_f , γ_f и α . Закрепим также величину напряженности внешнего магнитного поля \mathcal{H}_* и рассмотрим предельные случаи, о которых говорилось выше.

1) Нерелятивистский предел. При $\beta_f \ll 1$ множитель $\gamma_f \approx 1$ и

$$I \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha. \quad (26)$$

Это излучение называется, как уже говорилось, циклотронным.

2) Ультрарелятивистский предел. Здесь $\beta_f \approx 1$, $\gamma_f \gg 1$, так что в случае синхротронного излучения

$$I \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \gamma_f^2 \sin^2 \alpha. \quad (27)$$

Из приведенных формул видно, что циклотронное излучение значительно слабее синхротронного, так как в первом случае β_f мало, а во втором γ_f велико. Однако строго говоря, излучение можно называть синхротронным только, если питч-угол не очень мал (или не близок к π). Если же α имеет порядок $1/\gamma_f$, т. е. $\alpha = \alpha_0/\gamma_f$, то согласно формуле (27)

$$I \sim \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \alpha_0^2. \quad (28)$$

Точно такая же формула справедлива, когда $\pi - \alpha = \alpha_0/\gamma_f$. Этот случай по существу не отличается от случая малых питч-углов, просто заряд движется в сторону, противоположную направлению поля. Впредь его отдельно не рассматриваем.

Излучение при малых питч-углах не зависит от γ_f и называется релятивистским дипольным. Основанием к такому названию является формальное совпадение формулы (28) с выражением для интенсивности излучения диполя (I.134) с дипольным моментом $e|\vec{r}_d| = e\alpha_0/\omega_*$ и его второй производной в виде $e|\ddot{\vec{r}}_d|\omega_*^2 = e\omega_d = e\alpha_0\omega_*$.

В промежуточных случаях, когда скорость электрона умеренно релятивистская, говорят о гироциклотронном излучении. Подчеркнем еще раз, что излучение полностью отсутствует, если скорость электрона составляет угол 0 или π с направлением поля, так как тогда электрон движется вдоль поля равномерно, без ускорения, и не излучает.

В заключение параграфа сопоставим величину энергии, излучаемой вращающимся по окружности электроном за период T_e , с его кинетической энергией (I.42). Их отношение равно

$$\frac{IT_e}{\varepsilon} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \beta_e^2 \gamma_e^4 \frac{2\pi}{\omega_e} \frac{1}{mc^2(\gamma_e - 1)} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\mathcal{H}_*}{e} \frac{\beta_e^2 \gamma_e^3}{\gamma_e - 1}. \quad (29)$$

Это отношение достигает значения 1 при напряженности магнитного поля

$$\mathcal{H}_* = \frac{e}{\sigma_T} \frac{2}{\gamma_e(\gamma_e + 1)}. \quad (30)$$

Коэффициент e/σ_T , где $\sigma_T = (8\pi/3)r_e^2$ — томсоновское сечение, равен $7.21 \cdot 10^{14}$ Гс. Множитель, зависящий от скорости электрона, при $\beta_e = 0$ равен 1, а при больших γ_e пропорционален $2/\gamma_e^2$.

Даже при очень значительных величинах γ_e величина напряженности магнитного поля, определяемая принятым условием, очень велика. Столь большие ее значения могут достигаться в магнитосферах нейтронных звезд, однако при таких напряженностях классическая теория магнитотормозного излучения уже неверна и требуется квантовое рассмотрение. Таким образом, предположение о возможности пренебречь влиянием излучения на траекторию электрона оправдано.

§ 2. Угловая зависимость излучения одиночного заряда в волновой зоне

1. *Интенсивность магнито-тормозного излучения.* Напомним общие формулы, характеризующие излучение заряда, движущегося с ускорением.

Напряженность электрического поля на расстоянии R от заряда согласно формулам (I.125) и (I.137)

$$\vec{E} = \frac{e}{cR} \vec{n} \times \left[\frac{\vec{n}}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \times \frac{d}{dt_1} \frac{\vec{\beta}}{1 - \vec{n}\vec{\beta}} \right] = \frac{e}{c^2 R} \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{w}]}{(1 - \vec{n}\vec{\beta})^3}. \quad (31)$$

Здесь \vec{R} — вектор, соединяющий фиксированную точку в области движения заряда с точкой наблюдения, $\vec{n} = \vec{R}/R$ — единичный вектор направления на наблюдателя, $\vec{\beta}$ и \vec{w} — безразмерная скорость и ускорение заряда, которые вычисляются в момент запаздывающего времени t_1 . Время t_1 связано со временем наблюдения t равенством

$$t = t_1 + \frac{R}{c} - \frac{\vec{n}\vec{r}(t_1)}{c}, \quad (32)$$

где $\vec{r}(t_1)$ — радиус-вектор заряда, исходящий из указанной фиксированной точки, так что при закреплённом расстоянии R между дифференциалами времен имеется связь:

$$dt = (1 - \vec{n}\vec{\beta}) dt_1. \quad (33)$$

В первом выражении в (31) производная по времени t_1 берется полная, так как вектор $\vec{\beta}$ зависит только от этого времени.

Общая формула для мощности излучения заряда, т. е. количества лучистой энергии, испускаемой им в единицу времени, имеет вид

$$\mathcal{W}(\vec{n}) = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2(1-\vec{n}\vec{\beta})^2 + 2(\vec{n}\vec{w})(\vec{\beta}\vec{w})(1-\vec{n}\vec{\beta}) - (1-\beta^2)(\vec{n}\vec{w})^2}{(1-\vec{n}\vec{\beta})^5}. \quad (34)$$

В этом параграфе все дальнейшее рассмотрение производится в одной из систем поля, однако для определенности индекс f указываем.

Пусть наблюдатель находится на расстоянии R от места движения заряда в направлении \vec{n}_f . Заряд, конечно, перемещается, однако за период его обращения, даже если принять его скорость равной скорости света, он пройдет вдоль поля расстояние не больше $cT_f = 2\pi c\gamma_f/\omega_* = (2\pi mc^2/e)\gamma_f/\mathcal{H}_* \approx 10^4\gamma_f/\mathcal{H}_*$. Даже при больших значениях γ_f и малых напряженностях поля, которые характерны, например, для остатков сверхновых и джетов активных ядер галактик, это расстояние намного меньше расстояний до этих объектов.

Для нашего случая выберем входящие в формулу (34) векторы следующим образом. Можно принять, что наблюдатель находится в плоскости векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_3 , что не является ограничением, так как заряд вращается и его излучение при фиксированном положении наблюдателя по отношению к направлению поля будет одним и тем же, независимо от азимута наблюдателя. Вектор направления на наблюдателя характеризуем поэтому только полярным углом:

$$\vec{n}_f = \vec{e}_1 \sin \theta_f + \vec{e}_3 \cos \theta_f = (\sin \theta_f, 0, \cos \theta_f). \quad (35)$$

Остальные векторы задаются формулами, приведенными в предыдущем параграфе. Запишем их в виде перечисления трех декартовых координат:

$$\vec{\beta}_f = (\beta_\perp \cos \phi, \beta_\perp \sin \phi, \beta_\parallel), \quad \vec{w}_f = -w_f(\sin \phi, -\cos \phi, 0). \quad (36)$$

Найдем произведения векторов, входящие в общую формулу для мощности излучения (34):

$$\vec{n}_f \vec{w}_f = -w_f \sin \theta_f \sin \phi, \quad \vec{n}_f \vec{\beta}_f = \beta_\parallel \cos \theta_f + \beta_\perp \sin \theta_f \cos \phi, \quad \vec{\beta}_f \vec{w}_f = 0. \quad (37)$$

В качестве основных переменных выбираем полную скорость электрона β_f и питч-угол α согласно соотношениям (20), так что $w_f =$

$c\beta_f\omega_f \sin \alpha = c\omega_* \frac{\beta_f}{\gamma_f} \sin \alpha$. Мощность излучения в выбранном направлении тогда будет определяться формулой $\mathcal{W}(\theta_f, \phi) =$

$$= \frac{e^2 w_f^2}{4\pi c^3} \frac{[1 - \beta_f(\cos \theta_f \cos \alpha + \sin \theta_f \sin \alpha \cos \phi)]^2 - (1 - \beta_f^2) \sin^2 \theta_f \sin^2 \phi}{[1 - \beta_f(\cos \theta_f \cos \alpha + \sin \theta_f \sin \alpha \cos \phi)]^5}. \quad (38)$$

2. *Предельные случаи.* Рассмотрим те же предельные случаи, что и в первом параграфе.

1) $\beta_f \ll 1$. Малую величину β_f полагаем равной нулю везде, кроме ее квадрата, которому пропорциональна мощность, так что

$$\mathcal{W} = \frac{e^2}{4\pi c} \omega_*^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \theta_f \sin^2 \phi). \quad (39)$$

2) $\beta_f \approx 1, \gamma_f \gg 1$. Из формулы (38) видно, что выражение, стоящее в скобках в знаменателе, почти всегда близко к единице. Однако оно становится малым, когда θ_f близко к α , а угол ϕ близок к кратным 2π (будем считать его близким к нулю, $\phi = \phi_0/\gamma_f$). Положим также $\theta_f = \alpha + \varepsilon$, где $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma_f, |\varepsilon| \ll 1$. Привлекая формулы для синусов и косинусов суммы углов и разлагая эти функции при малых аргументах, получаем

$$\begin{aligned} \cos \theta_f \cos \alpha + \sin \theta_f \sin \alpha \cos \phi &= \cos \alpha (\cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \sin \varepsilon) + \\ + \sin \alpha (\sin \alpha \cos \varepsilon + \cos \alpha \sin \varepsilon) \cos \phi &= \cos \varepsilon (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos \phi) - \\ - \sin \varepsilon \cos \alpha \sin \alpha (1 - \cos \phi) &\sim 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \phi^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Разность $1 - \beta_f$ обычно умножают на $1 + \beta_f \approx 2$ и представляют в виде $1 - \beta_f = \frac{1}{2\gamma_f^2}$. Таким образом, выражение в квадратных скобках в знаменателе (38) получается следующим:

$$1 - \vec{n}_f \vec{\beta}_f \sim \frac{1}{2\gamma_f^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} + \sin^2 \alpha \frac{\phi^2}{2} = \frac{1}{2\gamma_f^2} (1 + \varepsilon_0^2 + \sin^2 \alpha \phi_0^2). \quad (41)$$

Числитель преобразуется аналогично. В результате находим

$$\mathcal{W} \sim 2 \frac{e^2}{\pi c} \omega_*^2 \sin^2 \alpha \gamma_f^4 \frac{(1 + \varepsilon_0^2 + \sin^2 \alpha \phi_0^2)^2 - 4 \sin^2 \alpha \phi_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2 + \sin^2 \alpha \phi_0^2)^5}. \quad (42)$$

Таким образом, почти все излучение заряда идет в направлении мгновенного движения заряда, а далекий наблюдатель, расположенный вблизи конуса с осью вдоль направления поля и углом раствора α , будет видеть вспышку излучения в тот момент, когда заряд движется прямо на него (конечно, с учетом запаздывания по времени согласно (32)). Такое свечение напоминает мигание маяка или светового сигнала полицейской машины. Для случая вращения заряда по окружности надо положить $\alpha = \pi/2$ и говорить не о конусе, а о плоскости.

Особым случаем опять является малость угла α . Положим, как и выше, $\alpha = \alpha_0/\gamma$, тогда

$$\mathcal{W} \sim 2 \frac{e^2}{\pi c} \omega_*^2 \frac{\gamma_f^2 \alpha_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^3}. \quad (43)$$

Угловую зависимость излучения определяет большая дробь в (38). Однако, эта зависимость не очень наглядна. Кроме того, если скорость заряда не мала, то прибор наблюдателя не будет регистрировать мгновенное излучение, а произведет усреднение по некоторому промежутку времени, содержащему много периодов вращения заряда. Поэтому найдем интеграл по периоду от величины (38).

3. Интегрирование по периоду. Для получения полного излучения за период нужно вычислить два интеграла. Выразим их через интегралы U_n Приложения В:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(1 - \beta_1 \cos \phi)^3} &= 2U_3(\beta_1) = \pi \frac{2 + \beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)^{5/2}}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \phi d\phi}{(1 - \beta_1 \cos \phi)^5} = \\ &= \frac{2}{\beta_1^2} [2U_4(\beta_1) - (1 - \beta_1^2)U_5(\beta_1) - U_3(\beta_1)] = \frac{\pi}{4} \frac{4 + \beta_1^2}{(1 - \beta_1^2)^{7/2}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Чтобы воспользоваться этими интегралами, введем два обозначения

$$\beta_c = 1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f = 1 - \beta_f \cos \theta_f \cos \alpha, \quad \beta_s = \beta_{\perp} \sin \theta_f = \beta_f \sin \theta_f \sin \alpha. \quad (45)$$

Тогда надо вынести из скобок степени β_c и принять $\beta_1 = \beta_s/\beta_c$. Для полного излучения за период получим, что оно равно $\overline{\mathcal{W}}/\omega_f$, где

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{W}}(\theta_f) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathcal{W}(\theta_f, \phi) d\phi = \\ &= \frac{e^2}{4c} \omega_*^2 \frac{\beta_f^2}{\gamma_f^2} \sin^2 \alpha \left[\frac{2\beta_c^2 + \beta_s^2}{(\beta_c^2 - \beta_s^2)^{5/2}} - \frac{1 - \beta_f^2}{4} \frac{4\beta_c^2 + \beta_s^2}{(\beta_c^2 - \beta_s^2)^{7/2}} \sin^2 \theta_f \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Величина I , которая представляет количество лучистой энергии, протекающей за единицу времени во всех направлениях, связана с $\overline{\mathcal{W}}$ соотношением

$$I = \frac{\omega_f}{2\pi} \int d^2n \frac{\overline{\mathcal{W}}}{\omega_f} = \int_0^\pi \overline{\mathcal{W}} \sin \theta_f d\theta_f. \quad (47)$$

Приведенную связь между I и $\overline{\mathcal{W}}$ можно проверить прямой выкладкой. Для этого в интеграле по углу надо сделать подстановку

$$\mu = \cos \theta_f = \frac{v + \beta_f \gamma_e \sin \alpha \sqrt{1 - \beta_e^2 v^2}}{v \beta_f \sin \alpha + \gamma_e \sqrt{1 - \beta_e^2 v^2}}. \quad (48)$$

При циклотронном излучении $\beta_f \ll 1$, так что $\beta_c = 1$, $\beta_s = \beta_1 = 0$ и

$$\overline{\mathcal{W}}(\theta_f) = \frac{e^2}{4c} \omega_*^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha (2 - \sin^2 \theta_f) = \frac{e^2}{4c} \omega_*^2 \beta_f^2 \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \theta_f). \quad (49)$$

Множитель в скобках совпадает по виду с индикатрисой рассеяния Релея [49, 35]. Интенсивность в направлении поля (и противоположном) в два раза больше, чем в плоскости вращения заряда. Полная интенсивность, естественно, и в этом случае получается правильной, что проверить совсем легко.

Синхротронное излучение рассмотрим в отдельном (следующем) пункте.

4. *Синхротронное излучение за период.* Пусть $\gamma_f \gg 1$. После подстановки $\theta_f = \alpha + \varepsilon$ и замены $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma_f$ оценим величины (45):

$$\begin{aligned} \beta_c &= 1 - \beta_f \cos \alpha (\cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \sin \varepsilon) \sim 1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma_f^2}\right) \cos \alpha \times \\ &\times \left[\cos \alpha \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) - \varepsilon \sin \alpha \right] \sim \sin^2 \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{2\gamma_f^2} + \cos^2 \alpha \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{1}{2} \varepsilon \sin 2\alpha = \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{\varepsilon_0 \gamma_f \sin 2\alpha + \cos^2 \alpha (1 + \varepsilon_0^2)}{2\gamma_f^2}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \beta_s &= \beta_f \sin \alpha (\sin \alpha \cos \varepsilon + \cos \alpha \sin \varepsilon) \sim \left(1 - \frac{1}{2\gamma_f^2}\right) \sin \alpha \times \\ &\times \left[\sin \alpha \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) + \varepsilon \cos \alpha \right] \sim \sin^2 \alpha + \frac{\varepsilon_0 \gamma_f \sin 2\alpha - \sin^2 \alpha (1 + \varepsilon_0^2)}{2\gamma_f^2}. \end{aligned} \quad (51)$$

В обеих формулах имеются одинаковые конечные слагаемые $\sin^2\alpha$ и поправочные слагаемые, стремящиеся к нулю при $\gamma_f \rightarrow \infty$, которые можно отбросить везде, кроме знаменателей, куда входит разность оцениваемых величин: $\beta_c - \beta_s = (1 + \varepsilon_0^2)/(2\gamma_f^2)$, $\beta_c^2 - \beta_s^2 = \sin^2\alpha(1 + \varepsilon_0^2)/\gamma_f^2$. После подстановки их в выражение (46) получим при не малых α

$$\overline{\mathcal{W}}(\theta_f) \sim \frac{e^2}{4c} \omega_*^2 \gamma_f^3 \sin\alpha \frac{7/4 + 3\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{7/2}}. \quad (52)$$

Отметим, что при интегрировании этого предельного выражения по $\theta_f = \alpha + \varepsilon$, которое ввиду сосредоточения излучения в узком конусе около питч-угла и быстрого убывания интенсивности с удалением от этого конуса можно распространить по ε на всю вещественную ось, получается правильное выражение для полной

интенсивности. Действительно, $I = \int_0^\pi \overline{\mathcal{W}}(\theta_f) \sin\theta_f d\theta_f \sim$

$$\sim \frac{\sin\alpha}{\gamma_f} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mathcal{W}} d\varepsilon_0 = \frac{e^2}{4c} \omega_*^2 \sin^2\alpha \gamma_f^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{7/4 + 3\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{7/2}} d\varepsilon_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_*^2 \gamma_f^2 \sin^2\alpha. \quad (53)$$

Последний интеграл вычисляется при помощи замены переменной интегрирования $z = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}$, $\varepsilon_0 = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{7/4 + 3\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{7/2}} d\varepsilon_0 = \frac{2}{4} \int_0^1 (1 - z^2)(7 + 5z^2) dz = \frac{8}{3}. \quad (54)$$

Если угол $\alpha = \alpha_0/\gamma_f$ мал, то все слагаемые у величин (50)–(51) (кроме слагаемого с квадратом синуса в числителе дроби у β_s) одного порядка:

$$\beta_c = \frac{\beta_c^0}{2\gamma_f^2}, \quad \beta_s = \frac{\beta_s^0}{2\gamma_f^2}, \quad \beta_c^0 = 1 + \varepsilon_0^2 + 2\alpha_0(\alpha_0 + \varepsilon_0), \quad \beta_s^0 = 2\alpha_0(\alpha_0 + \varepsilon_0). \quad (55)$$

Выражение для $\overline{\mathcal{W}}$ довольно громоздко: $\overline{\mathcal{W}}(\theta_f) \sim 2 \frac{e^2}{c} \frac{\omega_*^2 \alpha_0^2 \gamma_f^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{7/2}} \times$

$$\times \frac{[2(\beta_c^0)^2 + (\beta_s^0)^2](1 + \varepsilon_0^2)[1 + (2\alpha_0 + \varepsilon_0)^2] - (\alpha_0 + \varepsilon_0)^2 [4(\beta_c^0)^2 + (\beta_s^0)^2]}{[1 + (2\alpha_0 + \varepsilon_0)^2]^{7/2}}. \quad (56)$$

Таким образом, синхротронное излучение за период идет так же, как и мгновенное, т. е. в конусном слое толщиной порядка $1/\gamma_f$ около конуса с углом раствора α . Каждое интегрирование понижает степень γ_f , которой пропорциональна интенсивность: γ_f^4 у мгновенного, γ_f^3 — у излучения за период, γ_f^2 — у полного (во все стороны). Это объясняется малой протяженностью промежутков интегрирования: все они порядка $1/\gamma_f$. Если же и питч-угол имеет такой порядок, то степень γ_f еще понижается: у \overline{W} на одну, а у I — на две единицы.

5. *Вращение по окружности.* Посмотрим подробнее, как излучение за период зависит от скорости заряда в простейшем случае вращения по окружности. Для этого случая в формуле (46) надо положить $\alpha = \pi/2$. Кроме того, для сравнения со случаем движения по прямой выразим множитель, стоящий в этой формуле перед дробью, через ускорение. Тогда, положив $\varepsilon = \pi/2 - \theta_f$, перепишем

$$(46) \text{ в виде } \overline{W}(\theta_e) = \frac{e^2}{4c^3} w_e^2 \mathcal{W}_e(\varepsilon),$$

$$\mathcal{W}_e(\varepsilon) = \gamma_e^5 \frac{1 + \frac{3}{4}\beta_e^2 + \left[\frac{1}{\gamma_e^2} + 2z_e^2 + \left(\frac{1}{2} + z_e^2 \right) \beta_e^2 \right] \sin^2 \varepsilon - \beta_e^2 \left(\frac{1}{4} + z_e^2 \right) \sin^4 \varepsilon}{(1 + z_e^2 \sin^2 \varepsilon)^{7/2}}. \quad (57)$$

На рис. 2а приведены графики, отражающие зависимость отношения \mathcal{W}_e/γ_e^5 от угла ε для тех же значений скорости, что и на рисунках 5 Главы I: $\beta_e = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95, 0.98$. Бóльшим значениям скорости соответствуют бóльшие значения излучения в плоскости вращения $\mathcal{W}_e(0)/\gamma_e^5 = 1 + 3\beta_e^2/4$, причем значения множителя γ_e^5 , опущенного для возможности нанести кривые на один рисунок, равны соответственно $\gamma_e^5 = 1, 2.053, 12.86, 63.55, 336.9, 3205$. Значения этой функции при $\varepsilon = \pi/2$ (вдоль поля) равны $(\mathcal{W}_e(\pi/2)/\gamma_e^5) = 2$. Рис. 2а для бóльшей наглядности дан в правильном соотношении масштабов осей. Заметим, что на самом деле кривые рисунков 5а Главы I и 2а являются сечениями поверхностей, характеризующих распределение направлений излучения в пространстве, но если поверхности первых получаются вращением кривых вокруг оси абсцисс, то для получения поверхностей вторых кривые надо вращать вокруг оси ординат.

На рис. 2б те же величины представлены в зависимости от $u = (\gamma_e \varepsilon)^2 = \varepsilon_0^2$. При близких к 1 значениях β_e кривые уже довольно

близки к предельной кривой $(7/4 + 3u)/(1 + u)^{7/2}$, также помещенной на рисунок (кривая верхняя слева и нижняя справа). Кривые пересекаются в точках, близких к точке с абсциссой $u = 0.219$ и ординатой 1.20.

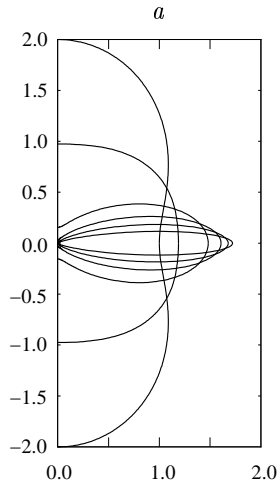


Рис. 2а. Полярные диаграммы функций $W_e(\varepsilon)/\gamma_e^5$ при $\beta_e = 0, 0.5, 0.8, 0.9, 0.95$ и 0.98 .

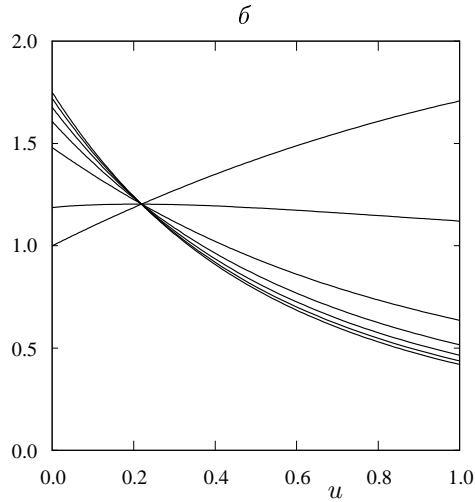


Рис. 2б. Те же функции в зависимости от аргумента $u = (\gamma_e \varepsilon)^2$ и предельная кривая $(7/4 + 3u)/(1 + u)^{7/2}$.

§ 3. Спектр магнито-тормозного излучения в волновой зоне

1. *Движение по окружности.* В этом параграфе найдем спектр излучения электрона в магнитном поле в волновой зоне. Поскольку заряд движется по окружности и влиянием его излучения на его же движение мы пренебрегаем, то все величины, связанные с этим движением, а именно, координаты заряда, его скорость, ускорение, а следовательно и напряженности излучаемого им электромагнитного поля, периодические с периодом $T_e = 2\pi/\omega_e$.

Напомним основные формулы для излучения при периодическом движении заряда. Как было показано в Главе I, периоды по времени заряда t_1 и по времени наблюдения t совпадают.

Спектр излучения периодического заряда состоит из отдельных равноотстоящих друг от друга линий. Для определения интенсивностей спектральных линий надо вычислить вектор \vec{G}_l , определяемый формулой (I.185):

$$\vec{G}_l(\vec{n}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp(i l \omega_0(t_1 - \vec{n}\vec{r}/c)) \vec{\beta} dt_1. \quad (58)$$

Тогда коэффициент разложения в ряд напряженности электрического поля

$$\vec{E}_l = -i \frac{e}{R} l^2 \omega_0^2 e^{i l \omega_0 R/c} \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{G}_l). \quad (59)$$

Формулы (58) и (59) справедливы для любого периодического движения. Далее перейдем к магнито-тормозному излучению.

Сначала рассмотрим излучение в лабораторной системе. Вектор направления на наблюдателя \vec{n}_e по-прежнему можно взять в плоскости векторов \vec{e}_1 и \vec{e}_3 .

Подставим формулы для входящих в подынтегральное выражение векторов для заряда, движущегося по окружности:

$$\vec{n}_e = \sin \theta_e \vec{e}_1 + \cos \theta_e \vec{e}_3, \quad \vec{r}_e = \frac{c\beta_e}{\omega_e} (\sin \phi \vec{e}_1 - \cos \phi \vec{e}_2), \quad \vec{\beta}_e = \beta_e (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2), \quad (60)$$

и сделаем замену $t_1 = t_e = \phi/\omega_e$. Интеграл (58) перейдет в

$$\vec{G}_l = \frac{\beta_e}{2\pi\omega_e} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \phi \vec{e}_1 + \sin \phi \vec{e}_2) e^{i l \phi - i z \sin \phi} d\phi, \quad (61)$$

где $z = l \beta_e \sin \theta_e$.

Теперь воспользуемся формулами (Б.38), выражающими интегралы, входящие в вектор \vec{G}_l , через функцию Бесселя и ее производную. Тогда вектор (58) примет вид

$$\vec{G}_l = \frac{\beta_e}{\omega_e} \left(\frac{1}{\sin \theta_e} J_l(z) \vec{e}_1 + i \beta_e J'_l(z) \vec{e}_2 \right). \quad (62)$$

2. *Формула Шотта.* Чтобы написать формулу для коэффициента разложения напряженности, найдем двойные векторные произведения от двух координатных ортов:

$$\vec{n}_e \times [\vec{n}_e \times \vec{e}_1] = \sin \theta_e \vec{n}_e - \vec{e}_1, \quad \vec{n}_e \times [\vec{n}_e \times \vec{e}_2] = -\vec{e}_2. \quad (63)$$

Удобно ввести орты, перпендикулярные направлению излучения и образующие с ортом \vec{n}_e правую тройку:

$$\vec{e}_1(\vec{n}_e) = \cos \theta_e \vec{e}_1 - \sin \theta_e \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2(\vec{n}_e) = \vec{e}_2. \quad (64)$$

Тогда l -тая составляющая напряженности согласно формулам (I.186), а также (62), (63) и (64) предстанет в виде

$$\vec{E}_l = \frac{e}{cR} i l \omega_e e^{i l \omega_e R/c} [\text{ctg} \theta_e J_l(z) \vec{e}_1(\vec{n}_e) + i \beta_e J_l'(z) \vec{e}_2(\vec{n}_e)]. \quad (65)$$

Заметим, что составляющая с номером нуль равна нулю.

Подставив результат (65) в формулу (I.190), получим

$$\int_{-T_e/2}^{T_e/2} \mathcal{W}_* dt = \frac{c}{2\omega_e} R^2 \frac{e^2 \omega_e^2}{c^2 R^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l^2 [\text{ctg}^2 \theta_e J_l^2(z) + \beta_e^2 J_l'^2(z)] = \omega_e \sum_{l=1}^{\infty} W_l. \quad (66)$$

Для интенсивности l -той линии (полного излучения в ней) W_l в расчете на единицу частоты найдем

$$W_l = \frac{e^2}{c} l^2 w_l, \quad (67)$$

где введено еще одно обозначение

$$w_l = w_l(\beta_e, \theta_e) = \text{ctg}^2 \theta_e J_l^2(z) + \beta_e^2 J_l'^2(z). \quad (68)$$

Напомним, что аргумент бесселевой функции $z = l \beta_e \sin \theta_e$. Величина $e^2 l^2 \omega_e^2 w_l / (4\pi c^2 R^2)$ представляет плотность энергии в линии с номером l на расстоянии R от источника, вектор Пойнтинга (потока энергии) имеет дополнительный множитель $c \vec{n}_e$.

Формула (67) носит название формулы Шотта, который ее вывел в 1912 г. Она получила широкое применение в различных областях физики и в особенности в астрофизике.

На рис. 3 приведены безразмерные интенсивности излучения в первых пяти линиях при $\theta_e = \pi/2$, т. е. в основной плоскости, в зависимости от скорости электрона β_e (функции $l^2 w_l(\beta_e, \pi/2)$). Рис. 4 дает представление о зависимости интенсивностей в том же направлении от номера линии для значений $\beta_e = 0.4, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.925, 0.95, 1.0$. Нанесенные кривые являются огибающими функций $l^2 w_l(\beta_e, \pi/2)$. При малых β_e интенсивности линий быстро убывают с номером. При β_e , достаточно близких к единице, интенсивности сначала растут, достигают максимума, а затем убывают. При $\beta_e = 1$ рост с l неограничен.

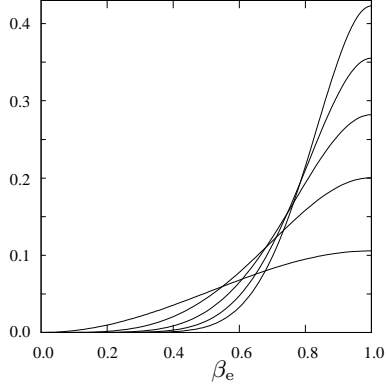


Рис. 3. Функции $l^2 w_l(\beta_e, \pi/2)$ при $l = 1(1)5$ в зависимости от β_e .

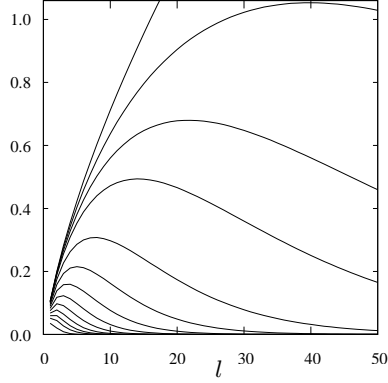


Рис. 4. Зависимость функций $l^2 w_l(\beta_e, \pi/2)$ от l при $\beta_e = 0.4, 0.5(0.05)0.9, 0.925, 0.95, 1.0$.

3. *Поляризация в линиях.* Каждая линия в спектре магнитотормозного излучения представляет собой монохроматическую волну и к ней можно применить общую теорию поляризации [35]. Как и всякая строго монохроматическая волна, эти волны полностью эллиптически поляризованы. Для того, чтобы в этом убедиться, рассмотрим напряженность электрического поля в линии с номером l , т. е. вектор \vec{E}_l . Поскольку интенсивность линии у нас уже найдена, поляризационные характеристики (параметры Стокса) можно находить с точностью до множителя.

Используем орты (64) в качестве поляризационного базиса. Представим напряженность в линии в этих ортах согласно формуле (63) в виде столбца:

$$\vec{E}_l \propto [i \operatorname{ctg} \theta_e J_l(z) \vec{e}_1(\vec{n}_e) - \beta_e J_l'(z) \vec{e}_2(\vec{n}_e)] = \begin{pmatrix} i \operatorname{ctg} \theta_e J_l(z) \\ -\beta_e J_l'(z) \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Поляризационная матрица является обычной матрицей плотности для фотонов одной энергии и одинакового импульса. Она получается как диадное произведение вектора напряженности самого на себя [35]. В астрофизике вместо поляризационной матрицы используются параметры Стокса, которые линейно связаны с элементами матрицы:

$$\hat{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \vec{E}^\dagger = \frac{c}{4\pi} \begin{pmatrix} |\vec{E}_x|^2 & \vec{E}_x \vec{E}_y^* \\ \vec{E}_x^* \vec{E}_y & |\vec{E}_y|^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + Q & U - iV \\ U + iV & I - Q \end{pmatrix}, \quad (70)$$

где I — интенсивность излучения, Q и U — параметры линейной, а V — круговой поляризации. В нашем случае роль интенсивности играет W_l .

Тогда в принятых поляризационных ортах поляризационная матрица излучения в линии с номером l с точностью до постоянного множителя будет иметь вид

$$\hat{S}_l = \frac{c}{4\pi} \vec{E}_l \vec{E}_l^\dagger \propto \begin{pmatrix} \text{ctg}^2 \theta_e J_l^2(z) & -i\beta_e \text{ctg} \theta_e J_l(z) J_l'(z) \\ i\beta_e \text{ctg} \theta_e J_l(z) J_l'(z) & \beta_e^2 J_l^2(z) \end{pmatrix}, \quad (71)$$

а параметры Стокса с правильным коэффициентом, таким же как у интенсивности, определяемой формулой (67) примут следующие значения: $U_l = 0$,

$$Q_l = \frac{e^2}{c} l^2 [\text{ctg}^2 \theta_e J_l^2(z) - \beta_e^2 J_l^2(z)], \quad V_l = 2 \frac{e^2}{c} l^2 \beta_e \text{ctg} \theta_e J_l(z) J_l'(z). \quad (72)$$

Легко проверить, что выполняется равенство $W_l^2 = Q_l^2 + U_l^2 + V_l^2$, являющееся условием полной поляризации.

Таким образом, излучение в каждой магнито-тормозной линии полностью эллиптически поляризовано, т. е. обладает как линейной, так и круговой поляризацией. В основной плоскости круговая поляризация исчезает ($\text{ctg} \pi/2 = 0$), а линейная становится полной: $I_l = -Q_l = \frac{e^2}{c} [z J_l'(z)]^2$. Напротив, при наблюдении вдоль оси вращения электрона, т. е. при $\theta_e = 0$ или $\theta_e = \pi$, поляризация полностью круговая. При этом наблюдатель видит только одну линию, а именно, первую и $I_1 = V_1 = \frac{e^2 \beta_e^2}{c^2}$. Последние утверждения вытекают из свойства бесселевых функций, выражаемого асимптотическим равенством $J_l(z) \sim (z/2)^l / l!$ при $z \rightarrow 0$ (формула (Б.47)). Состояния поляризации согласуются с геометрией движения излучающего электрона и положения наблюдателя.

4. *Полное излучение в линиях.* Полное количество энергии, излучаемой в линии, равно интегралу по направлениям от интенсивности (67), т. е.

$$\overline{W}_l(\beta_e) = 2\pi \int_0^\pi \sin \theta_e d\theta_e W_l. \quad (73)$$

При интегрировании возникают два интеграла, которые согласно формулам теории бesselевых функций (формулы (Б.106) и (Б.108)) выражаются через функции Бесселя двойного (по сравнению с номером линии) порядка, так что

$$\overline{W}_l(\beta_e) = 4\pi \frac{e^2}{c} l \left[\beta_e J'_{2l}(2l\beta_e) - \frac{l}{\gamma_e^2} \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \right]. \quad (74)$$

Можно найти суммарные параметры поляризации излучения, идущего во все стороны. При этом $\overline{V}_l = 0$, т. е. круговая поляризация исчезает ввиду симметричности правой и левой поляризации, остается только линейная:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_l(\beta_e) &= -4\pi \frac{e^2}{c} l \left[\beta_e J'_{2l}(2l\beta_e) + l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \left(1 + \beta_e^2 - \frac{2}{y} \right) \right] = \\ &= -4\pi \frac{e^2}{c} l \left[\beta_e J'_{2l}(2l\beta_e) - \frac{l}{\gamma_e^2} \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy + 2l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) \frac{1-y}{y} dy \right]. \end{aligned} \quad (75)$$

В случае нерелятивистского заряда ($l\beta_e \ll 1$) из приведенных формул с помощью уже использовавшегося соотношения: $J_\nu(z) \sim (z/2)^\nu / \Gamma(\nu + 1)$ при $z \rightarrow +0$, легко получить

$$\overline{W}_l \sim 4\pi \frac{e^2}{c} \frac{l(l+1)}{(2l+1)!} (l\beta_e)^{2l}, \quad \overline{Q}_l \sim -4\pi \frac{e^2}{c} \frac{l^2}{(2l+1)!} (l\beta_e)^{2l}. \quad (76)$$

Так как множители, зависящие от l , при малых l невелики, а при больших l согласно формуле Стирлинга приближенно пропорциональны $(2/e)^{2l+1}$, то за счет множителя β_e^{2l} интенсивности спектральных линий быстро убывают с ростом номера, так что фактически осуществляются только первые циклотронные линии.

Рис. 5 дает представление о зависимости от номера линии функции $\overline{W}_l(\beta_e)$ при различных энергиях электрона. Как и на рис. 4, представлены огибающие дискретных значений этой функции в

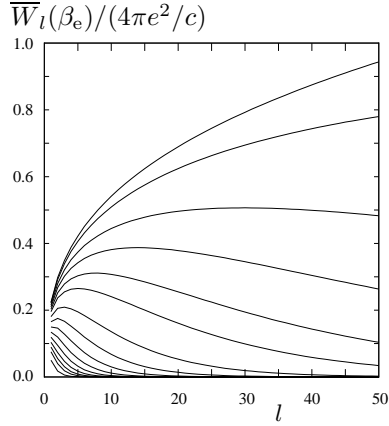


Рис. 5. Полное излучение в линиях при различных β_e .

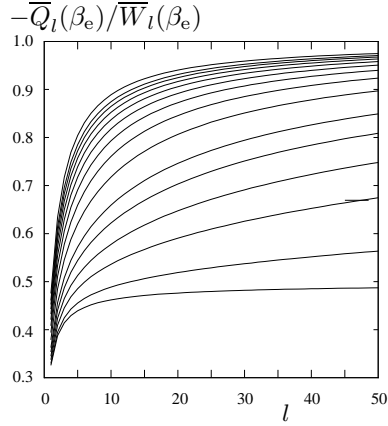


Рис. 6. Степень линейной поляризации в полном излучении.

единицах $4\pi e^2/c$ при значениях $\beta_e=0.4, 0.5(0.05)0.9, 0.925, 0.95, 0.97, 0.99, 1.0$. Чем больше β_e , тем выше соответствующая кривая. Некоторая негладкость кривых при небольших l объясняется дискретностью функций. На рис. 6 даются отношения параметра Стокса $-\overline{Q}_l(\beta_e)$ и интенсивности при тех же значениях β_e . Большим их значениям соответствуют меньшие величины поляризации. Отметим предельные значения степени поляризации. При $\beta_e \rightarrow 0$ отношение $-\frac{\overline{Q}_l(\beta_e)}{\overline{W}_l(\beta_e)} \rightarrow \frac{l}{l+1}$, при $l \rightarrow \infty$ это отношение стремится к 1, причем тем быстрее, чем меньше β_e .

Поведение спектра синхротронного излучения уже намечается на приведенных рисунках. В следующем параграфе оно будет подробно обсуждено, а в последующих пунктах этого обратимся к вопросу о спектре в системах поля.

5. Импульс фотона в различных системах. Для перехода из лабораторной системы в систему поля свяжем характеристики излучения в этих системах. Все характеристики фотонов снабжаем теми же индексами, что и электронные. Направление излучения характеризуем единичными векторами \vec{n}_e и \vec{n}_f с соответствующими углами, а энергии фотонов — не частотами, а волновыми числами \varkappa_e и \varkappa_f .

Введем четырехмерный вектор импульса (точнее, волновой

вектор) фотона \underline{x} . Для большей наглядности отметим этот вектор индексами e и f, когда его составляющие отнесены к соответствующей системе отсчета:

$$\underline{x}_e = \{\alpha_e, \alpha_e \vec{n}_e\}, \quad \underline{x}_f = \{\alpha_f, \alpha_f \vec{n}_f\}. \quad (77)$$

Соотношение между нулевыми компонентами согласно преобразованию Лоренца дает обычный закон Доплера (см. формулы (I.53) и (I.54))

$$\alpha_e = \alpha_f \gamma_{\parallel} (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f), \quad \alpha_f = \alpha_e \gamma_{\parallel} (1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_e). \quad (78)$$

Преобразование направлений происходит в соответствии с законом аберрации (формула (I.55))

$$\alpha_e \vec{n}_e = \alpha_f \vec{n}_f + \alpha_f \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel} \vec{e}_3 + (\gamma_{\parallel} - 1) \alpha_f \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \vec{n}_f), \quad (79)$$

$$\alpha_f \vec{n}_f = \alpha_e \vec{n}_e - \alpha_e \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel} \vec{e}_3 + (\gamma_{\parallel} - 1) \alpha_e \vec{e}_3 (\vec{e}_3 \vec{n}_e). \quad (80)$$

Проекция на направление вектора \vec{e}_1 дает связь между синусами $\alpha_e \sin \theta_e = \alpha_f \sin \theta_f$, так что

$$\sin \theta_e = \frac{\sin \theta_f}{\gamma_{\parallel} (1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f)}, \quad \sin \theta_f = \frac{\sin \theta_e}{\gamma_{\parallel} (1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_e)}. \quad (81)$$

Соответствующие равенства для косинусов получаются из проекции соотношения (79) на орт \vec{e}_3 или из основного тригонометрического тождества:

$$\cos \theta_e = \frac{\cos \theta_f - \beta_{\parallel}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f}, \quad \cos \theta_f = \frac{\cos \theta_e + \beta_{\parallel}}{1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_e}. \quad (82)$$

Взаимно обратные формулы (81)–(82), как и преобразование (78) частот, отличаются знаками перед β_{\parallel} . Азимутальный угол ϕ во всех рассмотренных системах одинаков.

Прямым дифференцированием любого из двух соотношений (82) проверяется, что величины: $\alpha^2 \sin \theta d\theta$, $\alpha^2 \sin \theta d\theta d\phi = \alpha^2 d^2 n$, $d\alpha/\alpha$ и $d^3 \alpha/\alpha$, — являются релятивистскими инвариантами. Выполняются равенства $\alpha_e \sin \theta_e = \alpha_f \sin \theta_f$ и $\alpha_e d\theta_e = \alpha_f d\theta_f$, а также $\sqrt{1 - \beta_{\parallel} \operatorname{tg} \frac{\theta_e}{2}} = \sqrt{1 + \beta_{\parallel} \operatorname{tg} \frac{\theta_f}{2}}$.

6. *Спектр в системах поля.* В этом пункте получим формулы, описывающие спектр магнито-тормозного излучения в случае, когда электрон движется по спирали, т. е. в одной из систем поля. Для

этого обобщим формулу (67). Проще всего обобщается выражение для аргумента бесселевых функций:

$$z = l\beta_{\perp}\gamma_{\parallel}\frac{\sin\theta_f}{\gamma_{\parallel}(1-\beta_{\parallel}\cos\theta_f)} = l\frac{\beta_f\sin\alpha\sin\theta_f}{1-\beta_f\cos\alpha\cos\theta_f} = l\frac{\beta_s}{\beta_c}, \quad (83)$$

где использованы обозначения (45). Не сложнее обобщается и выражение (68): $\beta_{\parallel} = \beta_f\cos\alpha$, $\beta_{\perp} = \beta_f\sin\alpha$,

$$w_l = \gamma_{\parallel}^2 \left[\left(\frac{\cos\theta_f - \beta_{\parallel}}{\sin\theta_f} \right)^2 J_l^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_l'^2(z) \right]. \quad (84)$$

С произведенными обобщениями можно записать выражение для четырехмерного импульса, который несут фотоны в линии с номером l в элементе телесного угла d^2n_f за период времени T_f :

$$d^2\underline{P}_l^f = \frac{e^2c}{\omega_e^2} l^2 \alpha_e^2 d^2n_f \underline{\alpha}_e w_l. \quad (85)$$

Выражение явно релятивистски ковариантно. Вместе с тем при переходе в лабораторную систему оно связывается с величиной W_l , определяемой формулой (67):

$$d^2\underline{P}_l^e = \frac{e^2c}{\omega_e^2} l^2 \alpha_e^2 d^2n_e \underline{\alpha}_e w_l = \frac{e^2c}{\omega_e^2} l^2 \frac{\omega_e^3}{c^3} d^2n_e \{1, \vec{n}_e\} w_l = \frac{\omega_e}{c} W_l \{1, \vec{n}_e\} d^2n_e. \quad (86)$$

Появление лишних множителей ω_e и c объясняется тем, что W_l — это не импульс, а энергия, причем рассчитанная на единицу частоты.

Общую формулу (85) также можно записать в виде, аналогичном (86):

$$d^2\underline{P}_l^f = \frac{W_l^f}{c} \frac{\omega_f}{1-\beta_{\parallel}\cos\theta_f} \{1, \vec{n}_f\} d^2n_f, \quad (87)$$

где обобщение формулы (67)

$$W_l^f = \frac{e^2}{c} l^2 \frac{w_l}{\gamma_{\parallel}^2(1-\beta_{\parallel}\cos\theta_f)^2}. \quad (88)$$

Дополнительные множители в (87) объясняются тем же: W_l^f — это излучаемая энергия, рассчитанная на единицу излучаемой частоты (выделено расстояние между соседними линиями), а \underline{P}_l^f — это

импульс за период T_f . Этот импульс, а не энергия W_l^f , является ковариантной величиной.

Подчеркнем, что ω_e и ω_f — это частоты обращения электрона в лабораторной системе и системе поля, а $\vec{\alpha}_e$ и $\vec{\alpha}_f$ — волновые векторы излучаемых фотонов в тех же системах отсчета. В первой из них выполняется соотношение $\alpha_e = \omega_e/c$, во второй же связь указанных величин более сложная, так как $\omega_f = \omega_e/\gamma_{\parallel}$, а волновые векторы связаны равенством (78). Поэтому частоты линий спектра излучения заряда, движущегося по окружности, одинаковы во всех направлениях и равны $\omega_l^e = l\omega_e$. Заряд, движущийся по спирали, излучает спектр, частоты которого зависят от направления на наблюдателя:

$$\omega_l^f = lc\alpha_f = l \frac{c\alpha_e}{\gamma_{\parallel}\beta_c} = l \frac{\omega_f}{\beta_c} = l \frac{\omega_*}{\gamma_f\beta_c}. \quad (89)$$

Существенное отличие излучения при винтовом движении заряда от случая его плоского движения заключается также в следующем. Формула (85) определяет излучение за период. Однако период полного оборота заряда $T_f = 2\pi/\omega_f$ и наименьший период (при $l = 1$), с которым приходят волны к наблюдателю в заданном направлении $2\pi/(c\alpha_f) = T_f\beta_c$, различаются. Второй из них при одинаковых знаках $\cos \alpha$ и $\cos \theta_f$ меньше первого, так что наблюдатель в единицу времени будет воспринимать большее количество энергии, чем излучает заряд. Никакого парадокса здесь нет, так как заряд, движущийся навстречу наблюдателю, сам как бы догоняет свое же излучение и спрессовывает его. Напротив, для наблюдателя, от которого заряд удаляется, излучение будет ослаблено, так что в среднем закон сохранения энергии, конечно, выполняется. Подробное объяснение всех этих эффектов содержится в книге В. Л. Гинзбурга [7].

Заметим, что для ультррелятивистского заряда при не малых питч-углах α множитель $\beta_c = \sin^2 \alpha$, так что частоты излучения, идущего в конусе наибольшей интенсивности, $\omega_l^f = l \frac{\omega_f}{\sin^2 \alpha}$, а частота прихода импульсов к наблюдателю в этом направлении больше частоты обращения заряда вокруг оси $\omega_f/2\pi$ в $1/\sin^2 \alpha$ раз.

Полное излучение движущегося по спирали электрона (во всех направлениях) в системах поля находится интегрированием выражения (87) с переходом от переменной θ_f к θ_e по приведенным выше формулам. При этом интегралы по азимуту, который одинаков во всех системах поля, от компонент вектора \vec{n}_f в плоскости, перпен-

дикулярной полю, равны нулю, а временная компонента и параллельная полю от азимута не зависят, так что $\underline{P}_l = \int d^2 \underline{P}_l^f =$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \frac{e^2}{c^2} \omega_f l^2 \int_0^\pi \sin \theta_f d\theta_f \frac{\{1, 0, 0, \cos \theta_f\}}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f)^3} \left[\left(\frac{\cos \theta_f - \beta_{\parallel}}{\sin \theta_f} \right)^2 J_l^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_l'^2(z) \right] = \\
&= 2\pi \frac{e^2}{c^2} \omega_f l^2 \int_0^\pi \sin \theta_e d\theta_e \{1 + \beta_{\parallel} \cos \theta_e, 0, 0, \cos \theta_e + \beta_{\parallel}\} \times \\
&\quad \times [\operatorname{ctg}^2 \theta_e J_l^2(z) + \beta_e^2 J_l'^2(z)] = \frac{\omega_e}{c} \{\gamma_{\parallel}, 0, 0, \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel}\} \overline{W}_l. \quad (90)
\end{aligned}$$

Полученное выражение представляет собой произведение скалярных множителей на четырехмерный безразмерный вектор скорости заряда вдоль поля, что соответствует излучению зарядом энергии и импульса в линии. Если просуммировать по номеру линии (формулы (Б.124) и (Б.125)), то получится полный импульс, излучаемый зарядом за период:

$$\begin{aligned}
\underline{P} &= \sum_{l=1}^{\infty} \underline{P}_l = 2\pi \frac{e^2}{c^2} \omega_f \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \int_0^\pi \sin \theta_f d\theta_f \frac{\{1, 0, 0, \cos \theta_f\}}{(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta_f)^3} \times \\
&\times \left[\left(\frac{\cos \theta_f - \beta_{\parallel}}{\sin \theta_f} \right)^2 J_l^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_l'^2(z) \right] = \frac{\omega_e}{c} \{\gamma_{\parallel}, 0, 0, \gamma_{\parallel} \beta_{\parallel}\} \sum_{l=1}^{\infty} \overline{W}_l. \quad (91)
\end{aligned}$$

7. *Мощность излучения в системах поля.* Умножение временной компоненты вектора импульса (91) на $c\omega_f/2\pi$, т. е. расчет энергии на единицу времени, превращает эту компоненту в скаляр, а именно, в разложение в спектр мощности излучения заряда I , величина которой определяется формулой (25):

$$I = \frac{e^2}{c} \omega_f^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \int_0^\pi \frac{\sin \theta_f d\theta_f}{\beta_c^3} \left[\left(\frac{\cos \theta_f - \beta_{\parallel}}{\sin \theta_f} \right)^2 J_l^2(z) + \beta_{\perp}^2 J_l'^2(z) \right], \quad (92)$$

где z задается формулой (83). Эта операция равносильна делению на период обращения заряда, причем зависимость периода прихода фотонов к наблюдателю от направления на него не учитывается, так как получаемая мощность относится именно к заряду, что аналогично рассуждению при получении выражения (139) в Главе I.

Покажем прямым вычислением справедливость этого разложения, т. е. равенство его (25).

В результате перехода к лабораторной системе отсчета или из временной компоненты (91) после подстановки формулы (74) получается

$$I = \frac{\omega_e^2}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} \overline{W}_l = 2 \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \sum_{l=1}^{\infty} \left[\beta_e J'_{2l}(2l\beta_e) - \frac{l}{\gamma_e^2} \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \right]. \quad (93)$$

Использование сумм $\mathcal{J}_{1,1}$ и $\mathcal{J}_{2,0}$, выведенных в Приложении Б (формулы (Б.117) и (Б.119)), приводит к равенству

$$I = \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \left[\beta_e^2 \gamma_e^4 - \frac{\beta_e^2}{\gamma_e^2} \int_0^1 \frac{1 + \beta_e^2 y^2}{(1 - \beta_e^2 y^2)^4} y^2 dy \right] = \frac{e^2}{c} \omega_e^2 \left[\beta_e^2 \gamma_e^4 - \frac{1}{\gamma_e^2} (2I_{4,0}(\beta_e) - 3I_{3,0}(\beta_e) + I_{2,0}(\beta_e)) \right], \quad (94)$$

где интегралы с двумя индексами определены в Приложении В. С помощью рекуррентных соотношений для этих интегралов получается окончательное выражение — второе в (25).

В книге [51] формулы (92) и (93) получены путем вычисления преобразований Лапласа от напряженностей без перехода в волновую зону.

§ 4. Спектр синхротронного излучения

1. *Направленное излучение в линиях.* Для вывода формул, описывающих спектр синхротронного излучения, понадобятся сведения о бесселевых функциях, приведенные в Приложении Б. Применим выведенные там асимптотики к спектру синхротронного излучения. Сначала рассмотрим движение заряда по окружности. Считается, что $\beta_e \sim 1$, $\gamma_e \gg 1$. Излучение сосредоточено в узком конусе около плоскости вращения, поэтому целесообразно вместо угла θ_e использовать угол $\varepsilon = \pi/2 - \theta_e$, $-\pi/2 \leq \varepsilon \leq \pi/2$. Тогда основное излучение идет при малых значениях $|\varepsilon| = |\varepsilon_0|/\gamma_e \ll 1$.

По аргументу бесселевых функций $z = l\beta_e \sin \theta_e = l\beta_e \cos \varepsilon$ находим

$$u = \sqrt{1 - z^2/l^2} = \sqrt{1 - \beta_e^2 + \beta_e^2 \sin^2 \varepsilon} \sim \sqrt{1/\gamma_e^2 + \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}{\gamma_e} \ll 1. \quad (95)$$

Для малых u величина $v = v_+ \sim u^3/3 = (1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/(3\gamma_e^3)$. Следовательно, при больших l (здесь $y = l(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/(3\gamma_e^3)$)

$$J_l(z) \sim \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}{\sqrt{3\pi}\gamma_e} K_{1/3}(y), \quad J'_l(z) \sim \frac{1 + \varepsilon_0^2}{\sqrt{3\pi}\gamma_e^2} K_{2/3}(y), \quad (96)$$

и ($\text{ctg } \theta_e = \text{tg } \varepsilon \sim \varepsilon$)

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} l^2 \frac{1 + \varepsilon_0^2}{3\pi^2 \gamma_e^4} \left[\varepsilon_0^2 K_{1/3}^2(y) + (1 + \varepsilon_0^2) K_{2/3}^2(y) \right]. \quad (97)$$

Рассмотрим предельные случаи. Обе величины l и γ_e большие.

1) $l \ll 3\gamma_e^3$, $y \ll 1$. В этом случае второе слагаемое в квадратных скобках в (97) больше первого, так как у него больше отрицательная степень малой величины. Согласно формуле (Б.48) для функции $K_\nu(z)$

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} 3^{1/3} 2^{-2/3} \Gamma^2(2/3) \frac{l^{2/3}}{1 + \varepsilon_0^2}. \quad (98)$$

При таких l интенсивность не зависит от γ_e и растет пропорционально $l^{2/3}$.

2) $l \sim 3\gamma_e^3$, $y \sim 1$. Функции Макдональда порядка 1, а W_l пропорциональна $l^2/\gamma_e^4 \sim 9\gamma_e^2$.

3) $l \gg 3\gamma_e^3$, $y \gg 1$. При таких номерах линий обе функции Макдональда убывают экспоненциально, так же убывает и W_l :

$$W_l \sim \frac{e^2}{c} \frac{1}{2\pi} \frac{l}{\gamma_e} \frac{1 + 2\varepsilon_0^2}{(1 + \varepsilon_0^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{2}{3}(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2} \frac{l}{\gamma_e^3}\right). \quad (99)$$

При формальной подстановке в формулу (97) значения $\beta_e = 1$, которое соответствует невозможной скорости заряда, равной скорости света (тогда $\gamma_e = \infty$), рост этой функции продолжается неограниченно по формуле (98). При реальных скоростях, близких к скорости света, интенсивность линий быстро возрастает с номером l , как и при $\beta_e = 1$, до значений порядка γ_e^2 , образуя широкий максимум на номерах $l \sim 3\gamma_e^3$, а затем экспоненциально убывает.

Введем функцию

$$F(y, \varepsilon_0) = 9 \frac{y^2}{1 + \varepsilon_0^2} [\varepsilon_0^2 K_{1/3}^2(y) + (1 + \varepsilon_0^2) K_{2/3}^2(y)], \quad y = l \frac{(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}}{3\gamma_e^2}. \quad (100)$$

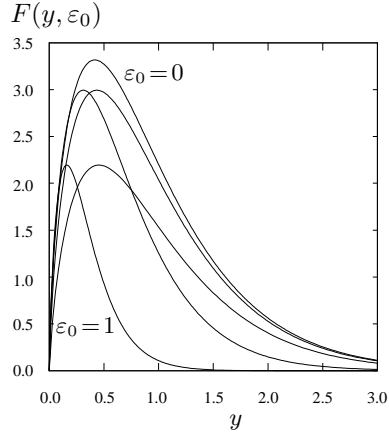


Рис. 7. Графики функции $F(y, \varepsilon_0)$ в зависимости от y и от x при $\varepsilon_0 = 0, 1/2$ и 1 .

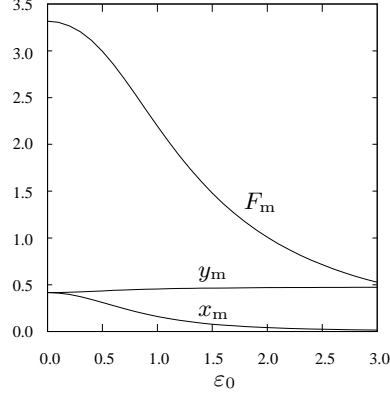


Рис. 8. Точки максимумов и максимальные значения функции $F(y, \varepsilon_0)$ в зависимости от ε_0 .

Через эту функцию величина (97) выражается так:

$$W_l = \frac{e^2}{c} \frac{\gamma_e^2}{3\pi^2} F(y, \varepsilon_0). \quad (101)$$

Множитель γ_e^2 выделен для того, чтобы все максимумы функции $F(y, \varepsilon_0)$ были одного порядка. На рис. 7 изображены графики этой функции в зависимости от y и от $x = y/(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}$ для трех значений ε_0 . Кривые, характеризующие зависимость от x , располагаются левее и быстрее сходятся к нулю (при $\varepsilon_0 = 0$ кривые для y и для x совпадают). С ростом ε_0 кривые понижаются. Величины максимумов $F_m(\varepsilon_0) = F(y_m, \varepsilon_0)$, а также их положения y_m и x_m отражает рис. 8. С ростом ε_0 точки максимумов y_m незначительно возрастают (от 0.4169 при $\varepsilon_0 = 0$ до 0.4761 при $\varepsilon_0 = \infty$). Максимумы убывают от 3.3166 при $\varepsilon_0 = 0$, а при больших ε_0 их значения $F(y_m, \varepsilon_0) \sim 5.4791/\varepsilon_0^2$. Точки максимумов по x с ε_0 быстро убывают: $x_m = y_m/(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}$.

Таким образом, спектр синхротронного излучения имеет совершенно другой характер, чем спектр циклотронного. Синхротронное излучение распространяется в узком конусе вблизи плоскости, в которой вращается заряд. С ростом γ_e угол, в котором идет максимальное количество излучения, сужается, интенсивность спектра

увеличивается. Излучение идет в линиях с большими номерами $l \sim 3\gamma_e^3$ и, следовательно, на высоких частотах порядка $l\omega_*/\gamma_e \sim 3\gamma_e^2\omega_*$. При этом расстояние между линиями равно $\omega_e = \omega_*/\gamma_e$, так что линии располагаются все теснее. Так как вследствие излучения линии имеют конечную ширину (что мы не учитываем), то спектр синхротронного излучения фактически является непрерывным, близким по виду к тому, что изображено на рис. 7.

Гироциклотронное излучение является промежуточным между циклотронным и синхротронным, т. е. с ростом β_e неуклонно возрастает направленность излучения, убывание интенсивностей линий с номером в области сильного излучения постепенно сменяется возрастанием, а затем максимум перемещается в сторону все больших номеров.

2. *Полное излучение в линиях.* Проинтегрированная по направлениям интенсивность линий (74) при больших номерах имеет те же свойства, что и направленная. Здесь во внеинтегральном слагаемом $u = \sqrt{1 - \beta_e^2} = 1/\gamma_e \ll 1$, $v \sim u^3/3 = 1/3\gamma_e^3$ и согласно асимптотике (Б.76)

$$\beta_e J'_{2l}(2l\beta_e) \sim \frac{1}{\pi\sqrt{3}\gamma_e^2} K_{2/3}(x), \quad x = \frac{2l}{3\gamma_e^3}. \quad (102)$$

Интеграл оценивается несколько сложнее. В нем сделаем замену

$$u' = \sqrt{1 - \beta_e^2 y^2}, \quad v' = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + u'}{1 - u'} - u', \quad (103)$$

$$dv' = \frac{u'^2 du'}{1 - u'^2} = -\beta_e^2 \frac{u' y dy}{1 - u'^2} = -\frac{\beta_e u' dy}{\sqrt{1 - u'^2}}, \quad dy = -\frac{\sqrt{1 - u'^2}}{u'} \frac{dv'}{\beta_e}. \quad (104)$$

Тогда после подстановки асимптотической формулы (Б.73)

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \sim \frac{1}{\pi\beta_e} \int_{1/3\gamma_e^3}^{\infty} \sqrt{\frac{v'}{u'}} K_{1/3}(2lv') \frac{\sqrt{1 - u'^2}}{u'} dv'. \quad (105)$$

После еще одной замены переменной интегрирования $x' = 2lv'$ интеграл примет вид

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \sim \frac{1}{2l\pi} \int_x^{\infty} \sqrt{\frac{v'}{u'^3} (1 - u'^2)} K_{1/3}(x') dx', \quad (106)$$

Ввиду экспоненциального убывания функции Макдональда при больших аргументах основной вклад в интеграл вносят значения x , имеющие порядок 1 и меньше. Поэтому существенны значения $v' = x/2l \ll 1$. В этой области $u' \ll 1$ и $v' \sim u'^3/3$, так что

$$\int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) dy \sim \frac{1}{2l\pi\sqrt{3}} \int_x^\infty K_{1/3}(x') dx'. \quad (107)$$

Подставив оценки двух слагаемых в формулу (74), получим

$$\overline{W}_l \sim \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{e^2}{c} \frac{l}{\gamma_e^2} \left[K_{2/3}(x) - \frac{1}{2} \int_x^\infty K_{1/3}(x') dx' \right]. \quad (108)$$

Наконец, воспользуемся рекуррентным соотношением для функций Макдональда (Б.42), из которого следует, что

$$\int_x^\infty K_{1/3}(x') dx' = 2K_{2/3}(x) - \int_x^\infty K_{5/3}(x') dx', \quad (109)$$

и получим окончательное выражение

$$\overline{W}_l \sim \frac{e^2}{c} \sqrt{3} \gamma_e f_W(x), \quad x = \frac{2l}{3\gamma_e^3}, \quad (110)$$

где использовано обозначение для функции, отражающей зависимость интенсивности излучения от номера линии и лоренцевского множителя:

$$f_W(x) = x \int_x^\infty K_{5/3}(x') dx'. \quad (111)$$

Интеграл от этой функции

$$\int_0^\infty f_W(x) dx = \frac{8\pi}{9\sqrt{3}}. \quad (112)$$

Часто используется также функция, интеграл от которой равен 1:

$$f_W^*(x) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} f_W(x).$$

При достаточно малых x функция разлагается в степенной ряд

$$f_W(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} x \left[\left(\frac{x}{2}\right)^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n! \Gamma(n-2/3)(n-1/3)} - \left(\frac{x}{2}\right)^{8/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n! \Gamma(n+8/3)(n+4/3)} - 1 \right] \sim \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{2^{5/3}}{\Gamma(1/3)} x^{1/3}. \quad (113)$$

Она круто возрастает, достигая максимума 0.91801 при $x = 0.28581$. Напротив, при больших x справедливо асимптотическое разложение

$$f_W(x) \sim \sqrt{\frac{x\pi}{2}} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n x^n} \sum_{m=0}^n \frac{\prod_{k=0}^{m-1} \left[\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{9} \right]}{m!(2m-1)!!}, \quad (114)$$

из которого видно ее экспоненциальное убывание. Все это отражается на рис. 9.

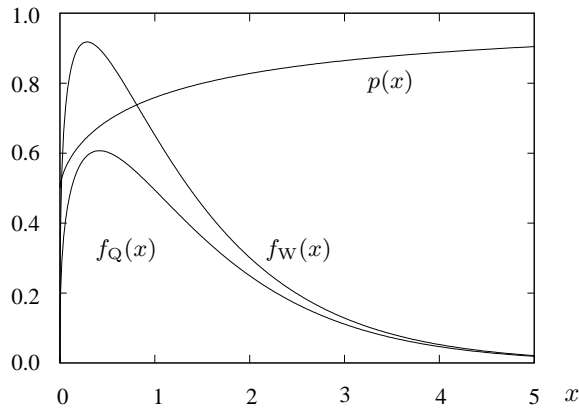


Рис. 9. Графики функций $f_W(x)$, $f_Q(x)$ и $p(x)$.

Оценим, насколько быстро устанавливается предельный режим полного излучения. Для этого сравним точки l_m и наибольшие значения функций $\overline{W}_m = \overline{W}_{l_m}(\beta_e)/(4\pi e^2/c)$, графики которых приведены на рис. 5, дополнив их соответствующими еще несколькими значениям β_e , с предельными: $l_m^{\lim} = 3\gamma_e^3 \cdot 0.28581$ и $\overline{W}_m^{\lim} = \overline{W}_{l_m}(\beta_e)/(4\pi e^2/c) = \sqrt{3}\gamma_e \cdot 0.91801$. Результат сравнения приведен в таблице, из которой видно, что уже при $\gamma_e = 7$ максимумы близки к предельным. Эта близость наступала бы еще раньше, если бы находились не наибольшие значения точной функции, т. е. не в целых числах номеров линий l , а, как и у предельной функции, точки максимумов, когда l считается непрерывной переменной.

Таблица. Точки и значения максимумов полного излучения

β_e	γ_e	l_m	l_m^{\lim}	\overline{W}_m	\overline{W}_m^{\lim}
0.80	1.67	2	1.98	0.175	0.211
0.85	1.90	3	2.93	0.209	0.240
0.90	2.29	5	5.18	0.264	0.290
0.925	2.63	8	7.82	0.311	0.333
0.94	2.93	11	10.80	0.351	0.371
0.95	3.20	14	14.08	0.387	0.405
0.96	3.57	19	19.53	0.436	0.452
0.965	3.81	24	23.78	0.467	0.482
0.97	4.11	30	29.84	0.506	0.520
0.975	4.50	39	39.08	0.557	0.569
0.98	5.03	54	54.40	0.624	0.636
0.99	7.09	152	152.72	0.889	0.897

Несложно найти среднюю степень безразмерной частоты этого распределения, воспользовавшись интегралом 2.16.2.2. справочника [45]:

$$\int_0^{\infty} x^{\mu} K_{\nu}(x) dx = 2^{\mu-1} \Gamma\left(\frac{\mu+1+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1-\nu}{2}\right). \quad (115)$$

Функция Макдональда четна по индексу ν , тем же свойством обладает интеграл от нее. Переставив порядок интегрирований, получим

$$\begin{aligned} \overline{x^{\mu}} &= \int_0^{\infty} x^{\mu} f_{\text{W}}^*(x) dx = \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} \int_0^{\infty} K_{5/3}(x') dx' \frac{x'^{\mu+2}}{\mu+2} = \frac{9\sqrt{3}}{\pi} \frac{2^{\mu-2}}{\mu+2} \Gamma\left(\frac{3\mu+14}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu+4}{6}\right). \end{aligned} \quad (116)$$

Соответственно средняя частота $\overline{x} = 55\sqrt{3}/72 = 1.3231$, корень из среднего квадрата $\sqrt{\overline{x^2}} = 2\sqrt{7}/3 = 1.7638$, дисперсия $Dx = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 1.3605$, среднеквадратичное отклонение от средней частоты $\sqrt{Dx} = 1.1664$. Все средние в несколько раз больше точки максимума, который достигается очень быстро.

Точно так же выводится выражение для параметра Стокса в линии. При этом поскольку первые два слагаемых в скобках в формуле (75) для \overline{Q}_l совпадают со стоящими в выражении (74) для

\overline{W}_l , то оценить остается последний интеграл. При оценке интеграла можно считать, что $y = \sqrt{1 - u'^2}/\beta_e \sim 1$, а $1 - y =$

$$= \frac{\beta_e - \sqrt{1 - u'^2}}{\beta_e} = \frac{\beta_e^2 - 1 + u'^2}{\beta_e (\beta_e + \sqrt{1 - u'^2})} \sim \frac{u'^2 - 1/\gamma_e^2}{2} \sim \frac{1}{2} \left[\left(\frac{3}{2l} x' \right)^{2/3} - \frac{1}{\gamma_e^2} \right]. \quad (117)$$

Таким образом, интеграл распадается на два, причем первый вычисляется (формулы 6.561.12 и 16 справочника [9]):

$$\begin{aligned} 2l \int_0^1 J_{2l}(2l\beta_e y) \frac{1-y}{y} dy &\sim \frac{2l}{4l\pi\sqrt{3}} \int_x^\infty K_{1/3}(x') dx' \left[\left(\frac{3}{2l} x' \right)^{2/3} - \frac{1}{\gamma_e^2} \right] = \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{3}\gamma_e^2} \left[K_{2/3}(x) - \int_x^\infty K_{1/3}(x') dx' \right]. \end{aligned} \quad (118)$$

В результате интегралы сокращаются и остается только функция Макдональда:

$$\overline{Q}_l = -\frac{e^2}{c} \frac{2l}{\gamma_e^2 \sqrt{3}} K_{2/3}(x) = -\frac{e^2}{c} \sqrt{3} \gamma_e f_Q(x), \quad f_Q(x) = x K_{2/3}(x). \quad (119)$$

Интеграл от функции $f_Q(x)$ по всем x равен $2\pi/3\sqrt{3}$, в $4/3$ раза меньше, чем от f_W . График функции $f_Q(x)$ также представлен на том же рис. 9. Там же помещено отношение двух функций, представляющее степень линейной поляризации синхротронного излучения в потоке: $p(x) = f_Q(x)/f_W(x)$. В частности, $p(0) = 0.5, p(\infty) = 1$.

3. Излучение в линиях в системе поля. Асимптотические формулы для этого случая пишутся аналогично написанным выше. Здесь ограничимся собственно синхротронным излучением, когдаpitch-угол (угол между направлением скорости электрона и магнитным полем) α не мал.

Для вывода асимптотического представления излучения в линиях при $\gamma_f \gg 1$ будем исходить из выражения для полной мощности (92). Не переходя в лабораторную систему, положим $\theta_f = \alpha + \varepsilon_0/\gamma_f$. Затем воспользуемся асимптотиками (50) и (51), а также асимптотиками бесселевой функции (Б.73) и ее производной (Б.76).

При $\beta_f \sim 1$, $\gamma_f \gg 1$ аргумент функций Бесселя $z = l \frac{\beta_s}{\beta_c}$, так что согласно формуле (Б.56) $u = \sqrt{1 - z^2/l^2} =$

$$= \sqrt{1 - \beta_s^2/\beta_c^2} = \frac{\sqrt{\beta_c^2 - \beta_s^2}}{\beta_c} \sim \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2} \sin \alpha}{\gamma_f \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon_0^2}}{\gamma_f \sin \alpha}. \quad (120)$$

Эта величина мала, поэтому $v_+ \sim u^3/3 \sim (1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/3\gamma_f^3 \sin^3 \alpha$.

Поскольку основное излучение идет в коническом слое около конуса с углом раствора α , интеграл по углу можно заменить на интеграл по ε_0 , распространив его на всю вещественную ось. Принимая во внимание, что $(\cos \theta_f - \beta_{||})/\sin \theta_f \sim -\varepsilon_0/\gamma_f$, а $\beta_{\perp} \sim \sin \alpha$, находим

$$I \sim \frac{e^2}{c} \omega_f^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha d\varepsilon_0}{\gamma_f \sin^6 \alpha} \frac{1}{3\pi^2} \frac{1 + \varepsilon_0^2}{\sin^2 \alpha} \frac{1}{\gamma_f^4} \left[\varepsilon_0^2 K_{1/3}^2(y) + (1 + \varepsilon_0^2) K_{2/3}^2(y) \right]. \quad (121)$$

Аргументом функций Макдональда служит произведение lv_+ . Его мы перепишем так, чтобы он содержал излучаемую частоту, определяемую формулой (89). Дело в том, что наблюдатель измеряет интенсивность на определенной частоте и ему нет дела до того, какому номеру линии она соответствует. Кроме того, на различных направлениях скорости заряда, вообще говоря, одной и той же частоте соответствуют различные номера линий. Поэтому закрепим именно частоту излучения.

В асимптотической ($\gamma_f \gg 1$) области при немалых питч-углах частоты не зависят от направления излучения, но зависят от питч-угла, под которым идет и все излучение, так как согласно формулам (89) и (50)

$$\omega = \omega_l \sim l \frac{\omega_f}{\sin^2 \alpha}, \quad l = \frac{\omega_l}{\omega_f} \sin^2 \alpha. \quad (122)$$

Тогда аргумент функций Макдональда

$$y = lv_+ \sim l \frac{(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}}{3\gamma_f^3 \sin^3 \alpha} = \frac{x}{2} (1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}, \quad x = \frac{\omega_l}{\omega_c}, \quad (123)$$

где

$$\omega_c = \frac{3}{2} \gamma_f^2 \omega_* \sin \alpha = \frac{3}{2} \gamma_f^2 \frac{e\mathcal{H}_*}{mc} \sin \alpha = \frac{3}{2} \gamma_f^2 \frac{e\mathcal{H}_{\perp}}{mc}. \quad (124)$$

Через $\mathcal{H}_\perp = \mathcal{H}_* \sin \alpha$ обозначена проекция напряженности внешнего магнитного поля на плоскость, перпендикулярную скорости электрона. Часто используется не круговая, а обычная частота, тогда $\omega_l/\omega_c = \nu_l/\nu_c$, где $\nu_c = \omega_c/2\pi$.

Как видно из формулы (121), для дальнейшего вычисления требуются два интеграла ($y = x(1 + \varepsilon_0^2)^{3/2}/2$)

$$\mathcal{A}_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_0 \varepsilon_0^2 (1 + \varepsilon_0^2) K_{1/3}^2(y) = \frac{\pi}{\sqrt{3}x} \left[\int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx' - K_{2/3}(x) \right], \quad (125)$$

$$\mathcal{A}_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon_0 (1 + \varepsilon_0^2)^2 K_{2/3}^2(y) = \frac{\pi}{\sqrt{3}x} \left[\int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx' + K_{2/3}(x) \right]. \quad (126)$$

Доказательство этих формул приведено в конце Приложения Б. Воспользовавшись ими, найдем

$$I \sim \frac{e^2}{c} \omega_f^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^2 \frac{1}{\gamma_f^5 \sin^7 \alpha} \frac{2\pi}{\sqrt{3}x} \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx'. \quad (127)$$

Нижний предел полученного интеграла связан с переменной суммирования:

$$x = \frac{2}{3} \frac{l}{\gamma_f^3 \sin^3 \alpha}, \quad l = \frac{3}{2} \gamma_f^3 \sin^3 \alpha x. \quad (128)$$

Вследствие большой величины множителя $\gamma_f^3 \sin^3 \alpha$ изменению l на единицу ($dl = 1$) отвечает очень малое изменение x , поэтому можно суммирование заменить интегрированием и положить

$$dl = 1 = \frac{3}{2} \gamma_f^3 \sin^3 \alpha dx. \quad (129)$$

Тогда выражение (127) будет содержать уже встречавшуюся функцию и вычисляется:

$$\begin{aligned} I &\sim \frac{e^2}{c} \frac{\omega_f^2}{3\pi^2} \frac{1}{\gamma_f^5 \sin^7 \alpha} \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^{\infty} \frac{9}{4} \gamma_f^6 \sin^6 \alpha x^2 \frac{3}{2} \gamma_f^3 \sin^3 \alpha dx \frac{1}{x} \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx' = \\ &= \frac{e^2}{c} \frac{\omega_f^2}{\pi} \frac{3\sqrt{3}}{4} \gamma_f^4 \sin^2 \alpha \int_0^{\infty} f_W(x) dx = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c} \omega_f^2 \gamma_f^4 \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (130)$$

Здесь мы воспользовались интегралом (112). Результат совпадает с точным выражением (25) с учетом того, что $\beta_f \sim 1$.

Полученное выражение для полной мощности излучения позволяет найти спектральную мощность излучения, т. е. энергию, излучаемую зарядом с энергией $mc^2\gamma$ на единичном интервале частоты ω в единицу времени. Для этого перейдем в интеграле (130) от переменной интегрирования x к частоте $\omega = x\omega_c$, $dx = d\omega/\omega_c$. Тогда подынтегральная функция и будет равна искомой величине:

$$\mathcal{E}(\omega, \gamma_f) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{c} \omega_* \sin \alpha f_W(x). \quad (131)$$

Конечно, из (131) можно было бы получить и выражение для случая движения заряда по окружности, но мы предпочли использовать для этого случая другой, более непосредственный способ вывода.

Поскольку почти все излучение заряда идет в направлении движения заряда, точнее в узком конусном слое около конуса с углом раствора, равным питч-углу α , излучение такого заряда будет видеть только наблюдатель, направление на которого составляет с магнитным полем именно этот угол.

Мы здесь рассматривали случай, когда питч-угол не мал. Если же это не так и $\alpha = \alpha_0/\gamma_f$, то частота излучения $\omega_l^f = 2l \frac{\omega_*}{\beta_c^0} \gamma_f$ велика. При этом величины $u = \sqrt{1 - \beta_s^2/\beta_c^2} = \sqrt{1 - (\beta_s^0/\beta_c^0)^2}$ и v конечны. Заметим, что частота остается конечной и при $\alpha_0 = 0$, однако интенсивности линий оказываются равными нулю.

4. *Усреднение по распределению энергий электронов.* Обычно считается, что распределение электронов по скоростям в системе отсчета источника, о которой говорилось в § 1, изотропно и зависит только от модуля скорости (либо импульса) или, что то же самое, от энергии. Принято также считать, что в релятивистских астрофизических объектах, таких как джеты активных ядер галактик, рентгеновские источники и др., распределение по энергиям не максвелловское, а степенное, т. е. (здесь p — число, а не импульс)

$$\mathcal{N}_e(\gamma) = \mathcal{C}(p)\gamma^{-p}, \quad \gamma_m \leq \gamma \leq \gamma_M. \quad (132)$$

Принимается, что даже нижняя граница не мала, обычно $\gamma_m \geq 10$. Коэффициент $\mathcal{C}(p)$ определяется условием нормировки распределения:

$$\mathcal{C}(p) \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \gamma^{-p} d\gamma = 1, \quad \mathcal{C}(p) = \frac{1-p}{\gamma_M^{1-p} - \gamma_m^{1-p}}. \quad (133)$$

Для $p = 1$ необходимо произвести предельный переход.

Наблюдатель фактически воспринимает излучение только тех электронов из ансамбля, которые движутся в его сторону в узком конусе, о чем говорилось в предыдущем пункте. Можно считать, что питч-угол излучающих электронов совпадает с углом между направлением на наблюдателя и магнитным полем. С другой стороны, в указанном конусе идет практически вся излучаемая энергия и она попадает в прибор, разрешение которого, как правило, меньше толщины конусного слоя. Поэтому в качестве энергии, излучаемой ансамблем электронов, можно принять величину (131), усредненную по распределению электронов (132):

$$\bar{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{c} \omega_* \sin \alpha \mathcal{C}(p) \mathcal{I}_W(p), \quad \mathcal{I}_W(p) = \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \gamma^{-p} d\gamma f_W(x). \quad (134)$$

Вычислим входящий в формулу (134) интеграл. Сначала подставим в него выражение (111) для функции $f_W(x)$ и сделаем замену переменной интегрирования $x = \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{2\omega}{3\omega_\perp} \gamma^{-2}$, $\gamma = \sqrt{\frac{2\omega}{3\omega_\perp}} x^{-1/2}$, где обозначено $\omega_\perp = \omega_* \sin \alpha$. Получится

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_W(p) &= \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \gamma^{-p} d\gamma x \int_x^\infty K_{5/3}(x') dx' = \\ &= \frac{1}{2} \int_{2\omega/(3\omega_\perp \gamma_M^2)}^{2\omega/(3\omega_\perp \gamma_m^2)} \left(\frac{3\omega_\perp}{2\omega} \right)^{(p-1)/2} x^{p/2} x^{-3/2} dx x \int_x^\infty K_{5/3}(x') dx'. \end{aligned} \quad (135)$$

Для простоты заменим нижний предел внешнего интеграла на 0, а верхний на ∞ . Поскольку получающийся интеграл сходится, добавление к нему интегралов по небольшим кусочкам $[0, 2\omega/(3\omega_\perp \gamma_M^2)]$ и $[2\omega/(3\omega_\perp \gamma_m^2), \infty)$ не должно существенно отразиться на его величине.

Переставим в (135) порядок интегрирования и вычислим внутренний степенной интеграл:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_W(p) &= \frac{1}{2} \left(\frac{3\omega_{\perp}}{2\omega} \right)^{(p-1)/2} \int_0^{\infty} x^{p/2} x^{-3/2} dx \int_x^{\infty} K_{5/3}(x') dx' = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{3\omega_{\perp}}{2\omega} \right)^{(p-1)/2} \int_0^{\infty} K_{5/3}(x') dx' \int_0^{x'} x^{(p-1)/2} dx = \\
&= \frac{1}{p+1} \left(\frac{3\omega_{\perp}}{2\omega} \right)^{(p-1)/2} \int_0^{\infty} x^{(p+1)/2} K_{5/3}(x) dx. \quad (136)
\end{aligned}$$

Воспользовавшись интегралом (115), из последнего выражения в (136) получим оцениваемый интеграл при $p > 1/3$

$$\mathcal{I}_W(p) = \frac{1}{p+1} \left(\frac{3\omega_{\perp}}{\omega} \right)^{(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right) \quad (137)$$

и окончательное выражение для излучаемой энергии

$$\bar{\mathcal{E}}(\omega) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{e^2}{c} \omega_{\perp} \frac{\mathcal{C}(p)}{p+1} \left(\frac{3\omega_{\perp}}{\omega} \right)^{(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right). \quad (138)$$

5. *Усреднение по направлениям поля.* Полученное выражение представляет собой энергию, излучаемую ансамблем электронов в направлении на наблюдателя, составляющем угол α с направлением напряженности магнитного поля, которое считается фиксированным. Однако, как правило, приборы не разрешают отдельных частей излучающих областей как в картинной плоскости, так и по лучу зрения. В прибор попадает излучение различных участков таких областей. Направление поля в их пределах может меняться произвольным и не известным нам образом. Поэтому часто принимают предположение, что поле хаотично, т. е. его направления равномерно распределены по единичной сфере. Тогда полученное выражение для излучаемой энергии надо усреднить по углам α . При этом возникает сходящийся при $p > -5$ интеграл

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^{(p+3)/2} \alpha d\alpha = \int_0^1 y^{(p+3)/2} (1-y^2)^{-1/2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+7}{4}\right)}. \quad (139)$$

Несмотря на то, что усредняемая формула несправедлива при малых питч-углах, результат усреднения верен, так как вклад области таких углов незначителен.

После усреднения (138) по направлениям поля с учетом интеграла (139) находим

$$\bar{\mathcal{E}}(\omega) = \mathcal{A}(p) \frac{e^2 \omega_*}{c 2\pi} \left(\frac{\omega_*}{\omega}\right)^{(p-1)/2}, \quad (140)$$

где зависящая от показателя p постоянная

$$\mathcal{A}(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 3^{p/2} \frac{\mathcal{C}(p)}{p+1} \Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+7}{4}\right)}. \quad (141)$$

Коэффициент $\mathcal{A}(p)$ стремится к бесконечности при $p \rightarrow 1/3$, но при $p \geq 1$ его часть, не зависящая от границ распределения (132), т. е. от нормировочного коэффициента $\mathcal{C}(p)$, как видно из рис. 10, изменяется не сильно (смысл других кривых разъясняется ниже).

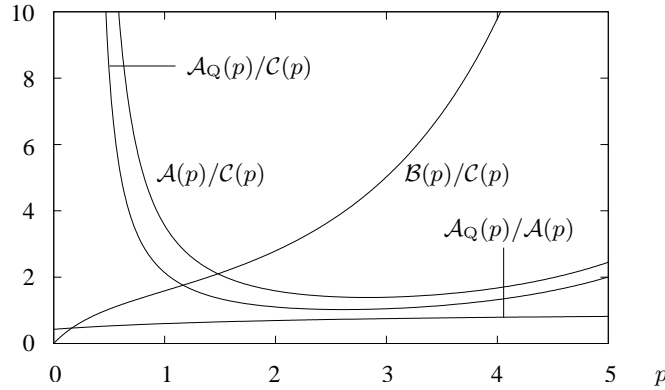


Рис. 10. Значения отношений $\frac{\mathcal{A}(p)}{\mathcal{C}(p)}$, $\frac{\mathcal{B}(p)}{\mathcal{C}(p)}$, $\frac{\mathcal{A}_Q(p)}{\mathcal{C}(p)}$ и $\frac{\mathcal{A}_Q(p)}{\mathcal{A}(p)}$.

Именно выражение (140) обычно используется при интерпретации наблюдений. По наклону наблюдаемого спектра сразу определяется показатель распределения электронов по энергиям.

6. *О переносе магнито-тормозного излучения.* Во многих астрофизических объектах с магнитным полем излучающие обла-

сти невелики и можно считать, что испущенное электронами излучение свободно выходит из этой области. Однако, это неверно в отношении, например, атмосфер белых карликов и нейтронных звезд, излучающие области которых оптически толсты.

При этом в случае циклотронного излучения такой перенос происходит в отдельных линиях. Синхротронное же излучение фактически распространяется как непрерывное. Даже если оптическая толщина синхротронной области небольшая, все же на некоторых частотах возможно ослабление излучения за счет его поглощения. В таких случаях следует применять теорию переноса излучения. Поэтому в этом пункте приведем выражения для коэффициентов излучения и поглощения синхротронного механизма, применяемых в теории переноса излучения.

Проще найти выражение для коэффициента излучения или излучательной способности единицы объема. Начнем с излучения моноэнергетических электронов в мононаправленном поле. В теории переноса используется частота $\nu = \omega/2\pi$. Мощность излучения, рассчитанная на один ультрарелятивистский электрон с энергией $mc^2\gamma$ при изотропном их распределении, на единицу частоты ν и единичный телесный угол, равна

$$\mathcal{E}_*(\nu, \gamma) = \frac{\mathcal{E}(\omega, \gamma) d\omega}{4\pi d\nu} = \frac{\mathcal{E}(\omega, \gamma)}{2}. \quad (142)$$

Усреднение этой величины по распределению энергий электронов в расчете на единичный объем дает искомый коэффициент излучения

$$\varepsilon_\nu = n_e \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} \mathcal{E}_*(\nu, \gamma) \mathcal{N}_e(\gamma) d\gamma = n_e \frac{\bar{\mathcal{E}}(\omega)}{2}. \quad (143)$$

Наконец, усреднение по направлениям поля приводит к формуле

$$\bar{\varepsilon}_\nu = n_e \frac{\bar{\mathcal{E}}(\omega)}{2} = n_e \mathcal{A}(p) \frac{e^2}{2c} \omega_* \left(\frac{\omega_*}{\omega} \right)^{(p-1)/2}. \quad (144)$$

Несколько сложнее вывести выражения для коэффициента поглощения. Дело в том, что распределение электронов не равновесное максвелловское, а неравновесное степенное, которое приводит к нетепловому синхротронному излучению. Поэтому здесь требуются более тонкие рассуждения.

Следуя авторам книги [23], введем эйнштейновские коэффициенты спонтанных $A_{\gamma \rightarrow \gamma - h\nu/mc^2}$ и вынужденных $B_{\gamma \rightarrow \gamma - h\nu/mc^2}$ переходов с излучением и переходов с поглощением $B_{\gamma - h\nu/mc^2 \rightarrow \gamma}$. Так как переходы в нашем случае происходят в континууме, все три коэффициента рассчитываются на единицу времени и единицу частоты ν . Первый из этих коэффициентов очевидным образом выражается через мощность излучения (131):

$$A_{\gamma \rightarrow \gamma - h\nu/mc^2} = 2\pi \frac{\mathcal{E}(\omega, \gamma)}{h\nu} = 4\pi \frac{\mathcal{E}_*(\nu, \gamma)}{h\nu}. \quad (145)$$

Как и в случае атомных переходов, три коэффициента не являются независимыми. Соотношения между ними устанавливаются при предположении термодинамического равновесия, при котором выполняется условие детального баланса: сколько фотонов в единице объема излучается, столько же и поглощается, т. е.

$$\begin{aligned} f_M(\gamma)[A_{\gamma \rightarrow \gamma - h\nu/mc^2} + B_{\gamma \rightarrow \gamma - h\nu/mc^2} B_\nu(T)] = \\ = f_M(\gamma - h\nu/mc^2) B_{\gamma - h\nu/mc^2 \rightarrow \gamma} B_\nu(T). \end{aligned} \quad (146)$$

Здесь $B_\nu(T)$ — функция Планка, а $f_M(\gamma)$ — релятивистское максвелловское распределение электронов по энергиям (II.96). Здесь воспользуемся его свойством, которое имеется и у классического, нерелятивистского распределения (закон сохранения энергии):

$$\frac{f_M(\gamma)}{f_M(\gamma - h\nu/mc^2)} = e^{h\nu/k_B T}, \quad (147)$$

С учетом этого свойства находим два соотношения между коэффициентами переходов:

$$B_{\gamma - h\nu/mc^2 \rightarrow \gamma} = B_{\gamma \rightarrow \gamma - h\nu/mc^2} = \frac{c^2}{2h\nu^3} A_{\gamma \rightarrow \gamma - h\nu/mc^2}. \quad (148)$$

Теперь возвратимся к синхротронному излучению. Количество поглощений из пучка излучения интенсивности I_ν , рассчитанное на один электрон с фиксированной энергией $mc^2\gamma$ и исправленное за вынужденное излучение, равно

$$k_\nu(\gamma) \frac{I_\nu}{h\nu} = [\mathcal{N}_e(\gamma - h\nu/mc^2) B_{\gamma - h\nu/mc^2 \rightarrow \gamma} - \mathcal{N}_e(\gamma) B_{\gamma \rightarrow \gamma - h\nu/mc^2}] \frac{I_\nu}{\mathcal{N}_e(\gamma)}. \quad (149)$$

Поскольку энергия излучаемого фотона во много раз меньше энергии покоя электрона, а энергия электронов существенно больше энергии покоя, то можно применить формулу Тейлора с производной первого порядка:

$$k_\nu(\gamma) = -\frac{(h\nu)^2}{mc^2} B_{\gamma-h\nu/mc^2 \rightarrow \gamma} \frac{d \ln(\mathcal{N}_e(\gamma))}{d\gamma} = \frac{(h\nu)^2}{mc^2} \frac{c^2}{2h\nu^3} A_{\gamma \rightarrow \gamma-h\nu/mc^2} \frac{p}{\gamma}. \quad (150)$$

Отсюда находим связь между сечением поглощения и спектральной мощностью излучения:

$$k_\nu(\gamma) = \frac{2\pi}{m\nu^2} \frac{p}{\gamma} \mathcal{E}_*(\nu, \gamma). \quad (151)$$

Усреднение по степенному распределению энергий электронов дает

$$k_\nu = n_e \int_{\gamma_m}^{\gamma_M} k_\nu(\gamma) \mathcal{N}_e(\gamma) d\gamma = n_e \frac{e^2}{c} \frac{\omega_*}{m\nu^2} \sqrt{3} \sin \alpha p \mathcal{I}_W(p+1). \quad (152)$$

И в этом случае возможно распространение интеграла на всю вещественную ось, так как он сходится при $p > -2/3$. Таким образом, усредненный по распределению электронов коэффициент поглощения

$$k_\nu = n_e \frac{e^2}{c} \frac{\omega_*}{m\nu^2} \sqrt{3} \sin \alpha \frac{p}{p+2} \left(\frac{3\omega_\perp}{\omega} \right)^{p/2} \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right). \quad (153)$$

Наконец, усредняя по направлениям магнитного поля, находим

$$\bar{k}_\nu = n_e \frac{e^2}{c} \frac{\omega_*}{m\nu^2} \left(\frac{\omega_*}{\omega} \right)^{p/2} \mathcal{B}(p), \quad (154)$$

где зависящая от спектрального индекса распределения электронов константа

$$\mathcal{B}(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 3^{(p+1)/2} \frac{p\mathcal{C}(p)}{p+2} \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{p+6}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+8}{4}\right)}. \quad (155)$$

График зависимости отношения $\mathcal{B}(p)/\mathcal{C}(p)$ от p представлен на рис. 10.

7. *Поляризация в системах поля.* В отношении параметра линейной поляризации можно проделать те же преобразования, что и с параметром интенсивности. Например, совершенно аналогичен вывод формул для них в системе поля. Сравнение формул для интенсивности (110) и (131) позволяет, исходя из равенства (119), без дополнительных выкладок написать выражение для параметра в системе поля:

$$\mathcal{Q}(\omega, \gamma_f) = -\frac{\sqrt{3} e^2}{2\pi c} \omega_* \sin \alpha f_Q(x). \quad (156)$$

Усреднение по распределению электронов дает

$$\overline{\mathcal{Q}}(\omega) = -\frac{\sqrt{3} e^2}{2\pi c} \omega_\perp \frac{\mathcal{C}(p)}{4} \left(\frac{3\omega_\perp}{\omega}\right)^{(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{3p+7}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right). \quad (157)$$

Усреднение по направлениям поля приводит точно к такому же интегралу, что и для интенсивности. В результате находим

$$\overline{\overline{\mathcal{Q}}}(\omega) = -\mathcal{A}_Q(p) \frac{\sqrt{3} e^2}{2\pi c} \omega_* \left(\frac{\omega_*}{\omega}\right)^{(p-1)/2}, \quad (158)$$

где численный коэффициент

$$\mathcal{A}_Q(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} 3^{p/2} \frac{\mathcal{C}(p)}{4} \Gamma\left(\frac{3p+7}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{p+5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+7}{4}\right)}. \quad (159)$$

Таким образом, частотная зависимость параметра линейной поляризации точно та же, что и у параметра интенсивности. Их отношение, представляющее степень линейной поляризации, зависит только от индекса p :

$$\frac{\mathcal{A}_Q(p)}{\mathcal{A}(p)} = \frac{p+1}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3p+7}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)} = \frac{p+1}{p+7/3}. \quad (160)$$

Графики коэффициента $A_Q(p)/C(p)$ и степени поляризации также представлены на рисунке. Интересно отметить, что степень поляризации, выражаемая такой простой формулой, имеет смысл и при тех значениях индекса p , при которых сами параметры Стокса неопределены, так как сингулярные множители у них одинаковы и сокращаются. Степень поляризации при этом изменяется в пределах от $3/7$ при $p = 0$ до 1 при $p \rightarrow \infty$.

Заметим, что \overline{Q}_l — проинтегрированный по направлениям параметр линейной поляризации в линии Q_l (формула (119)), своего рода “интегральная” поляризация, в полном (по всем направлениям) излучении. Так же следует воспринимать и параметр, усредненный по распределению энергий электронов (157) и по направлениям поля (158). Однако при таких усреднениях для синхротронного излучения, считается, что все излучение идет в направлении на наблюдателя, поэтому и “интегральная” поляризация характеризует это, полное излучение.

8. *Плазменный котел.* В заключение этой главы обсудим вопрос о степенном распределении электронов по энергиям. Его принятие в качестве наиболее приемлемого основывалось именно на наблюдениях спектров остатков сверхновых и в первую очередь Крабовидной туманности, а также джетов активных ядер галактик и некоторых других объектов.

В начале 1970-х годов С. А. Каплан и В. Н. Цитович [25] пришли к заключению, что у электронного газа, находящегося в плазме с магнитным полем и излучающего посредством синхротронного механизма, при подводе извне энергии, компенсирующей потери на излучение, и ускорении частиц на плазменной турбулентности устанавливается стационарное степенное распределение по энергиям. При этом показатели в спектрах излучения и энергии электронов согласуются между собой в соответствии с формулой (140). Вывод был сделан на основе порядковых оценок. Эта ситуация получила название “плазменный турбулентный котел”. Рассматривалось также влияние комптоновского рассеяния.

Впоследствии авторами [66] было получено численное решение стационарного уравнения типа Фоккера—Планка, определяющего распределение электронов с учетом всего спектра магнитотормозного излучения и поглощения (как синхротронного, так и циклотронного), комптоновских потерь, а также инжекции и вылета электронов из области. Расчеты показали, что степенной спектр

электронов в действительности не создается, а стационарным их спектром является максвелловское распределение с температурой, определяемой соотношением инжекции и потерь. На больших энергиях распределение электронов может отличаться от максвелловского, так как обычно область синхротронного излучения на соответствующих энергиях фотонов оптически тонка и электроны не имеют возможности обмениваться энергией и тем самым термализоваться. Спектр их энергий тогда фактически определяется инжекцией. Влияние комптоновского рассеяния усложняет картину.

Обзор работ по этой проблеме содержится в статье [93].

Магнито-тормозной механизм и, в частности, синхротронное излучение играют очень большую роль в астрофизике, на что было обращено внимание И. С. Шкловским [55]. Изучению этого механизма было посвящено огромное число статей и ряд книг. Изложение в этом учебном пособии следует, в основном, книгам [28] и [7], а также обзору [67].

В сильном магнитном поле электроны движутся фактически почти вдоль силовых линий поля с небольшими отклонениями. При этом также возникает излучение, которое по-английски называется *curvature radiation*, а в русскоязычной научной литературе — изгибным или магнитодрейфовым.

Если же поле настолько сильно, что необходимо учитывать квантовые эффекты, то электрон нельзя считать свободным, его энергия квантуется (уровни Ландау), а излучение содержит резонансы на определенных частотах.

Глава IV. Черенковское и переходное излучение

§ 1. Движение заряда в диэлектрике и его наблюдение

1. *Заряд в диэлектрике.* Излучение Черенкова, т. е. свечение заряда, движущегося в диэлектрике, было открыто аспирантом С. И. Вавилова П. А. Черенковым в 1934 г. Почти сразу же И. Е. Таммом и И. М. Франком была построена теория этого свечения. В 1958 г. им троим (С. И. Вавилов умер) была присуждена Нобелевская премия по физике, так как эффект получил широкое применение в счетчиках фотонов. Это излучение возникает, в частности, при попадании частицы высокой энергии в земную атмосферу.

Частицы космических лучей, в основном, протоны с энергиями порядка $10^{12} \div 10^{18}$ эВ и больше, влетая в атмосферу Земли, порождают так называемые широкие атмосферные ливни, состоящие из различных элементарных частиц, в частности, заряженных. Некоторую долю космических лучей составляют фотоны, их энергии меньше: $10^{11} \div 10^{13}$ эВ. Фотоны рождают пары заряженных частиц. Заряженные частицы распространяются в атмосфере с почти световой скоростью, которая превосходит скорость света в слоях атмосферы, что и вызывает свечение. Происхождение космических частиц связывают с различными космическими явлениями: взрывами сверхновых, джетами активных ядер галактик, гамма-всплесками. Для наблюдений ливней сооружаются установки с возможно более точным определением направления, из которого шла первоначальная частица, и типа этой частицы.

Как известно, равномерно движущийся заряд не излучает. Однако, если скорость заряда в диэлектрике превышает скорость света в этом диэлектрике, то излучение возникает — это получающийся в результате сложения электромагнитных волн кумулятивный эффект. Аналогичный эффект происходит в виде килевой волны от корабля, идущего быстрее скорости распространения волн в воде, или ударной волны в воздухе от самолета, летящего быстрее скорости звука. Здесь дается краткое описание механизма свечения Черенкова.

Пусть показатель преломления диэлектрика $n = \sqrt{\varepsilon} > 1$. Будем считать, что диэлектрик однороден, т. е. $\varepsilon = n^2 = \text{const}$. Тогда скорость света в такой среде $c_1 = c/n < c$. Пусть электрон (заряд $-e$)

движется с постоянной скоростью v , такой, что $c_1 < v < c$. Тогда плотности его заряда и тока будут

$$\rho(\vec{r}, t) = -e \delta(\vec{r} - \vec{v}t), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}. \quad (1)$$

Примем для простоты, что скорость электрона направлена вдоль оси z , т. е. $\vec{v} = v(0, 0, 1)$. Потерями энергии на излучение пренебрегаем, т. е. считаем, что они пренебрежимо малы. Найдем излучение такого заряда. Начнем с потенциалов.

2. *Потенциалы.* Потенциалы определяются обычными неоднородными волновыми уравнениями

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \varphi &= \frac{4\pi}{\varepsilon} \rho, \\ \left(\frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку \vec{v} и n постоянны, то достаточно найти скалярный потенциал, ибо прямой подстановкой легко проверить, что

$$\vec{A} = \frac{n^2}{c} \varphi \vec{v}. \quad (3)$$

Осевая симметрия задачи позволяет находить потенциалы в одной плоскости, например, в плоскости xz . Возьмем точку наблюдения $\vec{r} = (x, 0, z)$, причем можно ограничиться рассмотрением $x > 0$ и $z > 0$. Запаздывающий потенциал дается формулой

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} \int \rho(\vec{r}_1, t_1) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}. \quad (4)$$

При этом, как обычно, должно выполняться соотношение

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = c_1 (t - t_1), \quad (5)$$

выражающее тот факт, что влияние заряда на точку наблюдения распространяется с конечной скоростью c_1 , следовательно в момент времени t на точку \vec{r} окажет влияние состояние плотности заряда в точке \vec{r}_1 в момент времени $t_1 < t$.

Для точечного заряда общая формула (4) переписется в виде

$$\varphi(\vec{r}, t) = -\frac{e}{n^2} \int \delta(\vec{r}_1 - \vec{v}t_1) \frac{d^3 r_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|}, \quad (6)$$

а соотношение (5) между временами t и t_1 также конкретизируется и перейдет в

$$|\vec{r} - \vec{v}t_1| = c_1(t - t_1). \quad (7)$$

Мы получим выражения для потенциалов излучения Черенкова неформальным способом, отказавшись от точечности заряда. Пусть его протяженность при единичном поперечном сечении равна a . Вклад в интеграл (4) дают точки $\vec{r}_1 = \vec{v}t_1$, в которых в момент t_1 находится наш заряд. При закрепленных t и \vec{r} в каждый момент t_1 уравнение (5) описывает сферу радиусом $c_1(t - t_1)$ — сферу влияния. Чем дальше $t_1 < t$ от t , тем больше радиус сферы, с возрастанием t_1 радиус уменьшается и при $t_1 = t$ сфера стягивается в точку. Таким образом, схема рассуждений та же, что и при выводе формул для обычных потенциалов точечного заряда (потенциалы Лиенара—Вихерта, см. § 3 Главы I). Однако имеются существенные отличия, поэтому рассмотрим подробно кинематику процесса.

3. *Моменты влияния.* Введем обозначения

$$\vec{X} = \vec{r} - \vec{v}t, \quad \vec{X}_1 = \vec{r} - \vec{v}t_1 = \vec{X} + \vec{v}(t - t_1). \quad (8)$$

Тогда (7) можно переписать так

$$|\vec{X}_1| = |\vec{X} + \vec{v}(t - t_1)| = c_1(t - t_1). \quad (9)$$

Возведя (9) в квадрат и разрешив результат относительно $t - t_1$, получим

$$t - t_1^\pm = \frac{-(\vec{X} \vec{v}) \pm Y}{v^2 - c_1^2}, \quad (10)$$

где

$$Y^2 = (\vec{X} \vec{v})^2 - (v^2 - c_1^2)X^2. \quad (11)$$

При $v < c_1$ величина Y всегда вещественна, так как (11) есть сумма двух неотрицательных слагаемых. В этом случае момент влияния только один t_1^+ , а излучения у равномерно движущегося заряда, как уже говорилось, нет.

Для нас представляет интерес случай $v > c_1$, тогда Y вещественно не при всех t . Найдем, при каких t эта величина вещественна. Ясно, что должно быть $\vec{X} \vec{v} < 0$, так как иначе за счет вневекторного слагаемого будет $t - t_1 < 0$, а требуется, чтобы было $t - t_1 > 0$, ибо причина должна предшествовать следствию.

4. *Конус Черенкова.* Положим $\vec{X} \vec{v} = X v \cos \alpha$. Тогда условие вещественности Y запишется так:

$$Y^2 = X^2 v^2 \cos^2 \alpha - (v^2 - c_1^2) X^2 = X^2 v^2 (c_1^2/v^2 - \sin^2 \alpha) \geq 0. \quad (12)$$

Отсюда следует, что условие выполняется при $\sin^2 \alpha \leq c_1^2/v^2$ или

$$\sin \alpha \leq c_1/v = \sin \alpha_0. \quad (13)$$

Так как угол α тупой, то он должен удовлетворять условию

$$\pi \geq \alpha \geq \pi - \alpha_0. \quad (14)$$

Граничное значение угла между векторами \vec{X} и \vec{v} определяется острым углом α_0 , причем

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = c_1/\sqrt{v^2 - c_1^2}, \quad \alpha_0 = \arcsin \frac{c_1}{v}. \quad (15)$$

Конус (14) называется конусом Черенкова. Все излучение заряда находится внутри этого конуса.

Приняв во внимание, что

$$\vec{X} = (x, 0, z - vt), \quad (16)$$

найдем

$$\cos \alpha = \frac{z - vt}{\sqrt{x^2 + (z - vt)^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (z - vt)^2}}. \quad (17)$$

Так как косинус отрицателен, то $vt > z$ — заряд ушел дальше точки наблюдения. Подставив выражение для синуса из (17) в неравенство (13), получим

$$c_1 (vt - z) \geq \sqrt{v^2 - c_1^2} x \quad (18)$$

и как следствие оценку снизу времени наблюдения излучения:

$$t \geq t^* = \frac{z}{v} + \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{v c_1} x. \quad (19)$$

Как видно из (10), имеется два момента влияния заряда на точку наблюдения. Они обозначены t_1^\pm , причем знаки берутся в

соответствии со знаками перед корнем в (10), так что $t - t_1^+ > t - t_1^-$, $t_1^+ < t_1^-$.

Для нахождения выражений для потенциалов нужно знать проекции скорости заряда на направление на наблюдателя, т. е. направление излучения в моменты влияния.

5. *Проекция скорости на направление излучения.* Обозначим величины этих проекций через

$$v_x^\pm = \vec{v} \frac{\vec{X}_1^\pm}{X_1^\pm}, \quad \vec{X}_1^\pm = \vec{X} - \vec{v} \frac{\vec{X} \vec{v} \mp Y}{v^2 - c_1^2}, \quad (20)$$

а также введем вспомогательные величины (y — не координата)

$$y = \frac{vt - z}{x}, \quad q = \frac{v}{c_1}, \quad f = \sqrt{y^2 - (q^2 - 1)}. \quad (21)$$

В этих обозначениях использованные нами ранее величины выражаются следующим образом:

$$\vec{v} \vec{X} = -xyv, \quad Y = c_1 x f, \quad t - t_1^\pm = \frac{x}{c_1} \frac{qy \pm f}{q^2 - 1}, \quad (22)$$

$$\vec{v} \vec{X}_1^\pm = \frac{xv}{q^2 - 1} (y \pm qf). \quad (23)$$

Кроме того, из (16) и (9) получаем

$$X^2 = x^2 (1 + y^2), \quad \frac{1}{X_1^\pm} = \frac{1}{c_1 (t - t_1^\pm)} = \frac{qy \mp f}{x (y^2 + 1)}. \quad (24)$$

Из (18) вытекает, что $y \geq \sqrt{q^2 - 1}$. Принимая во внимание выписанные соотношения, находим

$$v_x^\pm = \frac{xv}{q^2 - 1} (y \pm qf) \frac{qy \mp f}{x (y^2 + 1)} = v \frac{q \pm yf}{y^2 + 1}. \quad (25)$$

Для определения знака проекций скорости v_x^\pm достаточно выражения (23), однако проще исходить из выражения (25). Проекция v_x^+ при всех t больше c_1 . Проекция же во второй момент пересечения обращается в нуль при $y = q$, при $y < q$ она положительна, при $y > q$ — отрицательна. Величина y при фиксированных z и x напрямую связана со временем наблюдения.

Таким образом, картина прохождения заряда через сферу влияния такова. До $t < t^*$, соответствующего $y = y^* = \sqrt{q^2 - 1}$, излучения нет. Когда t достигает значения t^* , заряд в единый момент $t_1^+ = t_1^-$ лишь касается сферы влияния. В этот момент $v_x^\pm = c_1$. Если момент наблюдения $t > t^*$ проекция $v_x^+ > c_1$, т. е. в момент первого пересечения заряд всегда догоняет сферу влияния. После этого заряд некоторое время находится внутри сферы. В момент второго пересечения при $\sqrt{q^2 - 1} < y < q$, т. е. при $t^* < t < t_0 = z/v + x/c_1$ проекция скорости заключена в пределах $c_1 > v_x^- > 0$, так что сфера догоняет заряд. При $t > t_0$ проекция $v_x^- < 0$. Это означает, что заряд и сфера движутся навстречу друг другу. Моменту $t = t_c = (z + x y_c)/v$, где

$$y_c = \frac{q^2 + 1}{\sqrt{q^2 - 1}}, \quad t_c = \frac{z}{v} + \frac{x}{v} \frac{v^2 + c_1^2}{\sqrt{v^2 - c_1^2}} > t_0 > t^*, \quad (26)$$

отвечает достижение проекцией v_x^- величины $-c_1$. Наконец, из (25) следует, что при $t \rightarrow +\infty$, тогда и $y \rightarrow +\infty$, проекции v_x^\pm стремятся соответственно к $\pm v$.

6. *Примеры.* Для наглядности приведем конкретные примеры, иллюстрирующие описанную схему.

Пример 1. Примем, что скорость света в веществе $c_1 = 1$, а скорость заряда $v = \frac{5}{4} > c_1$, так что $v^2 - c_1^2 = \frac{9}{16}$, $\sqrt{v^2 - c_1^2} = \frac{3}{4}$. Пусть наблюдатель находится в точке с координатами $\vec{r} = \left(\frac{3}{5}\sqrt{14}, \frac{469}{40}\right)$ и наблюдает в момент $t = 11$, а заряд движется по оси аппликат так, что его радиус-вектор в зависимости от времени влияния $\vec{r}_1 = \vec{v}t_1 = \frac{5}{4}(0, 1)t_1$. Составим два вектора

$$\vec{X} = \vec{r} - \vec{v}t = \left(\frac{3\sqrt{14}}{5}, -\frac{81}{40}\right), \quad \vec{X}_1 = \vec{X} + \vec{v}(t - t_1) = \left(\frac{3\sqrt{14}}{5}, -\frac{81}{40}\right) + \frac{5}{4}(0, 1)(t - t_1). \quad (27)$$

Для определения моментов влияния надо решить уравнение

$$|\vec{r} - \vec{r}_1| = c_1(t - t_1) \quad \text{или} \quad |\vec{X}_1| = |\vec{X} + \vec{v}(t - t_1)| = c_1(t - t_1), \quad (28)$$

С принятыми нами значениями уравнение приобретает вид

$$\left| \left(\frac{3}{5}\sqrt{14}, -\frac{81}{40}\right) + \frac{5}{4}(0, 1)(t - t_1) \right| = t - t_1. \quad (29)$$

Возведя в квадрат, получим квадратное уравнение и два его решения:

$$(t - t_1)^2 - 9(t - t_1) + \frac{65}{4} = 0, \quad t - t_1 = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{65}{4}} = \frac{9}{2} \pm 2, \quad (30)$$

т. е. $t - t_1^+ = \frac{13}{2}$ и $t - t_1^- = \frac{5}{2}$, а $t_1^+ = \frac{9}{2}$ и $t_1^- = \frac{17}{2}$. Соответствующие векторы

$$\vec{X}_1^+ = \left(\frac{3}{5}\sqrt{14}, \frac{61}{10} \right), \quad \frac{\vec{X}_1^+}{|\vec{X}_1^+|} = \frac{\vec{X}_1^+}{c_1(t - t_1^+)} = \left(\frac{6}{65}\sqrt{14}, \frac{61}{65} \right), \quad (31)$$

$$\vec{X}_1^- = \left(\frac{3}{5}\sqrt{14}, \frac{11}{25} \right), \quad \frac{\vec{X}_1^-}{|\vec{X}_1^-|} = \frac{\vec{X}_1^-}{c_1(t - t_1^-)} = \left(\frac{6}{25}\sqrt{14}, \frac{11}{25} \right). \quad (32)$$

Проекции скорости заряда на эти векторы

$$\vec{v}_x^+ = \frac{61}{65} \frac{5}{4} = \frac{65}{52} = 1.173 > c_1 = 1, \quad \vec{v}_x^- = \frac{11}{25} \frac{5}{4} = \frac{11}{20} = 0.55 < c_1 = 1. \quad (33)$$

Таким образом, в первый момент влияния заряд догоняет сферу влияния, затем он остается внутри сжимающейся сферы, пока сфера не догонит заряд, так как ее скорость по направлению к наблюдателю становится больше.

Эта ситуация изображена на рис. 1а, где путь заряда по оси аппликат представлен пунктирной линией, концентрические сферы вокруг положения наблюдателя — это сферы влияния. Последовательные положения заряда (точки) и сфер разделяются равными промежутками времени. Показаны два момента влияния с векторами \vec{X}_1^\pm , нарисованными жирным пунктиром. При втором пересечении зарядом сферы влияния он выходит из нее, так как проекция его скорости на радиальное направление меньше скорости света c_1 .

Пример 2. Поместим наблюдателя в точку с измененным значением абсциссы: $\vec{r} = \left(\frac{9}{20}\sqrt{11}, -\frac{469}{40} \right)$. Остальные параметры оставим неизменными. Повторим все проделанные выше вычисления.

Новые векторы отличаются от (27) лишь значениями абсциссы:

$$\vec{X} = \vec{r} - \vec{v}t = \left(\frac{9\sqrt{11}}{20}, -\frac{81}{40} \right), \quad \vec{X}_1 = \vec{X} + \vec{v}(t - t_1) = \left(\frac{9\sqrt{11}}{20}, -\frac{81}{40} \right) + \frac{5}{4}(0, 1)(t - t_1). \quad (34)$$

Соответственно и уравнение для определения моментов влияния отличается от (29) лишь одним слагаемым, а его решения:

$$(t - t_1)^2 - 9(t - t_1) + \frac{45}{4} = 0, \quad t - t_1^+ = \frac{15}{2}, \quad t - t_1^- = \frac{3}{2}. \quad (35)$$

Моменты влияния в этом случае $t_1^+ = \frac{7}{2}$ и $t_1^- = \frac{19}{2}$.

Векторы направления на наблюдателя в моменты влияния

$$\vec{X}_1^+ = \left(\frac{9}{20}\sqrt{11}, \frac{147}{20} \right), \quad \frac{\vec{X}_1^+}{|\vec{X}_1^+|} = \frac{\vec{X}_1^+}{c_1(t - t_1^+)} = \left(\frac{9}{150}\sqrt{11}, \frac{147}{150} \right), \quad (36)$$

$$\vec{X}_1^- = \left(\frac{9}{20}\sqrt{11}, -\frac{3}{20} \right), \quad \frac{\vec{X}_1^-}{|\vec{X}_1^-|} = \frac{\vec{X}_1^-}{c_1(t - t_1^-)} = \left(\frac{3}{10}\sqrt{11}, -\frac{1}{10} \right). \quad (37)$$

Проекции скорости заряда на эти векторы

$$\vec{v}_x^+ = \frac{147}{20} \frac{5}{4} = \frac{147}{120} = 1.225 > c_1 = 1, \quad \vec{v}_x^- = -\frac{1}{10} \frac{5}{4} = -\frac{1}{8} = -0.125. \quad (38)$$

В этом случае после первого пересечения зарядом сферы он находится внутри нее, но при второй встрече заряд и сфера движутся навстречу друг другу. И это положение отражено на рис. 1б.

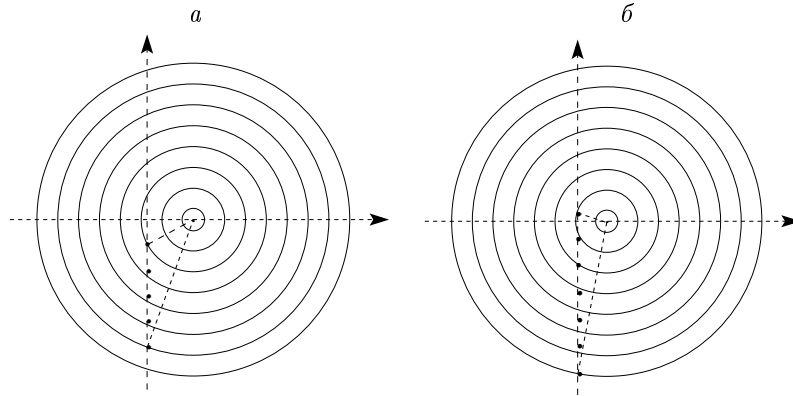


Рис. 1. Пересечение зарядом сфер влияния.

§ 2. Потенциалы заряда в диэлектрике

1. *Нахождение потенциалов.* Поскольку скорость заряда больше скорости уменьшения радиуса сферы влияния, заряд нагоняет ее. Сначала он пересекает сферу извне, а затем изнутри. Пересечение изнутри может происходить, как мы видели двумя способами.

Можно считать, что вначале заряд движется прямо на наблюдателя со скоростью $v_0 = v_x > 0$. Вследствие движения заряда сфера влияния будет чувствовать его на протяжении расстояния, не равного a . Обозначим это расстояние b . За одно и то же время сфера пройдет расстояние b , а догоняющий ее заряд — расстояние $a + b$, так что

$$\frac{a + b}{v_0} = \frac{b}{c_1}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{v_0/c_1 - 1}. \quad (39)$$

Когда заряд и сфера влияния движутся навстречу друг другу, скорость заряда $v_0 = -v_x^+ > 0$ — это проекция вектора его скорости на направление не на наблюдателя, а от него. В этом случае

$$\frac{a - b}{v_0} = \frac{b}{c_1}, \quad \frac{b}{a} = \frac{1}{v_0/c_1 + 1}. \quad (40)$$

Такое же соотношение получается и в том случае, если сфера догоняет заряд, так что различие прохождения заряда через сферу при втором пересечении не влияет на окончательный результат.

Замечая, что полученные отношения не зависят от размера заряда, т. е. справедливы и для точечного заряда, мы можем вычислить интеграл, входящий в (6), вынеся за знак интеграла множители при δ -функциях и воспользовавшись (39) и (40):

$$\varphi = \frac{e}{n^2} \left[\frac{1}{X_1^+} \frac{1}{v_x^+/c_1 - 1} + \frac{1}{X_1^-} \frac{1}{-v_x^-/c_1 + 1} \right]. \quad (41)$$

Подставив сюда выражения для X_1^\pm и v_x^\pm из (24) и (25), а также приняв во внимание определения (21), получим окончательно

$$\varphi = \frac{2 e c_1}{n^2} \frac{1}{Y}, \quad \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c} n^2 \varphi. \quad (42)$$

2. *Производные от потенциалов.* Поскольку в выражения для напряженностей входят производные от потенциалов, найдем сначала эти производные.

Согласно формулам (42) потенциалы зависят от времени и координат только через величину Y , которая определяется формулами (11) и (8). Поэтому найдем производные от этой величины. Проще начать с ее квадрата, который можно записать в виде

$$Y^2 = c_1^2(z - vt)^2 - (v^2 - c_1^2)x^2. \quad (43)$$

Тогда

$$\vec{\nabla}Y^2 = 2(\vec{X}\vec{v})\vec{v} - 2(v^2 - c_1^2)\vec{X} = 2(-(v^2 - c_1^2)x, 0, c_1^2(z - vt)), \quad (44)$$

$$\frac{\partial Y^2}{\partial t} = -2(\vec{X}\vec{v})v^2 + 2(v^2 - c_1^2)\vec{X}\vec{v} = -\vec{v}(\vec{\nabla}Y^2) = -2c_1^2(z - vt)v. \quad (45)$$

Следовательно,

$$\vec{\nabla}\varphi = -\varphi \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{X}) + c_1^2\vec{X}}{Y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\vec{v}\vec{\nabla}\varphi. \quad (46)$$

Из связи векторного и скалярного потенциалов (3) получается

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\vec{v}}{c}n^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\vec{v}}{c}n^2(\vec{v}\vec{\nabla}\varphi), \quad \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c}n^2\vec{\nabla}\varphi, \quad (47)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{\vec{v}}{c}n^2 \times \vec{\nabla}\varphi = \frac{n^2}{c} \frac{\varphi}{Y^2}(v^2 - c_1^2)\vec{v} \times \vec{X}. \quad (48)$$

Легко проверить, что условие Лоренца соблюдается

$$\frac{n^2}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{A} = \frac{n^2}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{n^2}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (49)$$

Теперь у нас есть все для нахождения характеристик создаваемого зарядом поля.

§ 3. Излучение Черенкова и его спектр

1. *Поле и излучение.* По производным от потенциалов просто найти выражения для напряженностей поля. Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \frac{\varphi}{Y^2} [\vec{v}(\vec{X}\vec{v}) - (v^2 - c_1^2)\vec{X}] - \frac{n^2}{c^2} \vec{v}(c_1^2\vec{X}\vec{v}) = -\frac{\varphi}{Y^2}(v^2 - c_1^2)\vec{X}. \quad (50)$$

Вектор магнитной напряженности перпендикулярен вектору электрической:

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{n^2}{c} \vec{E} \times \vec{v}, \quad (51)$$

и оба они ортогональны вектору распространения излучения, т. е. вектору Пойнтинга

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H} = S\vec{l}. \quad (52)$$

Те же напряженности в координатах

$$\vec{E} = \frac{2ec_1}{n^2} \frac{v^2 - c_1^2}{Y^3} (x, 0, z - vt), \quad \vec{H} = \frac{2ev}{n} \frac{v^2 - c_1^2}{Y^3} (0, x, 0), \quad (53)$$

а вектор потока излучения

$$\vec{S} = \frac{e^2 c^2 v}{4\pi n^4} \frac{v^2 - c_1^2}{Y^6} x (z - vt, 0, -x). \quad (54)$$

Очевидно, что векторы

$$-\frac{\vec{X}}{X}, (0, 1, 0), \vec{l} = \frac{(z - vt, 0, -x)}{X} \quad (55)$$

образуют правую тройку ортов.

Как уже отмечалось, до момента $t = t^*$ излучение заряда в точке $\vec{r} = (x, 0, z)$ отсутствует. В момент $t = t^*$ величина Y и, значит, знаменатели у потенциалов и напряженностей обращаются в нули, так что сами эти величины бесконечны. После этого момента напряженности непрерывны и при больших t убывают, причем электрическая как $1/t^2$, а магнитная как $1/t^3$, так что вектор Пойнтинга убывает как $1/t^5$. Обращение поля в бесконечность является следствием того, что при выводе формул не учитывалась дисперсия, т. е. показатель преломления считался постоянным, не зависящим от частоты. Однако в момент пересечения точки наблюдения конусом Черенкова поля наибольшие, как гребень килевой волны быстрого корабля и звуковой волны сверхзвукового самолета.

Существенная зависимость от времени может быть охарактеризована относительной величиной $s(z_*, \alpha_0) = \frac{\sqrt{1 + z_*^2}}{(z_*^2 - \text{ctg}^2 \alpha_0)^3}$, через которую модуль вектора Пойнтинга выражается так:

$$S = |\vec{S}| = \frac{e^2 c^2 v}{4\pi n^4} \frac{v^2 - c_1^2}{Y^6} \frac{1}{x^3} s\left(\frac{z - vt}{x}, \alpha_0\right). \quad (56)$$

2. *Спектр черенковского излучения.* Для нахождения характеристик спектра необходимо найти преобразования Фурье от напряженностей. Начнем с потенциалов. Преобразование Фурье от величины, обратной Y , легко выражается через функцию Макдональда

$$\begin{aligned} \int_{t^*}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{dt}{Y} &= \frac{1}{c_1 v} e^{i\omega z/v} \int_1^{\infty} \exp\left(i\omega \sqrt{v^2 - c_1^2} \frac{xu}{vc_1}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \\ &= \frac{1}{vc_1} e^{i\omega z/v} K_0\left(-i\omega \sqrt{v^2 - c_1^2} \frac{x}{vc_1}\right). \end{aligned} \quad (57)$$

Однако, лучше не использовать это явное выражение, а оставить преобразование в виде интеграла, что позволит учесть дисперсию. Скалярный потенциал представляется интегралом

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{2ec_1}{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{c_1 v} e^{i\omega z/v} \int_1^{\infty} \exp\left(i\omega \sqrt{v^2 - c_1^2} \frac{xu}{vc_1}\right) \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}, \quad (58)$$

а векторный выражается через него по формуле (3).

Соответственно для напряженностей получаются такие же интегралы. Для электрической

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{2ec_1}{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{c_1 v} e^{i\omega z/v} \int_1^{\infty} \exp\left(i\omega \sqrt{v^2 - c_1^2} \frac{xu}{vc_1}\right) \frac{\vec{E}(\omega, u) du}{\sqrt{u^2 - 1}} \quad (59)$$

и аналогичный для магнитной напряженности с весовой функцией (вектором) $\vec{H}(\omega, u)$. Для этих весовых функций находим при помощи выражений напряженностей через потенциалы

$$\begin{aligned} \vec{E}(\omega, u) &= \frac{1}{2\pi} \frac{2e}{n^2 v} \left[-\left(i \frac{\omega}{v} \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1} u, 0, i \frac{\omega}{v}\right) + \frac{n^2}{c^2} (0, 0, v) i\omega \right] = \\ &= \frac{-e\omega i}{\pi n^2 v^2} \left(\frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1} u, 0, -\frac{v^2 - c_1^2}{c_1^2} \right) = \frac{-e\omega i}{\pi n^2 v^2} \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1} \left(u, 0, \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1} \right), \end{aligned} \quad (60)$$

$$\vec{H}(\omega, u) = \frac{e}{\pi n^2 v} \frac{n^2}{c} \vec{v} \times \left(i \frac{\omega}{v} \sqrt{v^2 - c_1^2} c_1 u, 0, i \frac{\omega}{v} \right) = i \frac{e\omega}{\pi v c} \frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1} (0, 1, 0). \quad (61)$$

Наконец, для вектора Пойнтинга, соответствующего векторам (60) и (61), находим

$$\vec{S}(\omega, u) = \frac{c}{4\pi} \frac{e^2 \omega^2}{\pi^2 n^2 v^3 c} \frac{v^2 - c_1^2}{c_1^2} \frac{1}{u^2 - 1} \left(\frac{\sqrt{v^2 - c_1^2}}{c_1^2}, 0, u \right). \quad (62)$$

3. *Излучаемая мощность.* Величина излучаемой мощности равна потерям энергии заряда, и может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned} W &= - \int \vec{j} \vec{E} d^3 r = -e \int v E_z d^3 r \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) = \\ &= -ev \int \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) d^3 r \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(z/v-t)} d\omega \int_x^{\infty} \frac{du}{\sqrt{u^2 - x^2}} \times \\ &\quad \times \exp\left(i \frac{\omega}{c_1} \sqrt{1 - \frac{c_1^2}{v^2}} u\right) i \frac{e\omega}{\pi n^2 v^2} \frac{v^2 - c_1^2}{c_1^2} = \quad (63) \\ &= \frac{e^2 v}{\pi c^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \left(1 - \frac{c_1^2}{v^2}\right) \operatorname{sgn}(\omega) \frac{\pi}{2} = \frac{e^2 v}{c^2} \int_0^{\infty} \omega \left(1 - \frac{c_1^2}{v^2}\right) d\omega. \end{aligned}$$

При подстановке выражения (59) переменная u была заменена на u/x . В интеграле по частоте оставлен был только синус по соображениям четности.

Совершенно очевидно, что последний интеграл при постоянных v и c_1 равен бесконечности, что не имеет физического смысла и отражает неадекватность наших предположений. На самом деле ε и, следовательно, показатель преломления n зависят от частоты. При больших частотах ω скорость света в веществе $c_1 \sim c$, а в плазме фазовая скорость света $c_1 > c$ (преобразование Фурье от передаточной функции $\varepsilon(\omega)$ и играющая роль показателя преломления величина $n(\omega)$ меньше единицы). Поэтому интеграл по частоте надо брать не до бесконечности, а до некоторого ω_{\max} , которое определяется условием $n(\omega_{\max}(v)) = c/v \approx 1$. Тогда результат (63) перепишется в виде

$$W = \frac{e^2 v}{c^2} \int_0^{\omega_{\max}(v)} \omega \left(1 - \frac{c^2}{n^2(\omega) v^2}\right) d\omega. \quad (64)$$

Формула (64) носит название формулы Тамма—Франка в честь получивших ее физиков.

§ 4. Переходное излучение

1. *Природа излучения.* Если заряд движется с постоянной скоростью, но не в вакууме, а в среде, он может излучать, даже когда его скорость меньше скорости света в этой среде. На такую возможность обратили внимание В. Л. Гинзбург и И. М. Франк в 1946 году [8]. Излучение возникает, если на пути заряда изменяются свойства среды. Первоначально рассматривалось излучение при переходе заряда из среды с одними оптическими свойствами в среду со свойствами, отличными от свойств первой. Затем было установлено, что причиной возникновения излучения может быть и плавное изменение свойств стационарной среды вдоль траектории заряда, и изменение этих свойств со временем. При немонотонном изменении оптических свойств, например периодическом, может происходить и рассеяние, т. е. образование отраженных волн. Все эти механизмы по традиции называются переходными.

Здесь мы рассмотрим простейший случай перехода заряда из одной однородной полубесконечной среды в другую однородную же среду, при условии, что скорость заряда перпендикулярна границе раздела. Изложение ведется по книге В. Л. Гинзбурга [7].

Пусть заряд q движется вдоль оси аппликат со скоростью $v > 0$. Для него плотности заряда и тока

$$\rho(\vec{r}, t) = q\delta(\vec{r} - \vec{v}t) = q\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt), \quad (65)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{v}\rho(\vec{r}, t) = qv(0, 0, 1)\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt). \quad (66)$$

Уравнение неразрывности, конечно, выполняется.

Плоскость xy разделяет два полупространства, заполненных диэлектриками с различными постоянными коэффициентами диэлектрической проницаемости: ε_- при $z < 0$ и ε_+ при $z > 0$. На границе эта величина терпит скачок.

2. *Основные уравнения.* Запишем уравнения Максвелла для такой ситуации. В каждом из полупространств эти уравнения имеют вид

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (67)$$

Стандартным приемом сводим уравнения к одному уравнению для напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \vec{\nabla} \rho - \Delta \vec{E} = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \vec{j} \right) = -\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}.\end{aligned}\quad (68)$$

Отсюда с учетом связи плотностей (65)–(66) получается уравнение

$$\frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = -4\pi \left(\frac{1}{\varepsilon} \vec{\nabla} \rho + \frac{\vec{v}}{c^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right). \quad (69)$$

3. *Преобразования Фурье.* Разложим плотность заряда и электрическую напряженность в интегралы Фурье по времени и по координатам x и y :

$$\rho(\vec{r}, t) = \int \tilde{\rho}(\omega, z) e^{i(\alpha_x x + \alpha_y y - \omega t)} d\alpha_x d\alpha_y d\omega, \quad (70)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int \vec{\tilde{E}}(\alpha_x, \alpha_y, \omega, z) e^{i(\alpha_x x + \alpha_y y - \omega t)} d\alpha_x d\alpha_y d\omega. \quad (71)$$

Преобразование плотности тока легко вычисляется:

$$\tilde{\rho}(\omega, z) = \frac{q}{(2\pi)^3} \int \delta(x) \delta(y) \delta(z - vt) e^{-i(\alpha_x x + \alpha_y y - \omega t)} dx dy dt = \frac{q e^{i\omega z/v}}{(2\pi)^3 v}. \quad (72)$$

Так как больше всего мы будем иметь дело с проекцией вектора \vec{E} на ось z , обозначим $\vec{\tilde{E}}_z = E$. Производную по z будем отмечать штрихом. Уравнение (69) для преобразования этой проекции тогда примет вид

$$-\frac{\varepsilon}{c^2} \omega^2 E + (\alpha_x^2 + \alpha_y^2) E - E'' = -4\pi \left(\frac{1}{\varepsilon} i \frac{\omega}{v} - \frac{v}{c^2} i \omega \right) \tilde{\rho}. \quad (73)$$

Уравнение (73) можно переписать так:

$$\varepsilon E'' + \varepsilon \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \alpha_{\perp}^2 \right) E = -\frac{4\pi i \omega q}{c^2 (2\pi)^3} \left(\varepsilon - \frac{c^2}{v^2} \right) e^{i\omega z/v}, \quad (74)$$

где $\alpha_{\perp} = |\vec{\alpha}_{\perp}|$, $\vec{\alpha}_{\perp} = (\alpha_x, \alpha_y, 0)$. Зависимость преобразований от частоты ω определяет временную, а от $\vec{\alpha}_{\perp}$ — пространственную дисперсии.

Найдя $E = \tilde{E}_z$, можно определить и проекции вектора $\tilde{\vec{E}}$ на плоскость. В частности, наиболее просто получить их комбинацию $E_{\text{ae}} = \text{ae}_\perp \tilde{E}_\perp = \text{ae}_x \tilde{E}_x + \text{ae}_y \tilde{E}_y$. Из второго уравнения в (67) следует, что

$$iE_{\text{ae}} + E' = \frac{4\pi}{\varepsilon} \tilde{\rho}. \quad (75)$$

На границе сред должны быть непрерывны нормальные составляющие индукции и тангенциальные составляющие напряженности, запишем эти условия для преобразований:

$$\varepsilon_- E_-|_{z=0} = \varepsilon_+ E_+|_{z=0}, \quad (E_{\text{ae}})_-|_{z=0} = (E_{\text{ae}})_+|_{z=0}. \quad (76)$$

4. *Решения уравнений.* Частное решение уравнения (74) описывает поле самого заряда:

$$E^q = -\frac{4\pi q(1 - c^2/v^2\varepsilon)}{\omega(2\pi)^3(\varepsilon - c^2/v^2 - \text{ae}_\perp^2 c^2/\omega^2)} e^{i\omega z/v}. \quad (77)$$

Решения однородного уравнения представляют свободные волны, т. е. излучение:

$$E_\pm = \frac{4\pi q}{\omega(2\pi)^3} C_\pm e^{\pm i(\omega z/c) \sqrt{\varepsilon - \text{ae}_\perp^2 c^2/\omega^2}}. \quad (78)$$

Здесь амплитуды C_\pm безразмерны.

Комбинация тангенциальных компонент находится из соотношения (75):

$$E_{\text{ae}}^q = -\frac{\text{ae}_\perp^2 c^2}{v\omega} \frac{E^q}{\varepsilon - c^2/v^2}, \quad (E_{\text{ae}})_\pm = \mp \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \frac{\text{ae}_\perp^2 c^2}{\omega^2}} E_\pm. \quad (79)$$

Характер написанных решений зависит от соотношения между коэффициентом диэлектрической проницаемости ε , параметром ae_\perp и частотой ω . Если $\varepsilon < \text{ae}_\perp^2 c^2/\omega^2$, то показатели в экспонентах в (78) вещественны, при $z > 0$ необходимо взять отрицательный, а при $z < 0$ — положительный показатели, так что решения описывают затухающие от границы волны. Такие волны всегда возможны при определенных значениях ω и ae_\perp , но они нас не интересуют. Отвлечемся мы и от возможных решений, описывающих волны вдоль плоскости раздела сред. Наконец, если на границе нет разрыва и

выполняется соотношение $\varepsilon = n^2 > c^2/v^2$, где n — показатель преломления, то это означает, что справедливо условие существования излучения Черенкова $v > c/n$. В частности, из (77) сравнительно легко можно получить формулу Тамма—Франка (64).

5. *Амплитуды волн.* Теперь примем условия $\frac{\varkappa_{\pm}^2 c^2}{\omega^2} < \varepsilon_{\pm} < \frac{c^2}{v^2}$, для выполнения которых необходимо, чтобы было $\frac{c}{v} > v$. Переходное излучение распространяется от границы раздела сред, т. е. при положительных аппликатах в формулах (78) надо брать плюс, а при отрицательных — минус.

Для сокращения формул введем обозначения

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \zeta = \frac{\varkappa_{\pm} c}{\omega}, \quad r_{\pm} = \sqrt{\varepsilon_{\pm} - \zeta^2}, \quad s_{\pm} = \varepsilon_{\pm} - \frac{1}{\beta^2} - \zeta^2 = -\frac{(1 - \beta r_{\pm})(1 + \beta r_{\pm})}{\beta^2}. \quad (80)$$

Запишем граничные условия (76), заранее сократив на общий множитель $\frac{4\pi i q}{\omega(2\pi)^3}$, выделив целую часть у возникающих дробей со знаменателями s_{\pm} в первом равенстве и сократив на общий множитель дробей во втором:

$$\frac{\zeta^2}{s_-} - \varepsilon_- C_- = \frac{\zeta^2}{s_+} - \varepsilon_+ C_+, \quad \frac{\zeta^2}{\beta \varepsilon_- s_-} + r_- C_- = \frac{\zeta^2}{\beta \varepsilon_+ s_+} - r_+ C_+. \quad (81)$$

Исключая по очереди два искомого коэффициента, найдем

$$C_+ = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{D \varepsilon_+} \frac{\beta \zeta^2}{1 - \beta r_-} \frac{1 - \beta^2 \varepsilon_+ - \beta r_-}{1 - \beta^2 r_+^2}, \quad (82)$$

$$C_- = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{D \varepsilon_-} \frac{\beta \zeta^2}{1 + \beta r_+} \frac{1 - \beta^2 \varepsilon_- + \beta r_+}{1 - \beta^2 r_-^2}, \quad (83)$$

где $D = \varepsilon_+ r_- + \varepsilon_- r_+$.

6. *Предельные случаи.* Если заряд нерелятивистский, т. е. $\beta \ll 1$, то оба коэффициента малы и при условии, что диэлектрические проницаемости ε не очень различаются (одного порядка)

$$C_{\pm} = \beta \zeta^2 \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{D \varepsilon_{\pm}}. \quad (84)$$

Сильное излучение возникает на высоких частотах, если заряд ультрарелятивистский, причем, как обычно для таких случаев, излучение идет узкими пучками в определенных направлениях. Действительно, пусть $\beta \sim 1$, $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2} \gg 1$. На высоких частотах

почти всегда оправдано использование формулы для диэлектрической проницаемости, которая характерна для дисперсии в плазме. Мы примем эту формулу, причем используем обозначение плазменной частоты:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m}}. \quad (85)$$

Введем безразмерные величины, имеющие порядок 1, выделив множитель γ :

$$\zeta = \frac{\mathfrak{a}_\perp c}{\omega} = \frac{\mathfrak{a} c}{\omega} \sin \theta = \frac{\theta_0}{\gamma}, \quad \omega = \frac{\omega_{p\pm}}{\Omega_\pm} \gamma, \quad \varepsilon_\pm \sim 1 - \frac{\Omega_\pm^2}{\gamma^2}. \quad (86)$$

Тогда $D \sim 2$, $1 + \beta r_\pm \sim 2$, $\varepsilon_+ - \varepsilon_- \sim \frac{\omega_{p-}^2 - \omega_{p+}^2}{\omega^2} = \frac{\Omega_-^2 - \Omega_+^2}{\gamma^2}$,

$$1 - \beta r_\pm \sim 1 - \beta \sqrt{1 - \frac{\Omega_{p\pm}^2}{\gamma^2} - \frac{\theta_0^2}{\gamma^2}} \sim 1 - \beta + \frac{\beta}{2\gamma^2} (\Omega_{p\pm}^2 + \theta_0^2) \sim \frac{1 + \theta_0^2 + \Omega_\pm^2}{2\gamma^2}. \quad (87)$$

Числители последних дробей в формулах (82) при принятых предположениях можно заменить на -1 у C_+ и на 1 у C_- . Подставляя все это в указанные формулы, получим

$$C_+ \sim \frac{\Omega_+^2 - \Omega_-^2}{1 + \theta_0^2 + \Omega_+} \frac{\theta_0^2}{1 + \theta_0^2 + \Omega_-}, \quad (88)$$

$$C_- \sim \frac{\Omega_-^2 - \Omega_+^2}{4\gamma^2} \frac{\theta_0^2}{1 + \theta_0^2 + \Omega_-} = - \frac{C_+}{4\gamma^2 (1 + \theta_0^2 + \Omega_+^2)}. \quad (89)$$

Амплитуда волны, направленной в сторону движения заряда конечна, а в противоположную сторону — мала.

В астрофизике переходное излучение может возникать, когда высокоэнергичная частица космических лучей налетает на межзвездную пылинку.

Глава V. Комptonовское рассеяние

§ 1. Описание комптоновского рассеяния

1. *Комптоновское рассеяние и законы сохранения.* Рассеяние излучения электронами, называемое комптоновским, играет важную роль в формировании спектров ряда объектов в Метагалактике, изучаемых астрофизиками. Здесь дается понятие об этом виде рассеяния.

В 1923 году А. Комптон опубликовал статью об открытии эффекта, впоследствии получившего его имя. За свое открытие и его объяснение Комптон получил Нобелевскую премию по физике 1927 года.

Комптоновское рассеяние — это акт взаимодействия электрона и фотона, в результате которого эти частицы изменяют свои импульсы, энергии и состояния поляризации. Поэтому часто говорят, что частицы после рассеяния — не те, что были перед рассеянием. Подробное описание физики этого процесса и его использования при интерпретации наблюдений астрофизических объектов содержится в статьях и обзорах [13, 19, 42, 43].

Пусть взаимодействуют фотон с импульсом \vec{k} и электрон с импульсом \vec{p} . После рассеяния их импульсы изменяются и становятся равными соответственно \vec{k}_1 и \vec{p}_1 . Энергии этих частиц до ck , cp_0 и после взаимодействия ck_1 , cp_{01} . Для импульсов электрона справедливы обычные релятивистские соотношения [28] (см. Главу I, § 2)

$$p_0 = \sqrt{m^2c^2 + p^2}, \quad p_{01} = \sqrt{m^2c^2 + p_1^2}. \quad (1)$$

Комптоновскому рассеянию отвечают две диаграммы Фейнмана [5], представленные на рис. 1. Электрон изображается сплошной линией, а фотон волнистой. Время течет снизу вверх. Взаимодействие происходит в точках, где встречаются электронные и фотонные линии. Диаграммы похожи на диаграммы тормозного процесса, но внешнее поле иона отсутствует, а имеется начальный фотон. Поэтому действуют все четыре закона сохранения.

Отметим, что свободный электрон не может поглотить или излучить фотон, так как при таких процессах невозможно сохранение импульса и энергии.

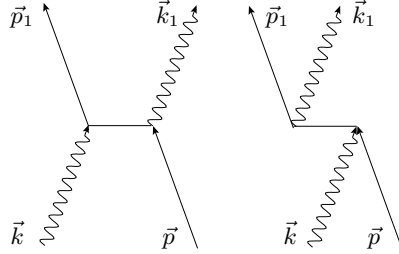


Рис. 1. Диаграммы комптоновского рассеяния.

Законы сохранения энергии и импульса для обеих диаграмм записываются одинаково:

$$p_0 + k = p_{01} + k_1, \quad \vec{p} + \vec{k} = \vec{p}_1 + \vec{k}_1. \quad (2)$$

Комптоновское рассеяние в общем случае является существенно релятивистским процессом, поэтому введем релятивистские обозначения для ряда величин.

Четырехмерные импульсы электрона и фотона зададим, как и раньше, векторами $\underline{p} = \{p_0, \vec{p}\}$ и $\underline{k} = \{k, \vec{k}\}$. Четырехмерное скалярное произведение $\underline{p}\underline{k} = p_0k - \vec{p}\vec{k}$. Для других векторов оно определяется точно так же, со знаком минус перед трехмерным скалярным произведением. В частности, $\underline{p}^2 = p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2c^2$, $\underline{k}^2 = k^2 - \vec{k}^2 = 0$: импульс электрона — времениподобный вектор, а импульс фотона — нулевой.

В четырехмерных обозначениях законы сохранения записываются одним равенством

$$\underline{p} + \underline{k} = \underline{p}_1 + \underline{k}_1, \quad (3)$$

а их следствия равенствами

$$\underline{p}\underline{k} = \underline{p}_1\underline{k}_1, \quad \underline{p}\underline{k}_1 = \underline{p}_1\underline{k}, \quad \underline{p}\underline{k} = (\underline{p} + \underline{k})\underline{k}_1. \quad (4)$$

Наряду с размерными мы будем использовать безразмерные обозначения для величин. Импульсы и энергии фотона и электрона будем обозначать безразмерными величинами, положив $k = mcx$, $\vec{k} = mcx\vec{\omega}$, $p_0 = mc\gamma$, $\vec{p} = mc\vec{z} = mcz\vec{\Omega}$, $\underline{p} = mc\underline{z} = mc\{\gamma, \vec{z}\}$, $\underline{k} = mc\underline{x} = mc\{x, x\vec{\omega}\}$ и соответственно величины с индексом 1: $x_1 =$

k_1/mc и т. д. Легко переписать приведенные выше соотношения в безразмерных обозначениях, они встретятся нам впоследствии.

2. *Две системы отсчета.* Рассеяние можно рассматривать в различных системах отсчета. Введенные выше обозначения относятся к произвольной системе (ее можно потом связать с каким-либо объектом, например, с электронным газом, тогда такая система, как уже много раз отмечалось, называется сопутствующей ему).

В выбранной (произвольной) системе отсчета введем два орта

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{\Omega} - \zeta\vec{\omega}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{\omega} \times \vec{\Omega}}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \zeta = \vec{\Omega}\vec{\omega}, \quad (5)$$

которые вместе с вектором $\vec{\omega}$ образуют правую тройку. Очевидно, что $\vec{\Omega} = \sqrt{1 - \zeta^2}\vec{e}_1 + \zeta\vec{\omega}$. Введем сферические углы в этих ортах для вектора направления импульса фотона после рассеяния:

$$\vec{\omega}_1 = \sqrt{1 - \mu^2}(\cos \Phi \vec{e}_1 + \sin \Phi \vec{e}_2) + \mu\vec{\omega}. \quad (6)$$

Тогда

$$\vec{\Omega}\vec{\omega}_1 = \zeta_1 = \mu\zeta + \sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \zeta^2} \cos \Phi. \quad (7)$$

Выразим вектор импульса электрона после рассеяния через остальные и подставим в равенство, выражающее закон сохранения энергии:

$$p_0 + k - k_1 = \sqrt{m^2c^2 + (\vec{p} + \vec{k} - \vec{k}_1)^2}. \quad (8)$$

Возводя в квадрат и сокращая, получаем

$$kp_0 - \vec{k}\vec{p} = k_1p_0 - \vec{k}_1\vec{p} + kk_1 - \vec{k}\vec{k}_1. \quad (9)$$

Через косинусы углов между парами векторов соотношение (9) переписется в виде

$$k(p_0 - p\zeta) = k_1[p_0 - p\zeta_1 + k(1 - \mu)]. \quad (10)$$

Из него находится величина импульса фотона после рассеяния

$$k_1 = k \frac{p_0 - p\zeta}{p_0 - p\zeta_1 + k(1 - \mu)}, \quad x_1 = x \frac{\gamma - z\zeta}{\gamma - z\zeta_1 + x(1 - \mu)}. \quad (11)$$

Выделенной из всех систем отсчета является такая система, в которой до рассеяния электрон покоился. Мы, следуя курсу Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица, называем эту систему лабораторной (в астрофизической литературе лабораторной часто называют систему наблюдателя) и все величины, относящиеся к ней, отмечаем нуликом. В этой системе $\vec{p}=\vec{z}=0$, $z=0$, $p_0=mc$, $\gamma=1$ и

$$k_1^0 = k^0 \frac{mc}{mc + k^0(1 - \mu_0)}. \quad (12)$$

Вспомнив, что импульс фотона $k = mcx = \frac{h}{\lambda}$, перепишем формулу (12) через частоты (безразмерные) и длины волн

$$x_1^0 = \frac{x^0}{1 + x^0(1 - \mu_0)}, \quad \lambda_1^0 = \lambda^0 + \lambda_C(1 - \mu_0), \quad (13)$$

где $\lambda_C = h/mc$ — комптоновская длина волны.

Введем в лабораторной системе аналоги ортов (5). Так как импульс покоящегося до взаимодействия электрона не имеет направления, в качестве направления импульса возьмем тот же вектор $\vec{\Omega}$:

$$\vec{e}_1^0 = \frac{\vec{\Omega} - \zeta_0 \vec{\omega}^0}{\sqrt{1 - \zeta_0^2}}, \quad \vec{e}_2^0 = \frac{\vec{\omega}^0 \times \vec{\Omega}}{\sqrt{1 - \zeta_0^2}}. \quad (14)$$

Свой вид сохраняют формулы для вектора $\vec{\Omega}$, а также (6) и (7): $\vec{\Omega} = \sqrt{1 - \zeta_0^2} \vec{e}_1^0 + \zeta_0 \vec{\omega}^0$,

$$\vec{\omega}_1^0 = \sqrt{1 - \mu_0^2} (\cos \Phi_0 \vec{e}_1^0 + \sin \Phi_0 \vec{e}_2^0) + \mu_0 \vec{\omega}^0, \quad (15)$$

$$\vec{\Omega} \vec{\omega}_1^0 = \mu_0 \zeta_0 + \sqrt{1 - \mu_0^2} \sqrt{1 - \zeta_0^2} \cos \Phi_0. \quad (16)$$

Безразмерные скалярные произведения импульсов электрона и фотона равны как раз соответственно безразмерным же импульсам фотона до и после рассеяния в лабораторной системе (где $p = 0$, $z = 0$):

$$\xi = \underline{pk}/m^2 c^2 = \underline{z} \underline{x} = x(\gamma - z\zeta) = k^0/mc = x^0, \quad (17)$$

$$\xi_1 = \underline{pk}_1/m^2 c^2 = \underline{z} \underline{x}_1 = x_1(\gamma - z\zeta_1) = k_1^0/mc = x_1^0. \quad (18)$$

Несложно проверить очевидное утверждение, что переход из произвольной системы в лабораторную производится с помощью

преобразования Лоренца со скоростью $\vec{V} = c\vec{z}/\gamma$, причем лоренцевский множитель $\Gamma = \gamma$. Легко также установить связи между углами и их тригонометрическими функциями. Обратный переход, как обычно, производится при скорости $-\vec{V}$. В частности,

$$x = \xi(\gamma + z\zeta_0), \quad x_1 = \xi_1(\gamma + z\vec{\Omega}\vec{\omega}_1^0). \quad (19)$$

3. *Роль комптоновского рассеяния.* При рассеянии фотона на покоящемся электроне частота фотона всегда уменьшается (длина волны увеличивается), и в этом заключается эффект Комптона. При $\mu_0 = 1$, т.е. при рассеянии вперед, рассеянный фотон пролетает, как будто не испытал взаимодействия, а электрон остается неподвижным. Рассеяние под прямым углом ($\mu_0 = 0$) дает увеличение длины волны ровно на λ_C . Максимальное увеличение λ на две комптоновские длины волны достигается, когда фотон изменяет свое направление на противоположное. Потеря энергии фотоном, называемая эффектом отдачи, происходит вследствие передачи им части своего импульса, а значит и энергии, первоначально покоящемуся электрону, который приходит в движение.

Если электрон не стоял на месте, то при различном соотношении направлений и величин импульсов реагирующих частиц фотон может как увеличивать, так и уменьшать свою энергию, но это уже не эффект Комптона в его классическом понимании, а скорее следствие эффекта Доплера. Действительно, при переходе в систему отсчета, связанную с электроном до рассеяния, т.е. в лабораторную, энергия фотона будет другой. В лабораторной системе эта энергия фотона только уменьшается. Результат рассеяния выявится при переходе в исходную систему отсчета. За счет переходов из одной системы в другую и обратно фотон меняет свою энергию вследствие эффекта Доплера. Однако в астрофизической литературе увеличение энергии фотонов при комптоновском рассеянии их энергичными электронами принято называть обратным эффектом Комптона [76]. Комптоновским рассеянием называют вообще рассеяние излучения заряженными частицами.

Комптоновская длина волны, которой соответствует энергия, равная энергии покоя электрона 511 кэВ , очень мала: $\lambda_C = 0.024 \text{ \AA}$. Поэтому увеличение длины волны фотона при рассеянии на релятивистском электроне заметно, только если длина волны рассеиваемого фотона не очень существенно отличается от комптонов-

ской. Горячие электроны могут передать значительную долю своей энергии фотону и вызывать гораздо бóльшие смещения длины волны, которые доступны измерениям даже в радиодиапазоне. Релятивистские же электроны сразу переводят излучение из радио в оптический диапазон, из оптического — в рентгеновский, из ультрафиолетового — в область гамма-излучения.

Сравним комптоновское рассеяние с тормозным поглощением.

Сначала составим отношение коэффициентов ослабления за счет томсоновского рассеяния и тормозного поглощения. Томсоновское сечение $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$, $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$, а тормозное сечение, усредненное по максвелловскому распределению электронов по скоростям, определяется формулой Крамерса ((II.75) без множителя Гаунта). Тогда безразмерное отношение

$$\frac{\alpha_C}{\alpha_{cc}} = \frac{n_e \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2}{n_e n^+ \frac{16\pi^2 Z^2 e^6}{3\sqrt{3} hc} \frac{k_B T}{(2\pi m k_B T)^{3/2} \nu^3}} = \frac{\bar{v} \sqrt{3} \pi^2 \hbar c}{c n^+ \lambda^3 Z^2 e^2} = \frac{2.342 \cdot 10^3 \bar{v}}{Z^2 (n^+ \lambda^3) c}, \quad (20)$$

где $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$ — средняя скорость электронов. Для водородного газа надо положить $Z = 1$ и $n^+ = n_e$. Отношение (20) представлено в виде произведения безразмерных множителей, в частности, произведение $n^+ \lambda^3$ есть число ионов в кубике с длиной ребра, равной длине волны рассеиваемого излучения.

Из полученной формулы видно, что рассеяние электронами играет более существенную роль по сравнению с тормозными процессами при низких концентрациях ионов и высоких температурах газа. Как мы видели, изменение энергии фотонов заметно при малых длинах волн излучения. Заряд иона не должен быть слишком велик. Короче говоря, томсоновское и комптоновское рассеяние необходимо принимать во внимание в горячих разреженных средах, причем комптоновское рассеяние, т. е. рассеяние с изменением частоты излучения, существенно тогда, когда средние энергии электронов и/или фотонов велики настолько, что сравнимы с энергией покоя электрона. В таких средах это основной механизм обмена энергией между веществом и излучением.

Сечение комптоновского рассеяния в отличие от томсоновского зависит от частоты рассеиваемого фотона, о чем говорится в следующем пункте.

4. *Сечение комptonовского рассеяния.* Это сечение рассчитывается методами квантовой электродинамики [5].

Существенной частью сечения Клейна—Нишины—Тамма является безразмерный лоренцевский инвариант

$$F(\xi, \xi_1) = \mu_0^2 + 1 + B, \quad B = \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi} - 2. \quad (21)$$

Здесь величина μ_0 — это уже использовавшийся косинус угла рассеяния в лабораторной системе отсчета, которая является собственной для электрона до рассеяния.

Последнее соотношение в (4) с учетом (17) и (18) можно переписать так:

$$\xi = \xi_1 + q, \quad (22)$$

где введено обозначение для скалярного произведения импульсов фотонов

$$q = \frac{\underline{k} \underline{k}_1}{m^2 c^2} = \underline{x} \underline{x}_1 = x x_1 (1 - \mu) = \xi \xi_1 (1 - \mu_0). \quad (23)$$

Тогда очевидно, что

$$\mu_0 = 1 + \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}. \quad (24)$$

Из формулы (21) следует, что в лабораторной системе F представляет собой сумму релеевской индикатрисы (слагаемое $\mu_0^2 + 1$) с добавкой $B = x^0/x_1^0 + x_1^0/x^0 - 2 = (\sqrt{x^0/x_1^0} - \sqrt{x_1^0/x^0})^2 \geq 0$, которая зависит от частот фотона до и после рассеяния, но не зависит от их направлений. Однако частота x_1^0 зависит от косинуса угла рассеяния согласно (13).

Развернутое выражение для F имеет вид

$$F(\xi, \xi_1) = \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1} \right) + \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi}. \quad (25)$$

Эта величина, как следует из соотношений (4) и формул для величин (17)–(18), симметрична относительно обращения процесса рассеяния $\underline{p}, \underline{k} \leftrightarrow \underline{p}_1, \underline{k}_1$.

Инвариантное дифференциальное сечение процесса комptonовского рассеяния записывается в виде (см. [5])

$$\frac{r_e^2 m^2 c^2}{2} \frac{d^2 \omega_1}{\underline{p} \underline{k}} \int \frac{d^3 p_1}{p_{10}} \int k_1 dk_1 \delta(\underline{p}_1 + \underline{k}_1 - \underline{p} - \underline{k}) F =$$

$$= \frac{r_e^2}{2} \frac{d^2\omega_1}{\xi} \int \frac{d^3z_1}{\gamma_1} \int x_1 dx_1 \delta(z_1 + \underline{x}_1 - \underline{z} - \underline{x}) F(\xi, \xi_1). \quad (26)$$

Возьмем интеграл по \vec{z}_1 , используя три дельта-функции с импульсами, и проведем преобразование аргумента дельта-функции с энергиями, аналогичное тому, которое было проделано при выводе равенства (9), или домножив этот аргумент на выражение со знаком минус перед корнем:

$$\delta\left(\sqrt{1+(\vec{z}+\vec{x}-\vec{x}_1)^2}+x_1-\gamma-x\right)=\delta\left(\frac{\xi-\xi_1-q}{\gamma_1}\right)=\gamma_1\delta(\xi-\xi_1-q). \quad (27)$$

Далее, подставив (17), (18) и (23), выделим частоту фотона после рассеяния:

$$\delta(\xi-\xi_1-q)=\delta\left(\left[x_1-x\frac{\gamma-z\zeta}{\gamma-z\zeta_1+x(1-\mu)}\right]\frac{\xi}{x_1}\right). \quad (28)$$

В результате получим, что сечение запишется так:

$$\frac{r_e^2}{2} \frac{x_1^2 d^2\omega_1}{\xi^2} F(\xi, \xi_1) = \frac{r_e^2}{2} \frac{m^2 c^2}{(\underline{pk})^2} k_1^2 d^2\omega_1 F, \quad (29)$$

причем частота x_1 (как и k_1) определяется формулой (11).

Мы говорили об однократном взаимодействии электрона и фотона. Многократное рассеяние, т. е. взаимодействие электронного и фотонного газов посредством комптоновского рассеяния описывается кинетическим уравнением, которое мы сформулируем ниже.

§ 2. Кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния и его частные случаи

1. *Релятивистские обозначения.* Упомянутое уравнение является релятивистским обобщением уравнения Больцмана. Для его написания подберем релятивистские аналоги величин, входящих в уравнение Больцмана [47].

В указанном уравнении, точнее в интеграле столкновений, производятся интегрирования по импульсам частиц. Однако трехмерный элемент объема в пространстве импульсов d^3p не является релятивистским инвариантом. Здесь дадим другой способ получения

его скалярного обобщения, не сводящийся к прямой проверке. Откажемся временно от соотношения (1) и будем считать нулевую составляющую четырехмерного импульса электрона p_0 независимой величиной. Очевидно, что произведение четырех дифференциалов $d^4p = dp_0 d^3p$ — скалярная величина. От искусственно введенной независимой координаты p_0 надо избавиться, т. е. взять по ней интеграл. Для учета соотношения (1) введем множителем инвариантную дельта-функцию $\delta(p^2 - m^2c^2)$:

$$\begin{aligned} & \int \delta(p^2 - m^2c^2) d^4p = d^3p \int dp_0 \delta(p_0^2 - p^2 - m^2c^2) = \\ & = d^3p \int dp_0 \delta\left(\left(p_0 - \sqrt{p^2 + m^2c^2}\right)\left(p_0 + \sqrt{p^2 + m^2c^2}\right)\right) = \\ & = d^3p \int dp_0 \delta\left(\left(p_0 - \sqrt{p^2 + m^2c^2}\right)2\sqrt{p^2 + m^2c^2}\right) = \frac{d^3p}{2\sqrt{p^2 + m^2c^2}}. \end{aligned} \quad (30)$$

При проведении выкладки было учтено, что в нуль в аргументе дельта-функции обращается только множитель с разностью, а при переходе к последнему выражению множитель с суммой был упрощен (заменен удвоенным корнем) и вынесен из-под знака этой функции в знаменатель, так как замена переменной интегрирования дает тот же результат. В дальнейшем в знаменателе вместо корня для краткости будем писать p_0 , считая соотношение (1) выполненным. Итак, релятивистским инвариантом является отношение $\frac{d^3p}{p_0}$, что, как уже говорилось, можно проверить и непосредственно, применив к нему преобразование Лоренца.

Точно так же показывается, что инвариантной величиной является отношение $\frac{d^3k}{k}$ для импульса фотона. При этом инвариантны и два множителя этого отношения, а именно $\frac{dk}{k}$ и $k^2 d^2\omega$, где $\vec{\omega}$ — единичный вектор направления импульса фотона: $\vec{k} = k\vec{\omega}$, а $d^2\omega$ — элемент телесного угла, т. е. площади поверхности на единичной сфере. Для частиц с не равной нулю массой покоя это свойство не выполняется. Указанным свойством элемента объема импульса фотона объясняется форма интегралов в формуле для сечения (26).

Еще одну инвариантную комбинацию надо найти для левой части кинетического уравнения. В уравнении Больцмана там стоит

$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \vec{\nabla}_{\vec{r}} f + \vec{F} \vec{\nabla}_{\vec{p}} f$. На фотоны никакие силы не действуют, так что последнее слагаемое не нужно. Для дифференцирования необходимо четырехмерный вектор-градиент. Как было показано в Главе I, он должен быть взят в виде $\underline{\nabla} = \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right\}$. Инвариантом, следовательно, будет произведение $\underline{k} \underline{\nabla} = \frac{k}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{k} \vec{\nabla} = k \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right)$, которое и является релятивистским обобщением оператора левой части уравнения Больцмана с учетом того, что скорость света постоянна. Именно такая комбинация производных, как в круглых скобках, стоит в левой части уравнения переноса излучения [49, 35].

Релятивистскими инвариантами являются безразмерные средние числа заполнения фотонных состояний n , связанные с интенсивностью I соотношением $I = \frac{2h\nu^3}{c^2} n$. Например, в случае выполнения ТДР справедлива формула Планка (I.203):

$$I_{\nu}^* = B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} n_{\nu}^*, \quad n_{\nu}^* = \frac{1}{e^{h\nu/k_{\text{B}}T} - 1}, \quad (31)$$

которая написана для системы отсчета, связанной с фотонным газом и называемой сопутствующей, т. е. такой, в которой средний импульс фотонов равен нулю. Эту формулу можно записать в явно релятивистски ковариантном виде, т. е. справедливом для произвольной системы отсчета:

$$n^*(\vec{k}) = \frac{1}{\exp(\underline{k} \underline{V} / k_{\text{B}}T) - 1}, \quad (32)$$

где $\underline{V} = \{c\Gamma, \Gamma\vec{V}\}$ и \vec{V} — четырехмерная и трехмерная скорости сопутствующей системы относительно указанной произвольной.

В формуле (32) температура фотонного газа выступает как инвариант. Иногда, если ничего не известно о движении теплового источника, величину, стоящую в показателе экспоненты, расписывают подробно и переопределяют температуру:

$$\frac{\underline{k} \underline{V}}{k_{\text{B}}T} = \frac{k}{k_{\text{B}}T} \Gamma(c - \vec{V}\vec{\omega}) = \frac{k c}{k_{\text{B}}T'} = \frac{h\nu}{k_{\text{B}}T'}, \quad T' = \frac{T}{\Gamma(1 - \vec{V}\vec{\omega}/c)}. \quad (33)$$

При таком написании формула Планка сохраняется в виде (31), но при этом получается, что при движении источника или наблюдателя изменяется не частота, а температура газа, которая зависит от

величины скорости и ее направления. Это кажется странным, ибо температура характеризует свойство самого фотонного газа, а не его перемещение. К тому же такое переопределение температуры возможно только по отношению к фотонному газу, как будет видно из следующих абзацев.

Функцию распределения электронов $f_e(\vec{p}) = f_e(\vec{z})/(m^3 c^3)$ также будем считать скаляром с нормировкой в сопутствующей электронному газу системе

$$\int f_e(\vec{p}) d^3 p = \int f_e(\vec{z}) d^3 z = n_e. \quad (34)$$

Ее нормировка в произвольной системе отсчета имеет вид

$$\int \underline{p} f_e(\vec{p}) \frac{d^3 p}{p_0} = \int \underline{z} f_e(\vec{z}) \frac{d^3 z}{\gamma} = n_e \underline{V}/c, \quad (35)$$

где n_e — концентрация электронов в сопутствующей электронному газу системе отсчета, в которой средний импульс электронов равен нулю, а \underline{V} имеет тот же смысл, что и в случае фотонного газа.

Почти всегда считается, что в астрофизических объектах распределение электронов в сопутствующей им системе отсчета изотропно. Тогда в этой системе

$$f_e(\vec{p}) = \frac{n_e}{m^3 c^3} f_e(\gamma), \quad 4\pi \int_0^\infty z^2 f_e(\gamma) dz = 1. \quad (36)$$

Переход в произвольную систему отсчета сводится к замене $\gamma \rightarrow \underline{V} z/c$, а нормировка переписывается в виде

$$\int \underline{z} f_e(\underline{V} z/c) \frac{d^3 z}{\gamma} = \underline{V}/c. \quad (37)$$

В большей части этой главы мы примем, что электроны имеют релятивистское распределение Максвелла, которое в сопутствующей электронному газу системе отсчета задается формулой

$$f_e(\gamma) = f_M(\gamma) = \frac{y}{4\pi K_2(y)} e^{-y\gamma}, \quad (38)$$

где $y = \frac{mc^2}{k_B T_e}$ — безразмерная обратная электронная температура, а $K_2(y)$ — функция Макдональда. Появление этой функции есть

следствие условия нормировки. Для произвольной системы отсчета формулу (38) следует переписать так:

$$f_M(\underline{p}V/mc^2) = \frac{y}{4\pi K_2(y)} e^{-pV/k_B T_e} = \frac{y}{4\pi K_2(y)} e^{-yzV/c}. \quad (39)$$

Теперь мы имеем все, чтобы написать кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния.

2. *Релятивистское кинетическое уравнение комптоновского рассеяния.* При написании этого уравнения принимается, что электронный газ релятивистский, но не вырожденный, так что запрет Паули не учитывается. Фотонный же газ может быть частично вырожден, и поэтому необходимо учитывать вынужденные переходы.

Для средних чисел заполнения состояний фотонов $n = n(\vec{r}, t, \vec{k})$ в точке \vec{r} в момент времени t с импульсами около \vec{k} уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{k} \nabla n = & -\frac{r_e^2}{2} m^2 c^2 \int \frac{d^3 p}{p_0} \frac{d^3 p_1}{p_{01}} \frac{d^3 k_1}{k_1} \delta(\underline{p} + \underline{k} - \underline{p}_1 - \underline{k}_1) F(\xi, \xi_1) \times \\ & \times [f_e(\vec{p})n(1 + n_{11}) - f_e(\vec{p}_1)(1 + n)n_{11}], \end{aligned} \quad (40)$$

причем для краткости не указываются аргументы $n = n(\vec{r}, t, \vec{k})$ и обозначено $n_{11} = n(\vec{r}, t, \vec{k}_1)$.

Первое слагаемое в квадратных скобках в уравнении (40) соответствует ослаблению при рассеянии, а второе — излучению. Интегралы берутся по импульсам электронов до и после рассеяния и по импульсам фотонов, участвующих в процессе рассеяния вместе с фотонами с импульсом \vec{k} . Дельта-функция отражает законы сохранения (2) и позволяет взять четырехкратный интеграл, так что останется интеграл по пяти переменным, как и в интеграле столкновений Больцмана.

Релятивистски ковариантное уравнение (40) можно рассматривать в любой системе отсчета. Наиболее удобно это делать в системе, связанной с электронным газом (сопутствующей). При переходе в эту систему используем безразмерные обозначения. Обозначений функций распределения и средних чисел заполнения несмотря на изменение их аргументов не меняем.

Примем также релятивистскую квантовую систему единиц, в которой постоянная Планка, скорость света и масса электрона принимаются в качестве основных единиц: $\hbar = c = m = 1$. В этой системе единица длины — комптоновская длина волны (деленная на

$2\pi) \lambda_C = \hbar/(mc)$, энергии $- mc^2$, частоты $- mc^2/\hbar$, импульса $- mc$, времени $-\lambda_C/c = \hbar/(mc^2)$. Классический радиус электрона в такой системе единиц совпадает с постоянной тонкой структуры $r_e = \frac{e^2}{mc^2} = \frac{e^2 \hbar}{\hbar c mc} = \frac{e^2}{\hbar c} = \alpha_{fs} = 1/137.036$, а заряд электрона равен $e = \sqrt{r_e} = 1/\sqrt{137.036} = 0.0854245$.

В сопутствующей системе уравнение (40) записывается так:

$$x \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = -\frac{r_e^2}{2} \int \frac{d^3 z}{\gamma} \frac{d^3 z_1}{\gamma_1} \frac{d^3 x_1}{x_1} \delta(\underline{z} + \underline{x} - \underline{z}_1 - \underline{x}_1) F(\xi, \xi_1) \times \\ \times [f_e(\underline{z})n(1 + n_{11}) - f_e(\underline{z}_1)(1 + n)n_{11}], \quad (41)$$

где теперь $n = n(\vec{r}, t, x, \vec{\omega})$, $n_{11} = n(\vec{r}, t, x_1, \vec{\omega}_1)$. К уравнению (41) следует добавить граничные и начальные условия.

В случае, когда электроны имеют релятивистское максвелловское распределение $f_M(\gamma)$, определяемое формулой (38), выполняется соотношение

$$f_M(\gamma_1) = f_M(\gamma)e^{y(\gamma-\gamma_1)} = f_M(\gamma)e^{-y(x-x_1)}. \quad (42)$$

Уравнение (41) для такого случая после взятия интеграла по \vec{z}_1 переписется в виде

$$x \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = -\frac{r_e^2}{2} n_e \int \frac{d^3 z}{\gamma \gamma_1} \frac{d^3 x_1}{x_1} \delta(\gamma + x - \gamma_1 - x_1) F(\xi, \xi_1) \times \\ \times f_M(\gamma) [n(1 + n_{11}) - e^{-y(x-x_1)}(1 + n)n_{11}]. \quad (43)$$

Чтобы взять интеграл по x_1 и тем самым избавиться от последней δ -функции, воспользуемся выражением (11) для безразмерной частоты рассеянного фотона. Тогда уравнение (43) превращается в

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = -\frac{r_e^2}{2x} n_e \int \frac{d^3 z}{\gamma} \frac{x_1^2 d^2 \omega_1}{\xi} F(\xi, \xi_1) f_M(\gamma) \times \\ \times [n(1 + n_{11}) - e^{-y(x-x_1)}(1 + n)n_{11}]. \quad (44)$$

При переходе к этому уравнению использованы тождества (27) и (28). В результате получилось уравнение с пятикратным интегралом, как обычно в кинетических уравнениях. Это уравнение также явно релятивистски ковариантно, хотя записано в обозначениях для сопутствующей системы отсчета.

3. *Функции перераспределения.* Уравнения (40) и (41) могут быть преобразованы по-другому, если ввести, как это принято в теории переноса излучения, функцию перераспределения (ФП) излучения по частотам и направлениям [35]. Отделим интегралы по импульсам электронов, от которых фотонные функции не зависят. Тогда для рассеяния $\vec{p}, \vec{k} \rightarrow \vec{p}_1, \vec{k}_1$ можно задать ФП формулой

$$R(\vec{k} \rightarrow \vec{k}_1) = \frac{2\pi m^3 c^3 r_e^2}{\sigma_T n_e} \int \frac{d^3 p}{p_0} \frac{d^3 p_1}{p_{10}} \delta(\underline{p}_1 + \underline{k}_1 - \underline{p} - \underline{k}) F f_e(\vec{p}) \quad (45)$$

или в безразмерных обозначениях

$$R(\vec{x} \rightarrow \vec{x}_1) = \frac{3}{4} \frac{1}{n_e} \int \frac{d^3 z}{\gamma} \frac{d^3 z_1}{\gamma_1} \delta(\underline{z}_1 + \underline{x}_1 - \underline{z} - \underline{x}) F(\xi, \xi_1) f_e(\vec{z}). \quad (46)$$

Вычислив интеграл по \vec{z}_1 и использовав преобразование (27), получим

$$R(\vec{x} \rightarrow \vec{x}_1) = \frac{3}{4} \frac{1}{n_e} \int \frac{d^3 z}{\gamma} \delta(\xi - \xi_1 - q) F(\xi, \xi_1) f_e(\vec{z}). \quad (47)$$

С использованием ФП безразмерное уравнение запишется так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = - \frac{\sigma_T n_e}{4\pi x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} \{ R(\vec{x} \rightarrow \vec{x}_1) n(\vec{x}) [1 + n(\vec{x}_1)] - R(\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}) n(\vec{x}_1) [1 + n(\vec{x})] \} \quad (48)$$

или более подробно

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = - \frac{\sigma_T n_e}{x} \int x_1 dx_1 \int \frac{d^2 \omega_1}{4\pi} \{ R(\vec{x} \rightarrow \vec{x}_1) n(\vec{x}) [1 + n(\vec{x}_1)] - R(\vec{x}_1 \rightarrow \vec{x}) n(\vec{x}_1) [1 + n(\vec{x})] \}. \quad (49)$$

Здесь внутренний двойной интеграл берется по направлениям вектора $\vec{\omega}_1$.

Если ввести четырехмерный вектор потока фотонов

$$\underline{N} = \int \frac{d^3 x}{x} \underline{x} n = \int d^3 x \{1, \vec{\omega}\} n \quad (50)$$

и проинтегрировать уравнение (48) по \vec{x} , то справа возникнет шестерной интеграл, который с одной стороны не изменяется при взаимной замене $\vec{x} \leftrightarrow \vec{x}_1$ ввиду своей симметрии относительно этих

векторов, а с другой — изменяет знак. Следовательно этот интеграл равен нулю и получается уравнение непрерывности числа фотонов

$$\nabla \underline{N} = 0, \quad (51)$$

отражающее тот факт, что число фотонов при рассеянии не изменяется.

При изотропной функции распределения электронов ФП зависит от частот и косинуса угла рассеяния:

$$R(x, x_1, \mu) = R(x \rightarrow x_1, \mu) = \frac{3}{4} \int \frac{d^3 z}{\gamma} \delta(\xi - \xi_1 - q) F(\xi, \xi_1) f_e(\gamma). \quad (52)$$

Здесь можно ввести ФП для моноэнергетических электронов:

$$R(x, x_1, \mu, \gamma) = R(x \rightarrow x_1, \mu, \gamma) = \frac{z}{2\pi} \int d^2 \Omega F(\xi, \xi_1) \delta(\xi - \xi_1 - q), \quad (53)$$

через которую ФП (52) выражается в виде ($z dz = \gamma d\gamma$)

$$R(x, x_1, \mu) = \frac{3\pi}{2} \int_{\gamma_*(x_1, x, \mu)}^{\infty} R(x, x_1, \mu, \gamma) f_e(\gamma) d\gamma, \quad (54)$$

где нижний предел в интеграле, т. е. неравенство $\gamma \geq \gamma_*(x_1, x, \mu)$, является условием физической осмысленности ФП.

Для случая максвелловского распределения электронов уравнение (43) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = - \frac{\sigma_T}{x} n_e \int_0^{\infty} x_1 dx_1 \int \frac{d^2 \omega_1}{4\pi} R(x, x_1, \mu) \times \\ \times \left[n(1 + n_{11}) - e^{-y(x-x_1)} (1 + n) n_{11} \right]. \end{aligned} \quad (55)$$

Функция $R(x, x_1, \mu, \gamma)$ выражается через интеграл, содержащий сечение комптоновского рассеяния. Различные формулы для этой функции были получены несколькими авторами. Ссылки на их работы и полный вывод этих формул содержится в статье [36] и обзоре [78]. Мы приведем такой вывод в одном из следующих параграфов.

Кинетическое уравнение в виде (55) по форме совпадает с уравнениями, которые изучаются в теории переноса излучения. Тот

факт, что функция перераспределения зависит не отдельно от направлений фотонов до и после рассеяния, а только от угла рассеяния $\arccos \mu$, отражает изотропию среды, где локально нет выделенного направления.

Рассмотрим конкретные геометрии сред.

4. *Плоская атмосфера и однородное бесконечное пространство.*

Получим уравнение, описывающее эволюцию спектра излучения в плоскопараллельной среде, заполненной макроскопически неподвижным электронным газом с концентрацией частиц n_e . Система отсчета, связанная со средой, и является сопутствующей электронному газу.

Как правило, при рассмотрении рассеяния в плоской среде считается, что источники излучения и само поле излучения не зависят от времени и от азимута, т. е. аргументами интенсивности (или средних чисел заполнения) являются глубина и угол направления импульса фотона с нормалью к границе среды. Положим в этом случае $n = n(\tau_T, \eta, x)$, где τ_T — томсоновская оптическая глубина в плоской среде, т. е. глубина, измеренная в длинах свободного пробега по отношению к томсоновскому рассеянию $1/(\sigma_T n_e)$. Тогда уравнение переноса предстанет в форме

$$\eta \frac{\partial n}{\partial \tau_T} = - \frac{1}{x} \int_0^\infty x_1 dx_1 \int_{-1}^1 \frac{d\eta_1}{2} \{ R(x, \eta; x_1, \eta_1) n(\tau_T, \eta, x) [1 + n(\tau_T, \eta_1, x_1)] - R(x_1, \eta_1; x, \eta) n(\tau_T, \eta_1, x_1) [1 + n(\tau_T, \eta, x)] \}, \quad (56)$$

где усредненная по азимуту ФП

$$R(x, \eta; x_1, \eta_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R(x, x_1, \mu) d\varphi. \quad (57)$$

При усреднении число аргументов ФП увеличивается, так как $\mu = \eta\eta_1 + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}\cos\varphi$.

Наконец, предположим, что изотропный электронный газ однородно заполняет все пространство и в этом пространстве находится изотропное и однородное поле излучения. Электроны и фотоны взаимодействуют через комптоновское рассеяние. Распределение электронов по энергиям поддерживается каким-то постоянным механизмом.

В таком случае среднее число заполнения фотонных состояний зависит только от двух переменных: частоты и времени, так что $n = n(x, t)$ и $n_{11} = n(x_1, t)$. Эта величина определяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = & -\frac{\sigma_{\Gamma} n_{\epsilon}}{x} \int_0^{\infty} \left[\bar{R}(x, x_1) n(x, t) (1 + n(x_1, t)) - \right. \\ & \left. - \bar{R}(x_1, x) n(x_1, t) (1 + n(x, t)) \right] x_1 dx_1. \end{aligned} \quad (58)$$

Здесь функция перераспределения, усредненная по направлениям:

$$\bar{R}(x, x_1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 R(x, x_1, \mu) d\mu. \quad (59)$$

Аналитические выражения для усредненной по направлениям функции $R(x, x_1, \mu, \gamma)$ получены в статьях [36, 78] (см. ниже).

Уравнение (58) становится определенным, если к нему добавить начальное условие, т. е. задать $n(x, 0)$.

Из уравнения (58) также вытекает условие сохранения числа фотонов. Действительно, после умножения (58) на x^2 и интегрирования по всем частотам справа получается на этот раз двойной интеграл, симметричный относительно частот падающего и рассеянного фотонов, и поэтому равный нулю, так что

$$\frac{dN}{dt} = 0, \quad N = \int_0^{\infty} x^2 n(x, t) dx = \int_0^{\infty} x^2 n(x, 0) dx. \quad (60)$$

§ 3. Средние величины

1. *Полное сечение рассеяния.* Множитель, стоящий справа в уравнении (55) при n , является коэффициентом ослабления (поглощения) за счет комптоновского рассеяния и выражается через усредненное полное сечение комптоновского рассеяния.

Полное сечение рассеяния представляется интегралом от дифференциального (29) по всем направлениям рассеянного фотона $\vec{\omega}_1$.

Импульсы электрона \vec{z} и фотона \vec{x} до рассеяния считаем закрепленными. Полное сечение как инвариантная величина зависит только от скалярного произведения $\xi = \underline{z} \underline{x} = x(\gamma - z\zeta)$:

$$\sigma(\xi) = \frac{r_e^2}{2\xi^2} \int F(\xi, \xi_1) x_1^2 d^2\omega_1. \quad (61)$$

Вычислять интеграл проще не в переменных μ и Φ , а в переменных лабораторной системы μ_0 (или ξ_1) и Φ_0 . Первую формулу в (13) можно переписать в виде $\xi_1 = \xi/[1 + \xi(1 - \mu_0)]$, из чего следует, что ξ_1 изменяется от $\xi/(1+2\xi)$ при $\mu_0 = -1$ до ξ при $\mu_0 = 1$. От азимута Φ_0 величина F не зависит, так что

$$\sigma(\xi) = \frac{r_e^2}{2\xi^2} \int_{-1}^1 F(\xi, \xi_1) \xi_1^2 d\mu_0 \int_0^{2\pi} d\Phi_0 = \frac{r_e^2}{2\xi^2} 2\pi \int_{\xi/(1+2\xi)}^{\xi} F(\xi, \xi_1) d\xi_1 = \sigma_T s_0(\xi). \quad (62)$$

Здесь $s_0(\xi)$ — профиль полного сечения

$$s_0(\xi) = \frac{3}{8\xi^2} \left[4 + \left(\xi - 2 - \frac{2}{\xi} \right) l_\xi + 2\xi^2(1 + \xi)R_\xi^2 \right], \quad (63)$$

где для сокращения записи этой и дальнейших формул введены обозначения

$$l_\xi = \ln(1 + 2\xi), \quad R_\xi = \frac{1}{1 + 2\xi}. \quad (64)$$

Профиль нормирован условием $s_0(0) = 1$. Таким образом, релятивистский инвариант — полное сечение — в нерелятивистском пределе, когда частота фотона $x \rightarrow 0$, а вместе с ней и $\xi \rightarrow 0$, переходит в томсоновское сечение.

2. Средняя частота. Определим среднюю степень частоты излучаемого фотона при фиксированных энергиях электрона γ и фотона x и косинусе угла между ними ζ (или величине $\xi = x(\gamma - z\zeta)$) равенством

$$\langle x_1^l \rangle s_0(\xi) = \frac{3}{16\pi\xi^2} \int x_1^{l+2} F(\xi, \xi_1) d^2\omega_1. \quad (65)$$

При $l = 0$ получается формула для профиля коэффициента ослабления (63). Вычислим средние при $l = 1$ и $l = 2$, как и в предыдущем пункте, в переменных ξ_1 и Φ_0 . Частота рассеянного фотона

выражается формулой, которая следует из вторых равенств в (19) и (15):

$$x_1 = \xi_1 \left[\gamma + z \left(\mu_0 \zeta_0 + \sqrt{1 - \mu_0^2} \sqrt{1 - \zeta_0^2} \right) \right]. \quad (66)$$

Входящие в это выражение μ_0 и ζ_0 можно исключить с помощью равенств (24) и первого в (19).

Для получения выражений для средней частоты и дисперсии определим инвариантные функции

$$s_l(\xi) = \frac{3}{8\xi^{l+2}} \int_{\xi/(1+2\xi)}^{\xi} \xi^l F(\xi, \xi_1) d\xi_1. \quad (67)$$

В частности, $s_0(\xi)$ совпадает с определяемым формулой (62) профилем, и в тех же обозначениях

$$s_1(\xi) = \frac{3}{8\xi^3} \left(l\xi + \frac{4}{3}\xi^2 - \frac{3}{2}\xi - \frac{\xi}{2}R_\xi - \frac{\xi^2}{3}R_\xi^3 \right), \quad s_2(\xi) = \left(1 + 4\xi + 7\xi^2 + \frac{9}{2}\xi^3 \right) R_\xi^4. \quad (68)$$

Для средней частоты рассеиваемого фотона находим

$$\langle x_1 \rangle s_0(\xi) = \xi [\gamma S_1(\xi) + x S_2(\xi)], \quad (69)$$

а для среднего ее квадрата $\langle x_1^2 \rangle s_0(\xi) =$

$$= x^2 s_2(\xi) + (4\gamma x \xi - 3x^2 - \xi^2) S_3(\xi) + \left(\gamma^2 \xi^2 - 3\gamma x \xi + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\xi^2 \right) S_4(\xi). \quad (70)$$

Входящие сюда функции $S_j(\xi)$ выражаются через уже введенные функции s_j , причем мы их определили так, чтобы они не обращались в нуль при $\xi = 0$:

$$S_1(\xi) = \frac{s_0(\xi) - s_1(\xi)}{\xi}, \quad S_2(\xi) = \frac{s_1(\xi) - S_1(\xi)}{\xi}, \quad (71)$$

$$S_3(\xi) = \frac{s_1(\xi) - s_2(\xi)}{\xi}, \quad S_4(\xi) = \frac{S_1(\xi) - S_3(\xi)}{\xi}. \quad (72)$$

Все приведенные функции элементарны. При малых значениях их аргументов возможна потеря точности при прямом их вычислении, в таких случаях можно, например, применить разложения в ряды:

$$s_l(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{l,n} (-2\xi)^n, \quad S_l(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{l,n} (-2\xi)^n. \quad (73)$$

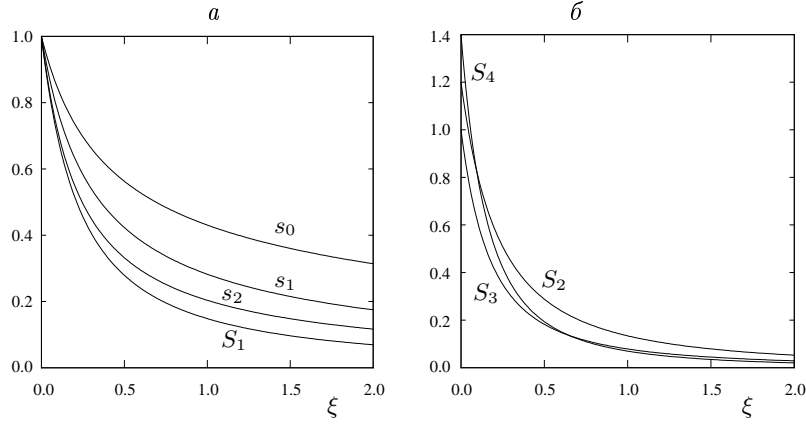


Рис. 2. Функции $s_i(\xi)$ и $S_i(\xi)$.

Коэффициенты рядов являются рациональными функциями номера n :

$$a_{0,n} = \frac{3}{8} \left(n + 2 + \frac{2}{n+1} + \frac{8}{n+2} - \frac{16}{n+3} \right), \quad (74)$$

$$a_{1,n} = \frac{1}{8} \left[n(n+5) + \frac{24}{n+3} \right], \quad a_{2,n} = \frac{n^3 + 9n^2 + 22n + 32}{32}. \quad (75)$$

Коэффициенты рядов больших функций выражаются через эти:

$$A_{1,n} = 2(a_{1,n+1} - a_{0,n+1}), \quad A_{2,n} = 2(A_{1,n+1} - a_{1,n+1}), \quad (76)$$

$$A_{3,n} = 2(a_{2,n+1} - a_{1,n+1}), \quad A_{4,n} = 2(A_{3,n+1} - A_{1,n+1}). \quad (77)$$

При вычислении функции s_2 потерь точности не происходит.

Впрочем, не обязательно использовать полные разложения в ряды, достаточно разложить в ряд только функцию $\ln(1+2\xi)$, выделить первые слагаемые до нужного порядка, остаток найти через ряд, а затем произвести сокращения первых степеней ξ аналитически.

Нетрудно получить разложения и при больших значениях ξ :

$$s_0(\xi) = \frac{3}{8\xi^2} \left[\left(\xi - 2\frac{2}{\xi} \right) \ln(2\xi) + \frac{\xi}{2} + \frac{9}{2} - \frac{5}{4\xi} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\xi} \right)^{n+2} b_{0,n} \right], \quad (78)$$

$$s_1(\xi) = \frac{3}{8\xi^2} \left[\frac{4}{3}\xi - \frac{3}{2} + \frac{1}{\xi} \ln(2\xi) - \frac{1}{4\xi} - \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\xi}\right)^{n+2} b_{1,n} \right], \quad (79)$$

$$s_2(\xi) = \frac{3}{8\xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2\xi}\right)^{n+2} b_{2,n}, \quad (80)$$

причем $b_{l,n} = -\frac{2}{3}a_{l,-(n+4)}$. Разложения функций S_l получаются по формулам (71).

На рис. 2 изображены графики функций $s_i(\xi)$ и $S_i(\xi)$.

Разложения рассматриваемых функций в ряды (73) позволяют получить их интегральные представления, которые можно использовать в дальнейших преобразованиях. Такая возможность основана на применении теории вычетов к суммированию рядов со слагаемыми, являющимися рациональными функциями переменной суммирования n (см. [10] стр. 213):

$$s_l(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} (2\xi)^p a_{l,p} \frac{\pi}{\sin(\pi p)} dp \quad (81)$$

и аналогичная формула для $S_l(\xi)$. Легко проверить, что при $2\xi < 1$ контур интегрирования можно преобразовать к положительной части вещественной оси и взять вычеты в полюсах дроби, т. е. в положительных нулях $\sin(\pi p)$. Вычет дроби $\pi/\sin(\pi p)$ в точке $p = n$ равен $(-1)^n$. В результате получатся разложения (73). Напротив, при $2\xi > 1$ контур можно преобразовать к отрицательной части той же оси. При этом наряду с простыми полюсами, происходящими от $\sin(\pi p)$, в точках, где обращаются в нуль также знаменатели коэффициентов $a_{l,n}$ и $A_{l,n}$ (таких знаменателей нет у $a_{2,n}$), возникают двукратные полюсы. Взятие вычетов в простых полюсах дает суммы в разложениях (78)–(79), а слагаемые вне сумм появляются от вычетов в двукратных полюсах.

Выражения для $\langle x_1 \rangle$ были получены в работах [69, 1, 85, 57].

В следующих пунктах произведем дальнейшее усреднение, на этот раз — по импульсам электронов до рассеяния: сначала по их направлениям, а затем — по распределению энергий. Ограничимся средней частотой.

3. *Усреднение по направлениям.* Зафиксировав энергию электрона и частоту фотона, усредним введенные выше величины по

направлению импульса электронов, т. е. по направлению вектора $\vec{\Omega}$. Так как среда предполагается изотропной (изотропно распределение электронов), то средние не будут зависеть от направления рассеиваемого фотона $\vec{\omega}$.

Введем функции

$$\Psi_l(x, \gamma) = \frac{1}{4\pi\gamma x^{l+1}} \int d^2\Omega \langle x_1^l \rangle \xi s_0(\xi). \quad (82)$$

Интеграл будем вычислять в сферических переменных: косинусе полярного угла ζ и азимуте Φ . Тогда $d^2\Omega = d\zeta d\Phi$, причем от Φ ничего не зависит. Переменную ζ выразим из равенства (17) через ξ : $\zeta = (\gamma - \xi/x)/z$, $d\zeta = -d\xi/(xz)$. Пределы интегрирования по ζ получаются при $\zeta = -1$ и $\zeta = 1$:

$$\Psi_l(x, \gamma) = \frac{1}{2\gamma z x^{l+2}} \int_{x(\gamma-z)}^{x(\gamma+z)} \langle x_1^l \rangle \xi s_0(\xi) d\xi. \quad (83)$$

Подставив формулы предыдущего пункта, найдем для $l = 0$ и $l = 1$

$$\Psi_0(x, \gamma) = \frac{u^2}{4\gamma z} \psi_{10}(xu) \Big|_{\gamma-z}^{\gamma+z}, \quad \Psi_1(x, \gamma) = \frac{u^3}{6\gamma z} [\gamma \Psi_{21}(xu) + x \Psi_{22}(xu)] \Big|_{\gamma-z}^{\gamma+z}, \quad (84)$$

где введены еще следующие функции:

$$\psi_{ml}(\xi) = \frac{m+1}{\xi^{m+1}} \int_0^\xi \xi'^m s_l(\xi') d\xi', \quad \Psi_{ml}(\xi) = \frac{m+1}{\xi^{m+1}} \int_0^\xi \xi'^m S_l(\xi') d\xi'. \quad (85)$$

Все приведенные функции либо полностью элементарны, либо содержат одну дополнительную функцию

$$g_C(\xi) = \int_0^\xi \ln(1 + \xi') \frac{d\xi'}{\xi'}. \quad (86)$$

Эта функция представляется альтернативными рядами при малых ξ и при ξ , близких к единице:

$$g_C(\xi) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\xi^n}{n^2}, & 0 \leq \xi \leq \xi_*, \\ \frac{\pi^2}{12} + \ln 2 \cdot \ln \xi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-\xi)^{k+2}}{k+2} \sum_{m=1}^{k+1} \frac{1}{m2^m}, & \xi_* \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (87)$$

В качестве ξ_* можно взять 0.8–0.9. При $\xi > 1$ эта функция выражается через свои значения при $\xi \leq 1$:

$$g_C(\xi) = 2g_C(1) + \frac{1}{2} \ln^2 \xi - g_C(1/\xi), \quad g_C(1) = \frac{\pi^2}{12}. \quad (88)$$

Для вычисления введенных функций необходимы следующие функции одного аргумента:

$$\psi_{00}(\xi) = \frac{3}{8\xi} \left[g_C(2\xi) - \frac{2}{\xi} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} \right) l_\xi - \frac{1}{2} R_\xi - \frac{3}{2} \right], \quad (89)$$

$$\psi_{01}(\xi) = \frac{3}{8\xi} \left[\frac{1}{\xi} - \frac{1}{2} + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2\xi^2} \right) l_\xi - \frac{1}{3} R_\xi - \frac{1}{6} R_\xi^2 \right], \quad (90)$$

$$\psi_{10}(\xi) = \frac{3}{4\xi^2} \left[\left(\xi + \frac{9}{2} + \frac{2}{\xi} \right) l_\xi - 4 - \xi + \xi^2 R_\xi - 2g_C(2\xi) \right], \quad (91)$$

$$\psi_{11}(\xi) = \frac{1}{4\xi^2} \left[6 + 4\xi - 3 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{\xi} \right) l_\xi - \xi(1 + \xi) R_\xi^2 \right]. \quad (92)$$

Через них выражаются

$$\Psi_{11}(\xi) = \frac{2}{\xi} [\psi_{00}(\xi) - \psi_{01}(\xi)], \quad \Psi_{21}(\xi) = \frac{3}{2\xi} [\psi_{10}(\xi) - \psi_{11}(\xi)], \quad (93)$$

$$\Psi_{22}(\xi) = \frac{3}{2\xi} [\psi_{11}(\xi) - \Psi_{11}(\xi)]. \quad (94)$$

Разложения в ряды этих функций не требуют введения новых коэффициентов:

$$\psi_{ml}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{l,n} (-2\xi)^n \frac{m+1}{m+n+1}, \quad \Psi_{ml}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{l,n} (-2\xi)^n \frac{m+1}{m+n+1}. \quad (95)$$

Теперь можно получить разложения функций (84). Ограничимся первыми тремя слагаемыми по степеням $x < 1/\gamma$:

$$\Psi_0(x, \gamma) \sim 1 - \frac{2}{3}(4\gamma^2 - 1)\frac{x}{\gamma} + \frac{26}{5}(2\gamma^2 - 1)x^2, \quad (96)$$

$$\Psi_1(x, \gamma) \sim \frac{4\gamma^2 - 1}{3} - \frac{42\gamma^4 - 29\gamma^2 + 2}{5}\frac{x}{\gamma} + \frac{1176\gamma^4 - 1147\gamma^2 + 206}{25}x^2. \quad (97)$$

Разложения согласуются с предельными значениями этих функций $\Psi_l(x, 1) = s_l(x)$.

Аналогично находятся разложения при больших $x > \gamma$. Выпишем их вплоть до степени $1/x^4$:

$$\begin{aligned} \Psi_0(x, \gamma) = \frac{3}{8\gamma x^2} & \left[\left(x - 2L_z - \frac{2}{x} \right) \ln(2x) + \left(L_z\gamma - \frac{1}{2} \right) x + \right. \\ & \left. + \frac{9}{2}L_z + \left(L_z\gamma - \frac{13}{8} \right) \frac{2}{x} - \frac{7}{12} \frac{\gamma}{x^2} \right], \quad (98) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, \gamma) = \frac{3}{8\gamma x^2} & \left[\left(\gamma - L_z + \frac{3 - 2L_z\gamma}{x} \right) \ln(2x) + \frac{4}{3}x + \left(\gamma^2 - \frac{2}{3} \right) L_z - \right. \\ & \left. - \frac{11}{6}\gamma + \left(3L_z\gamma - \frac{13}{4} \right) \frac{1}{x} - \left(\frac{3}{2}L_z - \frac{11}{12} \right) \frac{1}{x^2} \right]. \quad (99) \end{aligned}$$

Здесь $L_z = \frac{\ln(\gamma + z)}{z}$.

Имеется ещё одна область, где возможны упрощения рассматриваемых функций, а именно область, задаваемая неравенством $\gamma > \max(1, 1/x)$. Здесь

$$\Psi_0(x, \gamma) \sim \frac{3}{8} \frac{1}{x\gamma} \left(\ln(4x\gamma) - \frac{1}{2} \right), \quad \Psi_1(x, \gamma) \sim \frac{3}{8} \frac{1}{x^2} \left(\ln(4x\gamma) - \frac{11}{6} + \frac{4}{3} \frac{x}{\gamma} \right). \quad (100)$$

4. *Усреднение по энергиям.* Теперь можно усреднить введенные функции по энергиям электронов, вычислив интегралы

$$\overline{x_1^l(x)} \overline{s_0(x)} = 4\pi x^l \int_0^\infty z^2 f_e(\gamma) dz \Psi_l(x, \gamma). \quad (101)$$

В частности для максвелловского распределения после интегрирования по частям и перехода от переменной интегрирования z к γ найдем

$$\bar{s}_0(x, y) = \frac{1}{2K_2(y)} \int_1^\infty e^{-y\gamma} \frac{d\gamma}{z} u^2 s_0(xu) \Big|_{\gamma-z}^{\gamma+z}, \quad (102)$$

$$\frac{\bar{x}_1(x, y)}{x} \bar{s}_0(x, y) = \int_1^\infty \frac{e^{-y\gamma}}{2K_2(y)} \frac{d\gamma}{z} u^3 \left[\left(\gamma + \frac{1}{y} \right) S_1(xu) + x S_2(xu) \right] \Big|_{\gamma-z}^{\gamma+z}. \quad (103)$$

Знак плюс между пределами подстановки означает, что требуется составить не разность результатов подстановки пределов, а их сумму.

Аналогично получается представление среднего квадрата частоты: $\bar{x}_1^2(x, y) \bar{s}_0(x, y) / x^2 =$

$$\begin{aligned} &= \int_1^\infty \frac{e^{-y\gamma}}{2K_2(y)} \frac{d\gamma}{z} u^2 \left\{ s_2(xu) - \left[u^2 + 3 \left(\gamma + \frac{1}{y} \right) u + 3 \right] S_3(xu) + \right. \\ &+ \left. \left[\left(\gamma^2 + \frac{2\gamma}{y} + \frac{2}{y^2} + \frac{1}{2} \right) u^2 - 3 \left(\gamma + \frac{1}{y} \right) u + \frac{3}{2} \right] S_4(xu) \right\} \Big|_{\gamma-z}^{\gamma+z}. \quad (104) \end{aligned}$$

Формула (81) позволяет получить другое представление максвелловских средних. Например, если подставить $s_0(\xi)$ согласно этой формуле в выражение (102), то получится

$$\bar{s}_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} (2x)^p a_{0,p} \frac{\pi}{\sin(\pi p)} f_{p+2}(y) dp, \quad (105)$$

где $f_p(y) = \frac{K_{p+2}(y)}{K_2(y)}$. Отсюда при $2x < 1$ и $2x > 1$ путем преобразования контура интегрирования налево и направо, как это описано в конце пункта 2, выводятся разложения

$$\bar{s}_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n a_{0,n} f_{n+2}(y), \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \bar{s}_0(x, y) &= \frac{3}{8x^2} \left\{ \left[\left(x - \frac{2}{x} \right) f_1(y) - 2f_0(y) \right] \ln(2x) + \left(\frac{x}{y} + \frac{9}{2} + \frac{2}{xy} \right) f_0(y) + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{4x} \right) f_1(y) \right\} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2x} \right)^{n+4} b_{0,n} f_{n+2}(y). \quad (107) \end{aligned}$$

Приведенные формулы использовались для расчета коэффициента ослабления за счет комптоновского рассеяния в работе [39]. Там же оценена точность приближенных формул для этого коэффициента.

Аналогичные разложения можно получить и для остальных функций. Для средней частоты и среднего ее квадрата надо исходить из формул $\overline{x_1} \overline{s_0}(x, y)/x =$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} \frac{\pi(2x)^p dp}{\sin(\pi p)} \left[a_{1,p} f_{p+2}(y) + A_{1,p} \frac{p+4}{y} f_{p+3}(y) \right], \quad (108)$$

$$\begin{aligned} \frac{\overline{x_1^2}}{x^2} \overline{s_0}(x, y) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} (2x)^p \frac{\pi}{\sin(\pi p)} dp \left[a_{2,p} f_{p+2}(y) + \right. \\ & \left. + 2A_{3,p} \frac{p+5}{y} f_{p+3}(y) + A_{4,p} \frac{p^2+11p+30}{y^2} f_{p+4}(y) \right]. \quad (109) \end{aligned}$$

Представления вида (105) особенно ценны тем, что дают возможность облегчить вычисление введенных функций при высоких температурах, когда параметр y мал и подынтегральные функции в формулах (102)–(104) убывают медленно. Тогда можно вычислять интегралы прямо по написанному контуру (или по смещенному на целое число влево или вправо во избежание попадания на полюс). После приведения интегралов к вещественному виду убывание подынтегральных функций достигается за счет роста знаменателя, т. е. $\sin(\pi p)$ при увеличении мнимой части p . Вычисление функции Макдональда мнимого порядка не представляет больших трудностей, так как при малом аргументе y можно воспользоваться разложением этой функции в степенной ряд.

Подробности вычисления этих величин приведены в статье [37]. В статье [36] и обзоре [78] выведены ряды и асимптотические разложения для приведенных здесь функций, а также такие же формулы для средних от произведения $x_1(1-\mu)$, через которые выражается давление излучения.

5. *Баланс энергии.* Применим полученные формулы для оценок потерь энергии фотонного газа при рассеянии электронами. Разность $x - x_1$, где x_1 определяется формулой (11), — это (безразмерная) энергия, которую теряет фотон с импульсом \vec{x} при рассеянии электроном с импульсом \vec{z} , если после рассеяния фотон ле-

тит в направлении вектора $\vec{\omega}_1$. Если эта разность отрицательна, то ее модуль означает приобретаемую фотоном энергию. Разность $x - \langle x_1 \rangle$ — та же энергия, усредненная по направлениям $\vec{\omega}_1$. Произведение $(x - \langle x_1 \rangle)n_e\sigma_T s_0(\xi) = n_e\sigma_T(x + x\xi - \gamma\xi)S_1(\xi)$ — энергия, которую теряет фотон с импульсом \vec{x} за счет рассеяния теми же электронами на единице пути. Далее, средняя энергия, теряемая фотоном с частотой x при рассеянии изотропным ансамблем электронов с определенной энергией γ , есть $x[1 - \Psi_1(x, \gamma)]/\Psi_0(x, \gamma)$, а $x[\Psi_0(x, \gamma) - \Psi_1(x, \gamma)]n_e\sigma_T$ — энергия, теряемая фотоном на единице пути в слое таких электронов. Наконец, $x - \bar{x}_1$ — энергия, которую теряет фотон с частотой x при рассеянии максвелловскими электронами (вообще говоря, релятивистскими). После умножения этой разности на $n_e\sigma_T$ получаются потери энергии на единице пути фотона. Очевидно, что энергия фотонов передается электронам и наоборот.

Приведем некоторые асимптотические формулы для величины потерь энергии фотоном при рассеянии моноэнергетическим изотропным ансамблем электронов. При малых частотах фотона $x \ll 1/\gamma$ потери находятся с помощью рядов. Приведем главные слагаемые. На единице пути

$$\Psi_1(x, \gamma) - \Psi_0(x, \gamma) \sim \frac{4}{3}z^2 - \frac{126\gamma^4 - 127\gamma^2 + 16}{15} \frac{x}{\gamma} + \frac{1176\gamma^4 - 1407\gamma^2 + 336}{25} x^2, \quad (110)$$

а при одном акте рассеяния $\Psi_1(x, \gamma)/\Psi_0(x, \gamma) - 1 \sim$

$$\sim \frac{4}{3}z^2 - \frac{218\gamma^4 - 181\gamma^2 + 8}{45} \frac{x}{\gamma} + \frac{13672\gamma^6 - 14529\gamma^4 + 2262\gamma^2 + 80}{675} \frac{x^2}{\gamma^2}. \quad (111)$$

В противоположном случае $x \gg 1$ главные слагаемые разложений

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, \gamma) - \Psi_0(x, \gamma) &\sim \frac{3}{8\gamma x^2} \left[-x \left(\ln(2x) + L_z \gamma - \frac{11}{6} \right) + \right. \\ &+ (\gamma + L_z) \ln(2x) + L_z \left(\gamma^2 - \frac{31}{6} \right) - \frac{11}{6} \gamma \left. \right], \quad \frac{\Psi_1(x, \gamma)}{\Psi_0(x, \gamma)} - 1 \sim \\ &\sim - \frac{\ln(2x) + L_z \gamma - 11/6 - [(\gamma + L_z) \ln(2x) + L_z(\gamma^2 - 31/6) - 11/6]/x}{\ln(2x) + L_z \gamma - 1/2 - L_z(2 \ln(2x) - 9/2)/x}. \end{aligned} \quad (113)$$

На рис. 3 приведены графики обсуждаемых величин при $z=0$, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0 и соответствующих им $\gamma=1.0, 1.118, 1.414, 2.236$,

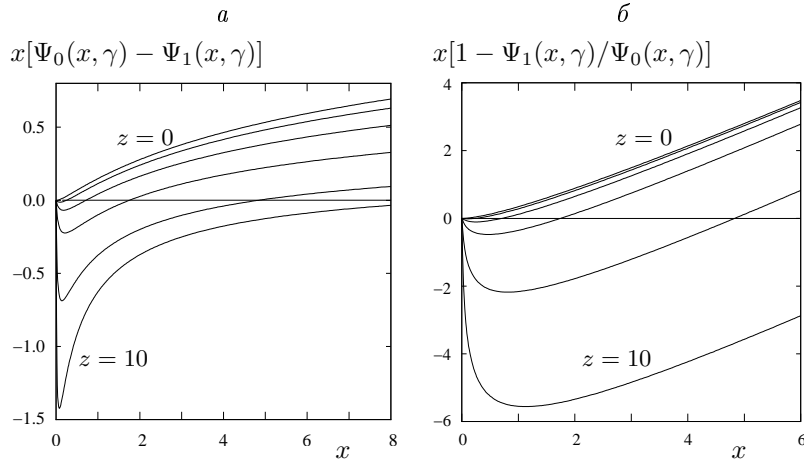


Рис. 3. Средние потери энергии фотона частоты x при рассеянии моноэнергетическими электронами с изотропным распределением при $z = 0, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0$: *a* — на единице оптического расстояния по томсоновскому рассеянию; *б* — при однократном рассеянии.

5.099, 10.050. Кривые зависимостей потерь энергии от частоты фотона расположены для таких z и γ сверху вниз. Как ясно из физических соображений, при малых частотах фотон приобретает энергию, а при больших — теряет. На единице оптического расстояния по томсоновскому рассеянию смена роста приобретения энергии фотоном его уменьшением происходит более круто, чем при однократном рассеянии. Следует отметить, что ослабление пучка фотонов при рассматриваемых процессах не учитывается. Примерно такой же характер имеет зависимость потерь энергии фотонов от температуры при их рассеянии на максвелловском электронном газе, но более сглаженный.

Баланс энергий между фотонным и электронным газами рассматривался в публикациях, цитированных в работе [36] и обзоре [78]. Многие формулы содержатся также в обзорных работах [42, 43].

§ 4. Вычисление функции перераспределения

1. *Вычисление интеграла по азимуту.* В первых двух пунктах этого параграфа вычислим двойной интеграл в (53), представляющий ФП при рассеянии моноэнергетическими электронами.

Представим двойной интеграл как повторный, выбрав в качестве переменных интегрирования косинус ζ угла между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$, а также азимут φ — двугранный угол между плоскостями $\vec{\Omega}, \vec{\omega}$ и $\vec{\omega}, \vec{\omega}_1$. Для этого определим два орта, построенные на векторах $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}_1$:

$$\vec{e}_{(1)} = \frac{\vec{\omega}_1 - \mu\vec{\omega}}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \vec{e}_{(2)} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{\omega}_1}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad (114)$$

и разложим по ним и вектору $\vec{\omega}$ орт

$$\vec{\Omega} = \sqrt{1 - \zeta^2}(\cos \varphi \vec{e}_{(1)} + \sin \varphi \vec{e}_{(2)}) + \zeta \vec{\omega}. \quad (115)$$

Легко убедиться, что тройка $\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{\omega}$ получается из тройки (5) поворотом на угол Φ вокруг вектора $\vec{\omega}$. Таким образом, $\varphi = -\Phi$ и формула (7) сохраняется.

Примем во внимание наличие дельта-функции. Сечение F оказывается не зависящим от азимута φ . Представим его в виде разложения на простейшие дроби относительно ξ и $\xi_1 = \xi - q$:

$$F(\xi, \xi_1) = 2 + \frac{2 + 2q - q^2}{q} \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi - q} \right) + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi - q)^2}. \quad (116)$$

Определение ФП (53) теперь можно переписать так:

$$R(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{z}{2\pi} \int d\zeta F(\xi, \xi - q) R(x, x_1, \mu, \gamma, \zeta), \quad (117)$$

где ФП, зависящая от косинуса ζ :

$$R(x, x_1, \mu, \gamma, \zeta) = \int_0^{2\pi} d\varphi \delta(\xi - \xi_1 - q). \quad (118)$$

Вычислим сначала последнюю функцию при дополнительном предположении, что $zx_1\sqrt{1 - \mu^2} \neq 0$.

Через введенные переменные величины аргумент дельта-функции представляется в следующем виде:

$$\xi - \xi_1 - q = \gamma(x - x_1) - q + z[x_1((\mu\zeta + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\zeta^2}\cos\varphi) - x\zeta)]. \quad (119)$$

Для того, чтобы интеграл от дельта-функции не был равен нулю, ее аргумент должен обращаться в нуль, так что должно быть $\cos\varphi = \cos\varphi_0$, где

$$\cos\varphi_0 = \frac{P + z(x\zeta - x_1\mu\zeta)}{x_1z\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad P = \gamma(x_1 - x) + q. \quad (120)$$

Последняя дробь не должна превосходить по модулю 1, т. е.

$$G(\zeta, \gamma, x, x_1, \mu) = z^2x_1^2(1-\mu^2) - P^2 + 2P(x_1\mu - x)z\zeta - z^2\zeta^2Q^2 \geq 0, \quad (121)$$

где обозначено

$$Q = |\vec{x} - \vec{x}_1| = \sqrt{x^2 - 2xx_1\mu + x_1^2} = \sqrt{(x - x_1)^2 + 2q}. \quad (122)$$

Неравенство накладывает ограничения на значения переменной ζ . Она должна быть заключена между корнями квадратичной функции по ζ (121):

$$\zeta_- \leq \zeta \leq \zeta_+, \quad \zeta_{\pm} = \frac{(x_1\mu - x)P \pm x_1\sqrt{1-\mu^2}\Delta}{zQ^2}, \quad (123)$$

где

$$\Delta = \sqrt{z^2Q^2 - P^2}. \quad (124)$$

Эти корни являются пределами интегрирования по ζ . Чтобы корни существовали, подкоренное выражение в (124) должно быть неотрицательным:

$$z^2Q^2 - P^2 \geq 0. \quad (125)$$

При выполнении указанных условий имеется два значения азимута φ , при которых аргумент дельта-функции обращается в нуль: $\varphi = \varphi_0$ и $\varphi = 2\pi - \varphi_0$. Значения синуса в этих углах отличаются знаком. Воспользуемся равенством, отражающим свойства дельта-функции: если $|a| < |b|$ и $\cos\varphi_0 = a/b$, то

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \delta(a - b\cos\varphi) = \frac{2}{|b|} \frac{1}{|\sin\varphi_0|} = \frac{2}{|b|} \frac{1}{\sqrt{1-a^2/b^2}} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}}. \quad (126)$$

Применив формулу (126) к (117) с аргументом дельта-функции (119) при условиях (121) и (125), получим

$$R(x, x_1, \mu, \gamma, \zeta) = \frac{2}{\sqrt{G(\zeta, \gamma, x, x_1, \mu)}}. \quad (127)$$

Легко убедиться, что функцию (121) можно представить через ее корни (123):

$$G(\zeta, \gamma, x, x_1, \mu) = z^2 Q^2 (\zeta_+ - \zeta)(\zeta - \zeta_-). \quad (128)$$

2. *Вычисление интеграла по косинусу ζ .* После вычисления интеграла по азимуту интеграл (117), представляющий зависящую от энергии электрона ФП $R(x, x_1, \mu, \gamma)$, можно переписать в виде

$$R(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{1}{Q\pi} \int_{\zeta_-}^{\zeta_+} F(\xi, \xi - q) \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta_+ - \zeta)(\zeta - \zeta_-)}}. \quad (129)$$

Возникающие при этом интегралы, отвечающие отдельным слагаемым в выражении (116), вычисляются подстановкой

$$\zeta = \frac{\zeta_+ + \zeta_-}{2} - \frac{\zeta_+ - \zeta_-}{2} \cos \chi, \quad (130)$$

при которой оказывается $\frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta_+ - \zeta)(\zeta - \zeta_-)}} = d\chi$, а новая переменная χ изменяется в пределах от 0 до π , так что интеграл от первого слагаемого в формуле для F равен $2/Q$.

Для других слагаемых получаем

$$\xi = \frac{q}{Q^2} [\gamma(x + x_1) - x(x_1\mu - x) + r\Delta \cos \chi], \quad (131)$$

$$\xi - q = \frac{q}{Q^2} [\gamma(x + x_1) + x_1(x\mu - x_1) + r\Delta \cos \chi]. \quad (132)$$

С этими слагаемыми возникают две пары интегралов, приводящихся к интегралам Приложения В. Используя эти интегралы, находим

$$R(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{2}{Q} + \frac{q^2 - 2q - 2}{q^2} \left(\frac{1}{a(\gamma, \mu, -x_1)} - \frac{1}{a(\gamma, \mu, x)} \right) + \frac{1}{q^2} \left[\frac{A_-(\gamma, \mu, x, x_1)}{a^3(\gamma, \mu, -x_1)} + \frac{A_+(\gamma, \mu, x, x_1)}{a^3(\gamma, \mu, x)} \right]. \quad (133)$$

Здесь введены обозначения для функций трех и четырех аргументов:

$$a(\gamma, \mu, x) = \sqrt{(\gamma + x)^2 + r_\mu^2}, \quad r_\mu = \sqrt{\frac{1 + \mu}{1 - \mu}}, \quad (134)$$

$$A_\pm(\gamma, \mu, x, x_1) = \frac{a^2(\gamma, \mu, x) - a^2(\gamma, \mu, -x_1) \pm Q^2}{2}. \quad (135)$$

ФП для обратного рассеяния с той же энергией электронов

$$R(x_1, x, \mu, \gamma) = \frac{2}{Q} + \frac{q^2 - 2q - 2}{q^2} \left(\frac{1}{a(\gamma, \mu, -x)} - \frac{1}{a(\gamma, \mu, x_1)} \right) + \frac{1}{q^2} \left[\frac{A_-(\gamma, \mu, x_1, x)}{a^3(\gamma, \mu, -x)} + \frac{A_+(\gamma, \mu, x_1, x)}{a^3(\gamma, \mu, x_1)} \right]. \quad (136)$$

Отметим, что в наших прежних работах ФП обозначались с обратным порядком частот в их аргументах.

3. *Ограничения на значения переменных.* Посмотрим, к каким ограничениям на переменные приводят требования выполнения неравенств, отражающих условия отличия от нуля функции (127). Конечно, для каждой из переменных подразумеваются естественные требования, соответствующие ее физическому смыслу: $x \geq 0$, $x_1 \geq 0$, $-1 \leq \mu \leq 1$, $\gamma \geq 1$.

Ограничения на отдельные переменные имеют тот или иной вид в зависимости от того, какие другие переменные при этом закреплены. При вычислении интеграла в (54) закрепляются частоты x и x_1 , а также косинус угла рассеяния μ . Тогда из неравенства (125) находим, что должно выполняться условие

$$\gamma \geq \gamma_*(x_1, x, \mu), \quad \gamma_*(x_1, x, \mu) = \frac{1}{2} \left(x_1 - x + Q \sqrt{1 + \frac{2}{q}} \right). \quad (137)$$

Функция $\gamma_*(x_1, x, \mu)$ служит нижним пределом в интеграле по энергии (54). Соответствующее этому значению энергии значение величины импульса

$$z_*(x_1, x, \mu) = \frac{1}{2} \left[(x_1 - x) \sqrt{1 + \frac{2}{q}} + Q \right]. \quad (138)$$

Неравенство (125) можно записать в другом виде, возведя его в квадрат и тем самым избавившись от корня:

$$2\gamma^2 - 2\gamma(x_1 - x) - q - \frac{Q^2}{q} \geq 0. \quad (139)$$

Отсюда также вытекает условие (137), но при закрепленной энергии электронов можно вывести условия, накладываемые на другие переменные. Умножив (139) на $q = xx_1w$, $w = (1 - \mu)$, получим неравенство в одном из двух вариантов:

$$[1 + 2\gamma xw + x^2w^2]x_1^2 - 2x[1 + \gamma xw + z^2w]x_1 + x^2 \leq 0, \quad (140)$$

$$[1 - 2\gamma x_1w - x_1^2w^2]x^2 + 2x_1[1 - \gamma x_1w + z^2w]x + x_1^2 \leq 0. \quad (141)$$

В неравенстве (140) коэффициент при x_1^2 всегда положителен, поэтому легко установить ограничение на значения частоты рассеянного фотона:

$$x_1^- \leq x_1 \leq x_1^+, \quad x_1^\pm = x \frac{1 + \gamma xw + z^2w \pm zw \mathfrak{a}(\gamma, \mu, x)}{1 + 2\gamma xw + x^2w^2}. \quad (142)$$

При таких частотах всегда $-1 \leq \zeta_- \leq \zeta_+ \leq 1$.

Записать ограничения на частоту рассеиваемого фотона сложнее, так как коэффициент при x^2 в неравенстве (141) меняет знак.

При закреплении частот x и x_1 , а также энергии электрона γ неравенство (139) устанавливает ограничения на значения косинуса μ , однако эти ограничения проще вывести другим путем, что мы сделаем в отдельном пункте.

4. *Частные случаи и соотношения симметрии.* Теперь рассмотрим те случаи, которые были исключены перед равенством (119) и не позволяли вычислить интеграл по азимуту общим подходом. Для этих случаев подставим исключенные значения переменных в исходный интеграл (117) и вычислим его с аргументом дельта-функции (119).

1) Неподвижные электроны, $z = 0$. Здесь найдем предел

$$\frac{1}{z} R(x, x_1, \mu, \gamma) \Big|_{z=0} = 2\delta(x - x_1 - q) \left(1 + \mu^2 + \frac{x_1^2(1 - \mu)^2}{1 - x_1(1 - \mu)} \right). \quad (143)$$

2) Нулевая начальная частота. При $x = 0$

$$R(0, x_1, \mu, \gamma) = 2\delta(x_1)[2 \ln(\gamma + z) + \gamma z(\gamma^2 + z^2)(1 - \mu)^2 - 2\gamma z(1 - \mu)]. \quad (144)$$

3) Рассеяние прямо вперед. При этом ФП

$$R(x, x_1, 1, \gamma) = 4\delta(x - x_1) \ln(\gamma + z). \quad (145)$$

4) Рассеяние строго назад. При $\mu = -1$ ФП дается общей формулой, т. е. это не особый случай.

Формулы (143)–(145) согласуются между собой.

Здесь же отметим соотношение между ФП с переставленными частотами рассеиваемого и рассеянного фотонов. Легко проверить, что непосредственно из формул (133) и (136) вытекает, что

$$R(x_1, x, \mu, \gamma) = R(x, x_1, \mu, \gamma + x - x_1). \quad (146)$$

Такая замена γ отражает закон сохранения энергии, так как у ФП справа должна стоять энергия γ_1 , по которой ее следует усреднять.

5. *Усреднение ФП по направлениям.* Для вычисления усредненной по направлениям ФП (59) полезно усреднить и ФП при фиксированной энергии электрона, т. е. найти интеграл по μ от $\bar{R}(x, x_1)$. При этом необходимо найти пределы интегрирования. Для этого изучим зависимость границы энергии электрона (137) от μ при заданных x и x_1 .

При равенстве частот

$$\gamma_*(x, x, \mu) = \sqrt{1 + \frac{q}{2}} = \sqrt{1 + x^2 \frac{1-\mu}{2}}, \quad z_*(x, x, \mu) = x \sqrt{\frac{1-\mu}{2}}. \quad (147)$$

В частности,

$$\gamma_*(x, x, -1) = \sqrt{1 + x^2}, \quad \gamma_*(x, x, 1) = 1. \quad (148)$$

Напротив, если $x \neq x_1$, функция (137) при $\mu = 1$ обращается в $+\infty$, так как в этом случае $q = 0$, но $Q = |x - x_1| \neq 0$. Легко заметить, что при формальном устремлении $\mu \rightarrow -\infty$ функция (137) стремится к $+\infty$, так как при этом $Q \rightarrow \infty$, $q \rightarrow \infty$. Таким образом, эта функция должна иметь минимум. Производная по косинусу

$$\frac{\partial \gamma_*(x_1, x, \mu)}{\partial \mu} = -\frac{xx_1}{Q\sqrt{1+2/q}} \left[1 - \frac{(x_1 - x)^2}{q^2} \right]. \quad (149)$$

Из этого выражения следует, что функция $\gamma_*(x_1, x, \mu)$ растет с ростом μ при $\mu < 1 - \frac{|x_1 - x|}{xx_1}$ и убывает при $\mu > 1 - \frac{|x_1 - x|}{xx_1}$.

При $\mu_{\min} = 1 - |x_1 - x|/(xx_1)$ производная обращается в нуль и достигается минимум, равный

$$\gamma_{\min} = \gamma_*(x_1, x, \mu_{\min}) = 1 + \frac{x_1 - x + |x_1 - x|}{2} = \begin{cases} 1 + x_1 - x, & x_1 \geq x, \\ 1, & x_1 \leq x. \end{cases} \quad (150)$$

До сих пор не делалось ограничения на значения переменной μ . Однако, это косинус и он должен заключаться в пределах своего изменения, т. е. попадать в промежуток $[-1, 1]$. Легко заметить, что при любых частотах x и x_1 значение $\mu_{\min} < 1$, но по отношению к нижнему пределу возможны два случая. Если оказывается, что $\mu_{\min} > -1$, то γ_{\min} достигается при μ_{\min} из промежутка $[-1, 1]$. Соответствующие ограничения на частоты, при которых возможен минимум, имеют вид

$$|x_1 - x| < 2xx_1 \quad \text{или} \quad x > x_1 > \frac{x}{1+2x}, \quad x_1 > x > \frac{x_1}{1+2x_1}. \quad (151)$$

Иначе можно написать, что $x_m(x) < x_1 < x_M(x)$, где

$$x_m(x) = \frac{x}{1+2x}, \quad x_M(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-2x} & \text{при } x < \frac{1}{2}, \\ \infty & \text{при } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (152)$$

Если $\mu_{\min} \leq -1$, то минимума на отрезке $[-1, 1]$ не существует и нижним граничным значением функции $\gamma_*(x_1, x, \mu)$ является

$$\gamma_*(x_1, x, -1) = \frac{1}{2} \left[x_1 - x + (x_1 + x) \sqrt{1 + \frac{1}{xx_1}} \right]. \quad (153)$$

При наличии минимума, если $\gamma_{\min} \leq \gamma \leq \gamma_*(x_1, x, -1)$, разрешая уравнение $\gamma_*(x_1, x, \mu) = \gamma$ относительно μ , находим два корня:

$$\mu_- = 1 - \frac{D}{xx_1}, \quad \mu_+ = 1 - \frac{(x_1 - x)^2}{xx_1 D}, \quad (154)$$

где

$$D = z^2 - \gamma(x_1 - x) + zD_0, \quad D_0 = \sqrt{z^2 - 2\gamma(x_1 - x) + (x_1 - x)^2}. \quad (155)$$

Нетрудно проверить, что всегда $-1 \leq \mu_+ \leq 1$ и $\mu_- \leq \mu_+$. Если $\gamma \leq \gamma_*(x_1, x, -1)$, то $\mu_- \geq -1$, так что интегрирование по μ в этом случае производится по промежутку $[\mu_-, \mu_+]$, если же $\gamma \geq \gamma_*(x_1, x, -1)$, то по промежутку $[-1, \mu_+]$.

Таким образом, усреднение ФП по направлениям сводится к вычислению интеграла

$$\bar{R}(x_1, x, \gamma) = \frac{1}{2} \int_{\mu_m}^{\mu_+} R(x_1, x, \mu, \gamma) d\mu, \quad (156)$$

в котором нижний предел интегрирования определяется альтернативно:

$$\mu_m = \begin{cases} -1, & \text{если } |x_1 - x| \geq 2xx_1, \\ -1, & \text{если } |x_1 - x| \leq 2xx_1 \text{ и } \gamma \geq \gamma_*(x_1, x, -1), \\ \mu_-, & \text{если } |x_1 - x| \leq 2xx_1 \text{ и } \gamma_{\min} \leq \gamma \leq \gamma_*(x_1, x, -1). \end{cases} \quad (157)$$

После взятия интеграла по μ следует изменить пределы интегрирования и по энергии. Формула для ФП, усредненной по γ , примет вид

$$R(x, x_1) = \frac{3\pi}{2} \int_{\gamma_*(x_1, x)}^{\infty} \bar{R}(x, x_1, \gamma) f_e(\gamma) d\gamma, \quad (158)$$

где

$$\gamma_*(x_1, x) = \begin{cases} \gamma_*(x_1, x, -1), & \text{если } |x - x_1| \geq 2xx_1, \\ \gamma_{\min}, & \text{если } |x - x_1| \leq 2xx_1. \end{cases} \quad (159)$$

На рис. 4 представлены области существования минимума γ_{\min} на плоскости x, x_1 и значения этого минимума, а на рис. 5 — нижние границы изменения γ при закрепленных x и x_1 .

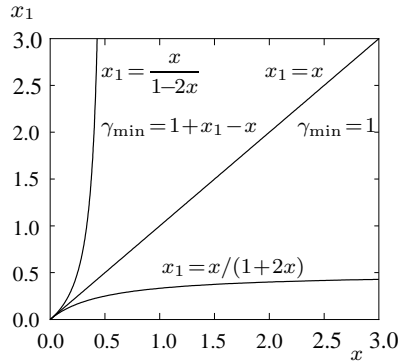


Рис. 4. Области существования минимума функции $\gamma_*(x_1, x, \mu)$ по μ и его значения.

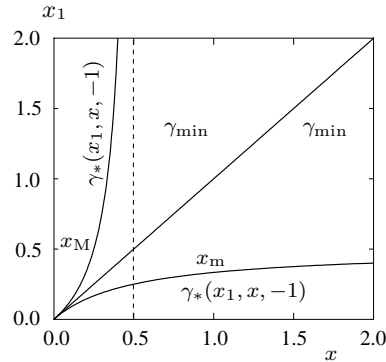


Рис. 5. Пределы функции $\gamma_*(x_1, x, \mu)$

6. *Регуляризация ФП.* При малых частотах отдельные слагаемые в формуле (133) оказываются довольно большими и при их чис-

ленном сложении может происходить потеря точности. Для предотвращения этого можно объединить некоторые слагаемые, произвести сокращения аналитически и представить выражение для ФП в виде

$$R(x_1, x, \mu, \gamma) = \frac{2}{Q} + \frac{u}{v} \left[1 - \frac{2}{q} + \frac{u^2(u^2 + 5v) + Q^2(u^2 + 3v)}{2q^2v^2} \right], \quad (160)$$

где введены обозначения $v = a(\gamma, \mu, x) a(\gamma, \mu, -x_1)$ и

$$u = a(\gamma, \mu, x) - a(\gamma, \mu, -x_1) = (x + x_1) \frac{2\gamma + x - x_1}{a(\gamma, \mu, x) + a(\gamma, \mu, -x_1)}. \quad (161)$$

Для вычисления средней ФП по формуле (156) в работе [36] и обзоре [78] была найдена первообразная подынтегральной функции. Однако в ней при сложении отдельных слагаемых возможны потери точности, для избежания которых предлагалась довольно сложная процедура аналитического вычитания близких по величине, но противоположных по знаку членов. При наличии современных компьютеров более выгодно непосредственно вычислять интеграл от регуляризованной функции в форме (160). Все же следует проявлять осторожность при вычислении интеграла от первого, сингулярного слагаемого в этой формуле. Однако разность значений этого интеграла, равного $-Q/xx_1$, на пределах можно вычислить явно. Действительно, легко убедиться, что

$$Q|_{\mu_+} = |z - D_0|, \quad Q|_{\mu_-} = z + D_0, \quad Q(-1) = x + x_1. \quad (162)$$

Поэтому

$$Q|_{\mu_m}^{\mu_+} = Q|_{\mu_+} - Q|_{\mu_m} = \begin{cases} |z - D_0| - z - D_0 & \text{при } \mu_m = \mu_-, \\ |z - D_0| - x - x_1 & \text{при } \mu_m = -1. \end{cases} \quad (163)$$

Выясним, когда z больше, а когда меньше D_0 . Легко проверить, что $D_0 > z$ при $(x_1 - x - 2\gamma)(x_1 - x) > 0$. Если $x_1 < x$, то тем более $x_1 - x - 2\gamma < 0$, и $D_0 > z$. Если $x_1 > x$, то $D_0 > z$ может быть только при $x_1 > x + 2\gamma$. Если же $0 < x_1 - x < 2\gamma$, то $D_0 < z$. На границах, т. е. при $x_1 = x$ и/или $2\gamma = x_1 - x$ соблюдается равенство $D_0 = z$.

Что касается усреднения ФП по азимуту, то заметим здесь только, что и в этом случае с наибольшей осторожностью надо вычислять интеграл от первого слагаемого. Этот интеграл выражается через неполный эллиптический интеграл первого рода.

Обратимся теперь к предельным формам приведенных в § 2 уравнений, когда распределение электронов по импульсам мало отличается от нерелятивистского максвелловского.

§ 5. Нерелятивистский предел

1. *Почти нерелятивистские электроны.* Примем теперь, что температура электронного газа и энергии фотонов не очень велики, точнее, что выполняются условия $k_B T \ll mc^2$ и $h\nu \ll mc^2$, т. е. средние энергии электронов и фотонов значительно меньше энергии покоя электрона. Чтобы произвести предельный переход $y = mc^2/k_B T \rightarrow \infty$, нам надо переопределить безразмерные частоты фотонов и импульсы электронов. Положим $x_t = h\nu/k_B T$, т. е. будем измерять энергии фотонов в средних (по порядку величины) энергиях электронов. Новая безразмерная частота связана со старой соотношением $x_t = yx$. Для того чтобы выяснить, как нужно перенормировать импульсы электронов, заметим, что при $y \rightarrow \infty$ функция $K_2(y) \sim \sqrt{\pi/2y}e^{-y}(1 + 15/8y)$. При этом полные энергии электронов близки к их энергиям покоя: $\gamma = \sqrt{1+z^2} \sim 1 + z^2/2$. Следовательно, без учета поправочного слагаемого порядка $1/y$

$$f_M(\gamma) \sim \left(\frac{y}{2\pi}\right)^{3/2} e^y e^{-y(1+z^2/2)}. \quad (164)$$

Чтобы это распределение перешло в нерелятивистское максвелловское, надо положить $z\sqrt{y}/2 = z_t$ и $\vec{z}\sqrt{y}/2 = \vec{z}_t$. Это равносильно замене $\vec{p} = mc\sqrt{2/y}\vec{z}_t$. Такие же замены сделаем и для величин с индексом 1.

Разложим по степеням $1/y \ll 1$ все входящие в уравнение (44) множители, удерживая нулевую и две первых степени относительно $1/\sqrt{y}$.

Уточним разложение функции распределения электронов. С учетом сказанного выше имеем

$$f_M(\gamma)d^3z \sim \frac{ye^{-y(z^2/2 - z^4/8)}d^3z}{4\pi\sqrt{\pi/2y}(1+15/8y)} \sim \frac{d^3z_t}{\pi^{3/2}}e^{-z_t^2} \left[1 + \frac{1}{2y}\left(z_t^2 - \frac{15}{4}\right)\right]. \quad (165)$$

Легко проверить, что интеграл по z_t от стоящего в этом разложении множителя при $1/y$ равен нулю, что является следствием

сохранения условия нормировки. Так как мы удерживаем слагаемые порядка малости не больше $1/y$, то в конечном результате этот множитель окажется умноженным на слагаемое, не содержащее ни y , ни z_t . Поэтому добавочное слагаемое в квадратных скобках в (165) можно вообще не принимать во внимание, а оставить только классическое (нерелятивистское) распределение Максвелла.

2. *Разложение подынтегральной функции.* Получим предельную форму кинетического уравнения для плоской среды. Для этого разложим входящие в уравнение (44) множители при функции распределения электронов.

Получим разложение частоты фотона после рассеяния x_1 . Из формулы (11) для нее следует, что $x_{t1} - x_t = \Delta x$, а

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{x_t} &\sim \frac{1 + \frac{z^2}{2} - z\zeta}{1 + \frac{z^2}{2} + x - (z\zeta_1 + x\mu)} - 1 \sim \frac{1 + \frac{z_t^2}{y} - z_t\zeta\sqrt{\frac{2}{y}}}{1 + \frac{z_t^2}{y} + x_t\frac{1-\mu}{y} - z_t\zeta_1\sqrt{\frac{2}{y}}} - 1 \sim \\ &\sim \sqrt{2/y}z_t(\zeta_1 - \zeta) - x_t(1-\mu)/y + 2z_t^2\zeta_1(\zeta_1 - \zeta)/y. \end{aligned} \quad (166)$$

Здесь, как и выше, для сокращения записи введены обозначения: $\zeta = \Omega\vec{\omega}$, $\zeta_1 = \Omega\vec{\omega}_1$, $\mu = \vec{\omega}\vec{\omega}_1$.

Далее найдем разложения скалярных произведений (17):

$$\xi = x(\gamma - z\zeta) \sim \frac{x_t}{y} \left(1 + \frac{z_t^2}{y} - z_t\zeta\sqrt{\frac{2}{y}} \right), \quad (167)$$

$$\xi_1 = x_1(\gamma - z\zeta_1) \sim \frac{x_{t1}}{y} \left(1 + \frac{z_t^2}{y} - z_t\zeta_1\sqrt{\frac{2}{y}} \right). \quad (168)$$

Основная часть сечения Клейна—Нишины — функция F — состоит из двух слагаемых. Слагаемое $B \sim 2$ с точностью до членов порядка $1/y^2$. Величина $\mu_0 = 1 - \underline{x}\underline{x}_1/\xi\xi_1 =$

$$= 1 - \frac{1-\mu}{(\gamma-z\zeta)(\gamma-z\zeta_1)} \sim \mu - (1-\mu) \left[\sqrt{\frac{2}{y}}z_t(\zeta+\zeta_1) - \frac{2}{y}z_t^2(1-\zeta^2-\zeta_1^2-\zeta\zeta_1) \right]. \quad (169)$$

Отсюда получаем $F \sim 1 + \mu^2 -$

$$-2(1-\mu)\mu\sqrt{\frac{2}{y}}z_t(\zeta+\zeta_1) + \frac{2}{y}(1-\mu)z_t^2[2\mu(1-\zeta^2-\zeta_1^2-\zeta\zeta_1) + (1-\mu)(\zeta+\zeta_1)^2]. \quad (170)$$

Поскольку смещение частоты при рассеянии на нерелятивистских электронах мало, то в предположении достаточной гладкости среднего числа заполнения можно разложить и эту функцию. При этом аргументом получающейся функции будем считать не x , как раньше, а x_t . Для получения той же точности, что и для всех остальных величин, надо учесть слагаемые в формуле Тейлора со второй производной:

$$n_{11} = n(x_{t1}, \vec{\omega}_1) = n(x_t + \Delta x, \vec{\omega}_1) = n_1 + \Delta x n'_1 + \frac{(\Delta x)^2}{2} n''_1. \quad (171)$$

Здесь $n_1 = n(x_t, \vec{\omega}_1)$ и производные берутся по переменной x_t . Разложение разности Δx следует из формулы (166), а ее квадрат $(\Delta x)^2 \sim x_t^2 (2/y) z_t^2 (\zeta - \zeta_1)^2$.

Разложение разности, стоящей в квадратных скобках в уравнении (44), получается из равенства (171) и разложения экспоненты:

$$\begin{aligned} n(1 + n_{11}) - e^{\Delta x} (1 + n) n_{11} &\sim n \left[1 + n_1 + n'_1 \Delta x + n''_1 \frac{(\Delta x)^2}{2} \right] - \\ &- \left[1 + \Delta x + \frac{(\Delta x)^2}{2} \right] (1 + n) \left[n_1 + n'_1 \Delta x + n''_1 \frac{(\Delta x)^2}{2} \right] \sim \\ &\sim n - n_1 - [n'_1 + n_1(1 + n)] \Delta x - [n''_1 + (2n'_1 + n_1)(1 + n)] \frac{(\Delta x)^2}{2}. \end{aligned} \quad (172)$$

Раскладываются и остальные множители, стоящие при дифференциалах переменных, по которым ведется интегрирование:

$$\begin{aligned} x_1^2 / (x\gamma\xi) &= x_{t1}^2 / [x_t^2 \gamma (\gamma - z\zeta)] \sim \\ &\sim \frac{1 + 2\sqrt{\frac{2}{y}} z_t (\zeta_1 - \zeta) - \frac{2}{y} [x_t(1 - \mu) + 2z_t^2 \zeta_1 (\zeta_1 - \zeta) z_t^2 (\zeta_1^2 + \zeta^2 - 2\zeta_1 \zeta)]}{[1 + z_t^2/y][1 + z_t^2/y - \sqrt{2/y} z_t \zeta]} \sim \\ &\sim 1 + \sqrt{2/y} z_t (2\zeta_1 - \zeta) - (2/y) [x_t(1 - \mu) + z_t^2 (1 - 3\zeta_1^2 + 2\zeta \zeta_1)]. \end{aligned} \quad (173)$$

Перемножение этих множителей и сечения дает $\frac{x_1^2}{x\gamma\xi} F \sim 1 + \mu^2 +$

$$\begin{aligned} &+ \sqrt{\frac{2}{y}} z_t [2\zeta_1 (1 - \mu + 2\mu^2) - \zeta (1 + 2\mu - \mu^2)] + \frac{2}{y} \{ -(1 + \mu^2)(1 - \mu)x_t + \\ &+ z_t^2 [-1 + 2\mu - 3\mu^2 + \zeta^2 (1 - \mu)^2 + 2\zeta_1^2 (2 - 4\mu + 5\mu^2) - 4\zeta \zeta_1 \mu (2 - \mu)] \}. \end{aligned} \quad (174)$$

Если объединить, наконец, все разложения, то подынтегральная функция представится в виде одного разложения, которое мы не выписываем из-за его громоздкости.

3. *Усреднение по распределению Максвелла.* Произведем сначала усреднение по направлениям импульсов электронов, распределение которых изотропно. Для этого приведем значения интегралов

$$\int \frac{d^2\Omega}{\pi} = 4, \int \frac{d^2\Omega}{\pi} \zeta = \int \frac{d^2\Omega}{\pi} \zeta_1 = 0, \int \frac{d^2\Omega}{\pi} \zeta^2 = \int \frac{d^2\Omega}{\pi} \zeta_1^2 = \frac{4}{3}, \int \frac{d^2\Omega}{\pi} \zeta \zeta_1 = \frac{4}{3}\mu. \quad (175)$$

Таким образом, все слагаемые порядка $\sqrt{2/y}$ при усреднении пропадут.

При усреднении по длинам импульсов понадобятся интегралы

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} z^2 dz = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} z^4 dz = \frac{3}{8}. \quad (176)$$

Обозначим полное усреднение по распределению Максвелла угловыми скобками, т. е.

$$\frac{1}{\pi^{3/2}} \int e^{-z_t^2} d^3 z_t \psi(\vec{z}_t) = \langle \psi \rangle. \quad (177)$$

Тогда

$$\langle 1 \rangle = 1, \quad \langle z_t^2 \rangle = \frac{3}{2}, \quad \langle z_t^2 \zeta^2 \rangle = \langle z_t^2 \zeta_1^2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle z_t^2 \zeta \zeta_1 \rangle = \frac{1}{2}\mu. \quad (178)$$

Легко показать также, что

$$\langle \Delta x \rangle = \frac{x_t}{y} (1 - \mu)(1 - x_t), \quad \langle (\Delta x)^2 \rangle = 2 \frac{x_t^2}{y} (1 - \mu). \quad (179)$$

Исходя из приведенных формул, произведем усреднение по частям, без перемножения всех разложений. Усреднение произведения разложения (174) на не зависящие от y слагаемые из (172) дает

$$(n - n_1) \left\{ 1 + \mu^2 + \frac{2}{y} [1 - 2\mu - 3\mu^2 + 2\mu^3 - (1 + \mu^2)(1 - \mu)x_t] \right\}. \quad (180)$$

Усреднение получающегося в (172) слагаемого порядка $1/y$, которое надо умножить на нулевое слагаемое в формуле (174), т. е. на $1 + \mu^2$, приводит к выражению

$$-\frac{x_t}{y} (1 - \mu) \{ (1 - x_t) [n'_1 + n_1(1 + n)] + x_t [n''_1 + 2n'_1(1 + n) + n_1(1 + n)] \}. \quad (181)$$

Еще одно не исчезающее в этом приближении слагаемое дает произведение членов порядка $1/\sqrt{y}$:

$$-3\frac{x_t}{y}(1-\mu)(1+\mu^2)[n'_1+n_1(1+n)]. \quad (182)$$

Собирая все полученные слагаемые разложений после усреднения, получаем окончательно уравнение Бабуэль-Пейриссака—

$$\begin{aligned} & \text{Рувийюа [56]: } \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = \\ & = \frac{r_e^2}{2} n_e \int d^2\omega_1 \left\{ (n_1 - n) \left[(1 + \mu^2) \left(1 - \frac{2x_t}{y}(1 - \mu) \right) + \frac{2}{y}(1 - 2\mu - 3\mu^2 + 2\mu^3) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{x_t}{y}(1 - \mu)(1 + \mu^2) [4(n'_1 + n_1) + x_t(n''_1 + n'_1) + n(4n_1 + 2x_t n'_1)] \right\}. \quad (183) \end{aligned}$$

Заметим, что при $y = \infty$ уравнение переходит в описывающее томсоновское рассеяние, причем все эффекты вынужденных переходов исчезают. Эффект отдачи и доплеровского смещения частоты, происходящие при комптоновском рассеянии, являются малыми поправками к томсоновскому рассеянию. Однако эта малая поправка может быть очень существенной, так как при рассеянии изменяется частота фотонов и может сильно измениться спектр рассеиваемого излучения. Оно может переместиться в другую область энергий, где первоначально излучение отсутствовало, т. е. малая поправка окажется добавленной к нулю.

Уравнение (183) можно переписать в другом виде, выделив слагаемое, пропорциональное n , все интегралы при котором вычисляются. В частности, интеграл от второго слагаемого в квадратных скобках оказывается равным нулю. Уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n = -\sigma_T n_e \left(1 - \frac{2x_t}{y} \right) n + \frac{3}{16\pi} \sigma_T n_e \int d^2\omega_1 \times \\ & \times \left\{ n_1 \left[(1 + \mu^2) \left(1 - \frac{2x_t}{y}(1 - \mu) \right) + \frac{2}{y}(1 - 2\mu - 3\mu^2 + 2\mu^3) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{x_t}{y}(1 - \mu)(1 + \mu^2) \left[4(n'_1 + n_1(1+n)) + x_t(n''_1 + n'_1(1+2n)) \right] \right\}. \quad (184) \end{aligned}$$

При решении уравнения можно сделать дополнительные приближения: отбросить слагаемые порядка $1/y$ там, где они добавляются к слагаемым порядка 1, т. е. в первой и второй строчках

равенства (184). В то же время третью строчку следует оставить в приведенном виде, так как именно ее влияние приводит к преобразованию энергий фотонов и формированию их спектра.

До сих пор рассматривалось рассеяние в среде произвольной геометрии. Теперь перейдем к плоской среде и изотропному пространству.

4. *Плоский слой и бесконечное однородное пространство.* В случае плоской среды и стационарного поля излучения, как отмечалось в п. 4 § 2, искомая функция зависит от оптической глубины τ_T , косинуса угла η и частоты x . Тогда все множители при n и n_1 можно усреднить по азимуту, что сделать нетрудно, особенно, если принять то приближение, о котором говорилось в конце предыдущего пункта. Именно в таком виде уравнение использовалось в работах Р. А. Сюняева и Л. Г. Титарчука, начиная с [86]. При этом применялось приближение Эддингтона [35], равносильное диффузионному, так что полное приближение называлось дважды диффузионным (по частоте и по глубине).

Если слабо релятивистский (почти нерелятивистский) электронный газ и не очень жесткое поле излучения (выполняются неравенства $k_B T \ll mc^2$ и $h\nu \ll mc^2$) заполняют однородное и изотропное пространство, то можно произвести такие же разложения, как и в предшествующих пунктах в уравнении (58). Однако проще воспользоваться предельным уравнением (184), выведенным для произвольной среды. Положив в нем $n_1 = n$ и вычислив интегралы по направлениям, получим уравнение

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\sigma_T n_e}{y} \frac{1}{x_t^2} \frac{\partial}{\partial x_t} \left[x_t^4 \left(n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x_t} \right) \right]. \quad (185)$$

Такие уравнения, при выводе которых предполагается малость изменения энергии частицы при каждом акте взаимодействия, в результате чего интеграл столкновений преобразуется в дифференциальный оператор, в общей теории кинетических уравнений называются уравнениями типа Фоккера—Планка.

5. *Комптонизация.* Этим словом называется процесс формирования спектра излучения в ходе многократного комптоновского рассеяния и его результат. Как правило, рассматривается эволюция спектра от мягкого к более жесткому. Для оценки эффективности этого процесса оценим изменение малой частоты фотона.

Из формулы (110) следует, что первое же рассеяние мягкого фотона релятивистским электроном увеличивает частоту фотона в $4z^2/3$ раз. Но частота фотонов растет и при рассеянии нерелятивистскими электронами, если их средняя энергия существенно больше энергии фотона.

Пусть мягкий фотон рассеивается нерелятивистскими электронами с $z^2 \ll 1$. Тогда из (110) находим

$$\Psi_1(x, \gamma) - \Psi_0(x, \gamma) \sim \frac{4}{3}z^2 - x. \quad (186)$$

Усредним эту разность по нерелятивистскому распределению Максвелла с температурой $T_e \ll mc^2/k_B$, применив формулы (177). Однако следует помнить, что в указанных формулах усредняется квадрат z_t , а не z . Поэтому надо ввести связывающий эти две величины множитель $2/\sqrt{y}$. Тогда получится

$$\overline{[x_1 - x]s_0}(x, y) = 4\pi x \int_0^\infty z^2 dz f_M(\gamma) [\Psi(x, \gamma) - \Psi_0(x, \gamma)] \sim \frac{4}{y}x - x^2. \quad (187)$$

Так как $\overline{s_0}(x, y) \sim 1 - 2x$, то с принятой точностью полученную формулу можно записать в виде [43, 78]

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{4}{y} - x \quad (188)$$

и представить как дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{du} = x \frac{4}{y} - x^2. \quad (189)$$

Производная здесь берется по безразмерному оптическому расстоянию, совпадающему с числом рассеяний. Уравнение (189) является уравнением Бернулли и его решение легко находится:

$$\frac{1}{x} = e^{-4u/y} \left[\frac{1}{x_0} + \frac{y}{4}(e^{4u/y} - 1) \right]. \quad (190)$$

Переписанное в величинах x_t и $t = u/y$ оно выглядит проще:

$$x_t = x_t^0 \frac{e^{4t}}{1 + \frac{x_t^0}{4}(e^{4t} - 1)} \quad (191)$$

и из него видно, что при малых x_t^0 и умеренных t частота растет экспоненциально. Затем рост замедляется и частота x_t стремится к своему асимптотическому значению 4. Мы увидим, что точное значение этого предела равно не 4, а 3.

Далее рассмотрим решения уравнения (185) и его обобщения (58), более точно описывающие многократное рассеяние.

§ 6. Решения кинетических уравнений

1. *Уравнение Компанейца и его свойства.* В этом параграфе опустим индекс t у частоты (введенный для того, чтобы отличать частоту, измеряемую в единицах $k_B T/h$, от частоты, измеряемой в единицах mc^2/h) и будем писать просто x .

Уравнение (185) за счет выбора единицы измерения времени, равной $y/(c\sigma_T n_e)$, приводится к уравнению без параметров:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \right) \right]. \quad (192)$$

Это уравнение описывает временную эволюцию однородного и изотропного поля излучения в бесконечном однородном и изотропном пространстве, заполненном равновесным нерелятивистским и невырожденным электронным газом. Оно было выведено в 1952 году А. С. Компанейцем (опубликовано [27] в 1956 после рассекретивания) и носит его имя.

Уравнение Компанейца в размерных величинах записывается следующим образом:

$$\frac{\partial n_\nu(t)}{\partial t} = \frac{\sigma_T n_e}{mc} \frac{h}{\nu^2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\nu^4 \left(\frac{k_B T}{h} \frac{\partial n_\nu(t)}{\partial \nu} + n_\nu(t) + n_\nu^2(t) \right) \right]. \quad (193)$$

Здесь $n_\nu(t) = n(x_t, t) = n(x, t)$. В дальнейшем изучаем это уравнение в форме (192).

Из уравнения (192), так же как и из (58), вытекает закон сохранения числа фотонов. Действительно, после умножения уравнения (192) на x^2 и интегрирования по всем частотам получаем

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty x^2 n(x, t) dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] dx = \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n + n^2 \right) \right] \Big|_{x=0}^{x=\infty} = 0. \quad (194)$$

Можно показать, что каждое из трех слагаемых в круглых скобках правой части уравнения Компанейца описывает отдельный эффект, а именно: слагаемое с производной — эффект Доплера, n — эффект Комптона, а n^2 — вынужденное рассеяние.

Уравнение (192) нелинейное и, к сожалению, точных аналитических решений не имеет. В разное время были найдены точные решения уравнений, получающихся из (192), если отбросить одно или два слагаемых в круглых скобках, т. е. пренебречь хотя бы одним из указанных эффектов. Приведем все такие решения.

2. *Линейное уравнение и функция Грина.* При небольших числах заполнения $n \ll 1$ можно не учитывать вынужденное рассеяние и в уравнении (192) отбросить n^2 . Уравнение перейдет в линейное:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial n}{\partial x} + n \right) \right]. \quad (195)$$

Для линейного уравнения можно определить функцию Грина, выражающую любое решение через начальное распределение фотонов:

$$n(x, t) = \int_0^\infty G(x, x_1, t) n(x_1, 0) dx_1. \quad (196)$$

Функция Грина удовлетворяет тому же уравнению (195):

$$\frac{\partial G(x, x_1, t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial G}{\partial x} + G \right) \right], \quad (197)$$

с начальным условием

$$G(x, x_1, 0) = \delta(x - x_1). \quad (198)$$

Интеграл (60) для этой функции переходит в

$$\int_0^\infty x^2 G(x, x_1, t) dx = x_1^2. \quad (199)$$

Функция $G(x, x_1, t)$ была найдена А. С. Компанейцем посредством разложения ее по собственным функциям (с. ф.) оператора правой части уравнения (195). Подробный вывод ее методом преобразования Лапласа приведен в статье [33]. При $t \rightarrow \infty$ функция

Грина стремится к $\frac{1}{2}x_1^2 e^{-x}$, так что решения линейного уравнения Компанейца имеют предельную стационарную форму в виде функции Вина $n(x, \infty) = \frac{1}{2}e^{-x} \int_0^\infty n(x_1, 0)x_1^2 dx_1$. Действительно, функция Ce^{-x} удовлетворяет уравнению тождественно при любых коэффициентах C .

Функция $x^2 n(x, \infty)$ имеет максимум при $x = 2$. Среднее значение частоты по виновскому распределению равно 3. Соотношение (60) выполняется и при $t = \infty$. Для сравнения напомним, что согласно формуле Планка максимум распределения числа фотонов $x^2/(e^x - 1)$ лежит при $x = 1.5936$, а средняя частота \bar{x} равна 2.7012.

В статье [37] были вычислены с. ф., входящие в формулу для функции Грина, и сама эта функция. На рис. 6 и 7 представлены ее графики соответственно при $x_1 = 0.1, 1$ и 10, отражающие указанные выше свойства. При этом на рис. 6 дана непосредственно функция Грина, а на рис. 7 дается произведение $x^2 G(x, x_1, t)$.

3. *Диффузионное решение.* Если отбросить два слагаемых n и n^2 , что допустимо при малых частотах, то получающееся уравнение

$$\frac{\partial n(t, x)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \right] \quad (200)$$

тоже является линейным и для него определяется функция Грина тем же равенством (196), что и выше. Подстановками $x = e^{u-3y}$, $t = y$ с обратными им $y = t$, $u = 3t + \ln x$ уравнение (200) приводится к уравнению диффузии

$$\frac{\partial^2 n}{\partial u^2} = \frac{\partial n}{\partial y}. \quad (201)$$

Соответствующая функция Грина в исходных переменных

$$G_{\text{dif}}(x, x_1, t) = \frac{1}{2x_1\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{4t} \left(\ln \frac{x}{x_1} + 3t\right)^2\right). \quad (202)$$

Такая форма функции Грина была получена Я. Б. Зельдовичем и Р. А. Сюняевым [101]. Можно показать, что функция (202) является пределом общей функции, определяемой уравнением (197), при малых частотах.

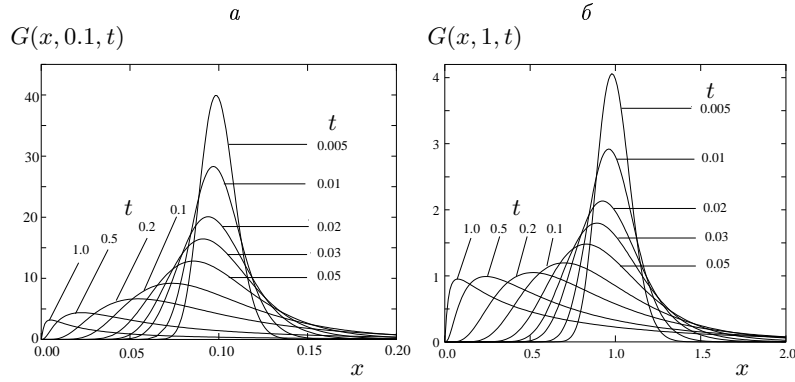


Рис. 6. Эволюция функции Грина $G(x, x_1, t)$ при $x_1=0.1$ (а) и $x_1=1$ (б).

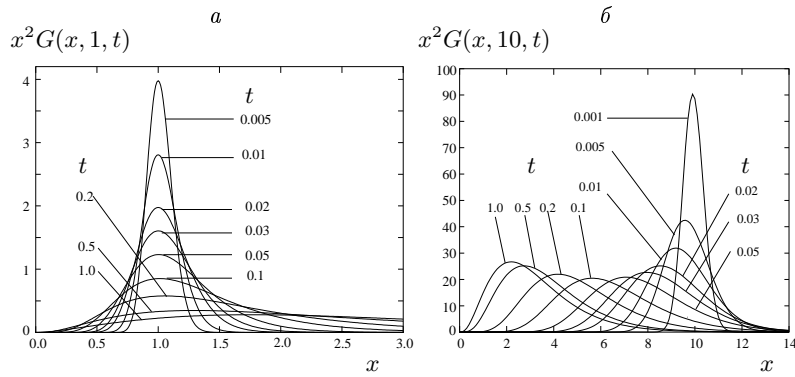


Рис. 7. Эволюция функции $x^2 G(x, x_1, t)$ при $x_1=1$ (а) и $x_1=10$ (б).

Используя диффузионную функцию Грина (202), авторы статьи [14] показали, что планковский спектр малых частот преобразуется в набор планковских спектров с температурами из некоторого интервала.

4. *Решение стационарного линейного уравнения.* Если поле излучения не зависит от времени, то уравнение (192) переходит в стационарное линейное уравнение Компанейца

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \left(\frac{dn}{dx} + n \right) \right] = 0. \quad (203)$$

Это уравнение сразу сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{dn}{dx} + n = \frac{C_2}{x^4}. \quad (204)$$

Общее решение полученного линейного уравнения

$$n = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} \int_{\beta}^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4}. \quad (205)$$

Здесь $\beta > 0$ — некоторое число. Второе решение имеет смысл только при $x \geq \beta$. Взять $\beta = 0$ нельзя, так как эта функция при $x \rightarrow 0$ стремится к бесконечности так сильно, что интеграл (60) не существует. Первое же решение описывает распределение Вина, т. е. правильное стационарное решение. Второе решение надо, по-видимому, отбросить как нефизическое.

Решение неоднородного уравнения вида (203), т. е. стационарного уравнения с источниками

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \left(\frac{dn}{dx} + n \right) \right] = f(x) \quad (206)$$

можно искать методом вариации произвольных постоянных, однако его можно получить гораздо проще. Проинтегрируем уравнение по x от 0 до x :

$$\left(\frac{dn}{dx} + n \right) = \frac{1}{x^4} \int_0^x x_1^2 f(x_1) dx_1. \quad (207)$$

Решение получившегося линейного уравнения представляется повторным интегралом

$$n(x) = e^{-x} \int_0^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4} \int_0^{x'} x_1^2 f(x_1) dx_1 = e^{-x} \int_0^x x_1^2 f(x_1) dx_1 \int_{x_1}^x e^{x'} \frac{dx'}{(x')^4}. \quad (208)$$

Функция Грина, определяемая формулой, аналогичной (196):

$$n(x) = \int_0^{\infty} G(x, x_1) f(x_1) dx_1, \quad (209)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[x^4 \left(\frac{dG}{dx} + G \right) \right] = \delta(x - x_1) \quad (210)$$

и может быть представлена альтернативными формулами в явном виде:

$$G(x, x_1) = \begin{cases} e^{-x} x_1^2 \int_{x_1}^x \frac{dx'}{(x')^4}, & x_1 \leq x, \\ 0, & x_1 \geq x. \end{cases} \quad (211)$$

В частном случае степенного спектра источника $f(x) = x^{\alpha}$ решение выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию [33]:

$$n(x) = \frac{x^{\alpha}}{\alpha(\alpha+3)} e^{-x} F(\alpha, \alpha+1, x) \sim \begin{cases} \frac{x^{\alpha}}{\alpha(\alpha+3)}, & x \ll 1, \\ \frac{x^{\alpha-1}}{\alpha+3}, & x \gg 1. \end{cases} \quad (212)$$

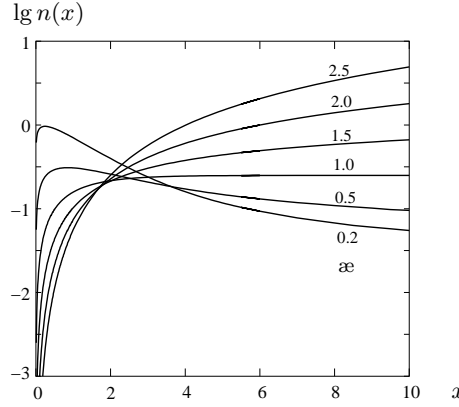


Рис. 8. Стационарные решения линейного уравнения при некоторых показателях степени частотной зависимости источника.

На рис. 8 приведены графики решений для некоторых значений α .

5. *Решение недиффузионного уравнения.* Назовем так уравнение, которое получается из уравнения (192), если в его круглых скобках отбросить производную по частоте, определяющую частотную диффузию фотонов. Как видно из уравнения Компанейца в форме (193), это можно сделать при достаточно низкой температуре электронного газа. Уравнение примет вид

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} [x^4 (n + n^2)]. \quad (213)$$

Это уравнение обладает свойством автомодельности, а именно для его решений выполняется соотношение подобия: при произвольном $\alpha > 0$

$$n(\alpha x, t/\alpha) = n(x, t), \quad (214)$$

т. е. противоположное изменение масштабов частот и времени не изменяет решения.

Поскольку уравнение (213) — первого порядка, решаем его методом характеристик. Уравнения, определяющие характеристики (213), записываются так:

$$dt = -\frac{dx}{x^2(1+2n)} = \frac{dn}{3x(n+n^2)}. \quad (215)$$

Первыми интегралами уравнений характеристик являются следующие комбинации переменных: $x^4 \mathcal{B} = C^4$ и $4Ct + 2^{1/2} F(\phi, 2^{-1/2})$, где $\mathcal{B} = n + n^2$,

$$F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{d\phi_1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi_1}} \quad (216)$$

— эллиптический интеграл первого рода, а

$$\phi = \phi(\mathcal{B}) = 2 \operatorname{arctg}(2^{-1/2} \mathcal{B}^{-1/4}). \quad (217)$$

Решение, удовлетворяющее начальному условию, можно записать в неявном виде [33]

$$t = \frac{F(\phi_0, 2^{-1/2}) - F(\phi, 2^{-1/2})}{2^{3/2} C}, \quad (218)$$

где $\phi_0 = \phi(\mathcal{B}_0(x_0))$, $\mathcal{B}_0(x) = n(x, 0)[1 + n(x, 0)]$, $C = x \mathcal{B}^{1/4}(x) = x_0 \mathcal{B}_0^{1/4}(x_0)$.

Если в найденном решении считать, что $n \gg 1$, т. е. числа заполнения фотонных состояний велики и вынужденное рассеяние играет определяющую роль, то, подставив предельные выражения $\mathcal{B} \sim n^2$, $\phi \sim 2^{1/2} n^{-1/2} \ll 1$, $F(\phi, 2^{-1/2}) \sim \phi$, сведем решение (218) к

$$t = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x_0 n(x_0)} - \frac{1}{x n(x)} \right]. \quad (219)$$

Это решение, полученное Я. Б. Зельдовичем и Е. В. Левичем [15], удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} - 2x^2 n \frac{\partial n}{\partial x} = 4xn^2. \quad (220)$$

На рис. 9, взятом из статьи [33], показано, как эволюционирует начальный спектр $n(x, 0) = xe^{-x}$ согласно уравнению (213) и его решению (218).

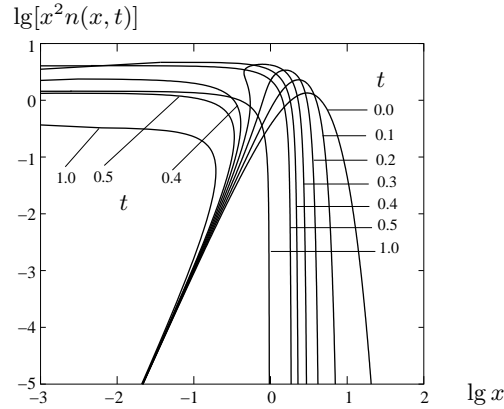


Рис. 9. Решения нелинейного уравнения.

С течением времени спектр смещается в сторону низких частот, причем становится все круче. С некоторого момента спектр опрокидывается, что оказывается возможным из-за неявного вида решения. Причина такого нефизического поведения спектра в том, что когда интенсивность излучения очень резко меняется с частотой, нельзя пренебрегать производной в уравнении Компанейца, несмотря на малый коэффициент при ней. Кроме того, и само это уравнение становится неадекватным, так как при его выводе предполагалась возможность разложения интенсивности по формуле Тейлора, которая отсутствует при большой производной по частоте.

Тот же эффект возникает в решении (219), что можно показать и без вычислений. Действительно, одно из уравнений характеристик уравнения (220) гласит: $\frac{dx}{dt} = -2x^2 n$, т. е. скорость изменения частоты x со временем отрицательна и пропорциональна величине n . Поэтому чем выше точка на кривой решения, тем быстрее она продвигается в сторону меньших частот.

Эффект пережестоты спектра интерпретировался авторами [15] как появление ударной волны в частотном спектре излучения. Для выяснения его реального смысла необходимо получить решения без

пренебрежения производной по частоте или точного интегрального уравнения, что возможно только численно.

6. *Эволюция однородного поля излучения.* Численные решения интегрального уравнения (58) при максвелловских электронах с низкой температурой без учета вынужденного рассеяния полностью совпали с решениями линейного же уравнения Компанейца. Индуцированное рассеяние, приводящее к нелинейности уравнений, обнаруживает такие особенности решений, которые только угадывались при рассмотрении предельных случаев, обсуждавшихся выше.

Конечно, при решении нелинейного уравнения Компанейца никаких перехлестов не возникает. Вместе с тем решения обладают некоторыми особенностями.

Дело в том, что решения линейных уравнений при произвольных начальных распределениях фотонов по энергиям, при которых полное число фотонов конечно, обязательно эволюционируют к равновесному виновскому спектру. Это не всегда осуществляется по отношению к нелинейным уравнениям. Для них предельным является распределение Бозе—Эйнштейна, но согласно этому распределению полное число фотонов не может быть произвольным. Действительно, предельное безразмерное среднее число заполнения фотонных состояний имеет ограничение

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\exp(x - \mu) - 1} \leq \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\exp(x) - 1} = 2.4041138. \quad (221)$$

Если величина интеграла (60) для начального распределения N_0 превосходит эту границу, то предельного распределения не существует.

На рис. 10 представлены графики функции $x^2 n(x, t)$, вычисленной в работе [40] при начальных распределениях, имитирующих дельта-функцию:

$$n(x, 0) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-(x-x_1)^2/\varepsilon^2}. \quad (222)$$

При расчетах бралось значение $\varepsilon = 0.01$. Если при $N_0 \leq 1$ решения нелинейного уравнения имеют тот же характер, что и на рис. 7,

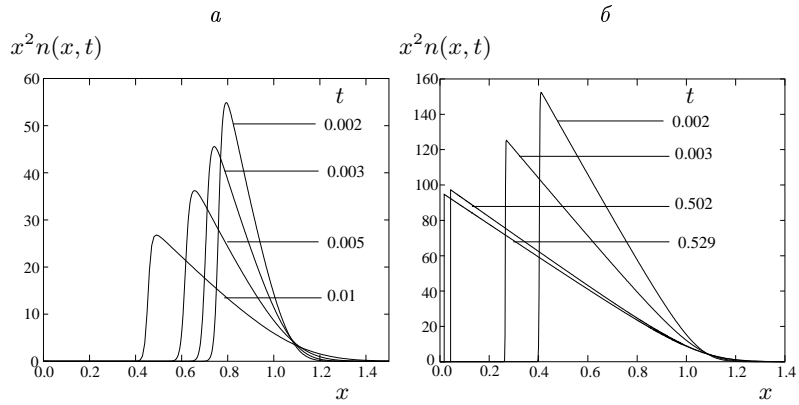


Рис. 10. Эволюция дельтаобразных начальных спектров:
a — при $N_0 = 10$, *б* — при $N_0 = 50$.

то с увеличением этого параметра сингулярность решений, выражающаяся в крутизне спектра и скорости его приближения к оси ординат, возрастает.

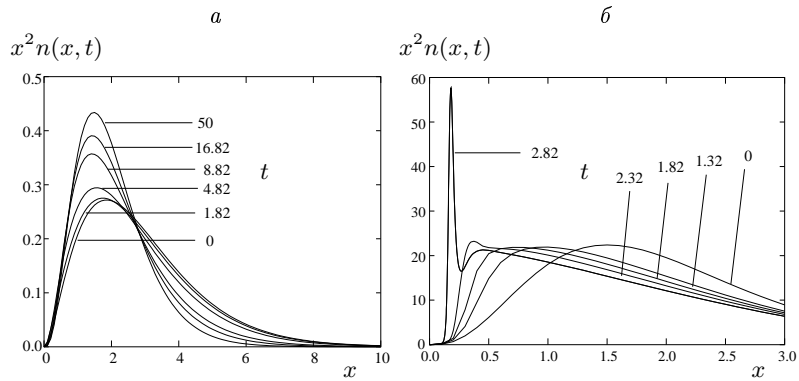


Рис. 11. Эволюция степенно-показательных начальных спектров:
a — при $N_0 = 1$, *б* — при $N_0 = 50$.

На рис. 11 из той же работы [40] показана эволюция спектра излучения при начальных распределениях

$$n(x, 0) = \frac{8N_0}{3} x e^{-2x}. \quad (223)$$

При $N_0 = 1$ никаких особенностей в поведении решения не возникает: оно плавно эволюционирует к распределению Бозе—Эйнштейна. Напротив, если $N_0 = 50$, то с приближением к оси ординат возникают выступы, напоминающие ударные фронты или квазилинии. Решения точного, интегрального уравнения демонстрируют указанные явления еще в большей степени, чем полученные в приближении Компанейца.

Здесь мы привели решения уравнений, учитывающих только комптоновское рассеяние. Конечно, необходимо принимать во внимание и другие механизмы излучения и поглощения фотонов. Например, тормозной механизм, с которым сравнивалось комптоновское рассеяние в § 1, должен эффективно поглощать фотоны малых частот и препятствовать их накоплению. Результирующий спектр при этом должен быть планковским.

В заключение этой главы укажем объекты, в которых осуществляются условия для большой роли комптоновского рассеяния.

§ 7. Астрофизические объекты с большой ролью комптоновского рассеяния

1. *Джеты из активных ядер галактик.* Как показывают наблюдения [72, 79], из активных ядер галактик (АЯГ), в центре которых находится черная дыра массой в $10^8 \div 10^9 M_\odot$, происходят выбросы, называемые джетами. Самая распространенная модель джета — струя, состоящая из сгустков. В ходе эволюции сгустков напряженность магнитного поля в них уменьшается от ~ 1 Гс до 10^{-6} Гс, а его энергия как-то при посредстве протонов переходит к электронам, которые оказываются ультрарелятивистскими. Энергии электронов превосходят их энергию покоя на несколько порядков (энергия покоя электрона соответствует температуре $6 \cdot 10^9$ К). Электроны в магнитном поле излучают синхротронным механизмом фотоны в радиодиапазоне. Излученные фотоны рассеиваются теми же электронами и сильно увеличивают свою энергию, переходя в более энергичную часть спектра, в оптику, рентгеновский и гамма-диапазоны. Этот механизм называется синхрокомптоновским (по-английски synchrotron self-Compton). Различные модели свечения таких источников обсуждаются в работах [73, 62].

Обычно принимается, что распределение электронов по импульсам изотропно, а по энергиям степенное γ^{-p} с характерными значениями γ порядка 10^2 – 10^7 и больше. Тогда синхротронное излучение тоже имеет степенной спектр, пропорциональный $\nu^{-(p-1)/2}$ (см. Главу III). В результате действия комптоновского механизма в гамма-диапазоне спектра возникает так называемый бамп (bump), т. е. горб. На более высоких частотах интенсивность спектра по различным причинам быстро спадает (завал спектра). Чем дальше простирается степенной спектр электронов, тем на больших частотах происходит завал.

Энергия электронов переходит к фотонам, которые покидают джет. Для поддержания свечения необходима подкачка энергии электронному газу. Имеется несколько моделей такой подкачки. Возможна непрерывная инжекция релятивистских электронов или их ускорение каким-нибудь механизмом. Источником энергии является ядро галактики (central engine). На протяжении заметного времени существует стационарный режим свечения.

2. *Нейтронные звезды и черные дыры в двойных системах.* В таких системах происходит перетекание вещества с обычной звезды на компактную, в результате чего вокруг последней образуется аккреционный диск [59]. Теория аккреционных дисков изложена во многих книгах, например, в [64].

Во внутренней части диска, близкой к аккрецирующему компактному объекту, температура очень большая, там горячий электронный газ рассеивает фотоны, излучаемые каким-нибудь первичным механизмом: синхротронным, тормозным или двойным комптоновским. Рассеянные фотоны могут рождают электрон-позитронные пары, в свою очередь аннигилирующие и дающие фотоны для последующих каскадных процессов рассеяния, рождения и аннигиляции пар [65].

Комптоновскому рассеянию обязано и формирование спектра аккрецирующих вещество одиночных нейтронных звезд [12].

Из полярных областей звезд, окруженных дисками, выбрасываются джеты, масштаб которых значительно меньше, чем в случае АЯГ, так как масса нейтронной звезды или черной дыры здесь порядка массы Солнца. Можно думать, однако, что явления, происходящие в АЯГ и в двойных системах, подобны, так что изучение внутригалактических джетов помогает понять природу активности АЯГ, так как они находятся гораздо ближе к нам и более доступны

для наблюдений, а главное, временные, пространственные и энергетические масштабы процессов на них на порядки меньше. Некоторые авторы двойные системы с выбросами вещества называют мини- и микрокварами [75]. Проблеме образования, строения и свечения дисков и джетов из них посвящены многие статьи сборников, некоторые из которых мы упоминали [59, 93].

3. *Горячие короны аккреционных дисков.* Аккреционные диски образуются около компактных объектов (нейтронных звезд или черных дыр звездных масс) или вокруг черных дыр в центре галактик. Вещество дисков во внешних их частях имеет температуру порядка 10^5 K, т. е. частицы там нерелятивистские. Однако короны таких дисков, т. е. более разреженные их оболочки, имеют температуру $10^9 \div 10^{10}$ K (аналогично, электроны в короне Солнца, температура поверхности которого 6000 K, имеют температуру порядка 10^6 K). Механизмы нагрева вещества короны могут быть аналогичны тем, которые действуют на Солнце.

Короны дисков оптически очень тонкие, так что в них рассеивается только малая доля излучения, идущего от диска. Однако рассеянное излучение оказывается в рентгеновском и гаммадиапазоне, где излучения до рассеяния не было совсем и где оно становится доступным наблюдению, так как рассеянные фотоны там очень энергичны [81].

Необходимо принимать во внимание взаимное влияние короны и диска друг на друга [80]. Сравнительно мягкие (УФ) фотоны диска, попадая в корону и рассеиваясь релятивистскими электронами, приобретают большую энергию и способность рождать пары. В свою очередь рассеянное в короне излучение частично возвращается в диск и разогревает его.

Синхротроновский механизм излучения в таких источниках также изучался, например, в работе [96].

4. *Реликтовое излучение.* Согласно модели горячей Вселенной на ранних этапах ее эволюции она имела очень высокую температуру, так что вещество было полностью ионизовано, а излучение находилось в равновесии с веществом. Спектр излучения был чисто планковским. Несколько процессов возмущали этот спектр. В определенные эпохи остывания Вселенной произошли аннигиляция вещества и антивещества, а затем рекомбинация электронов с атомами. В ходе расширения и, как следствие, остывания вещество и излучение разделились. Однако излучение все время оставалось с

большой точностью планковским. Оно дошло до настоящего времени в виде микроволнового космического фона, который называют также, подчеркивая его происхождение от ранних эпох развития Вселенной, реликтовым излучением (РИ) [16].

После эпохи рекомбинации образовались крупномасштабные структуры Вселенной: галактики и скопления галактик. При этих процессах также выделялась значительная энергия. Там, где образовались первичные структуры, излучение получило дополнительный вклад энергии и возникли локальные отклонения от теплового спектра. С течением времени отклонения локальной интенсивности от средней замыкались при рассеянии на электронах, но все же какие-то искажения в пространственном распределении излучения, которое теперь наблюдается в радиодиапазоне как реликтовый тепловой фон с температурой 2.7 K , должны остаться. Расчет замыкания и остаточной анизотропии реликтового излучения представляет большой интерес для космологии. Искажения спектра и их дальнейшая эволюция в значительной степени также определяются рассеянием. При расчетах искажений спектра применяется уравнение Компанейца [14, 21, 98]. Искажения изотропии РИ и его спектра по теоретическим оценкам составляют в настоящее время 10^{-5} от интенсивности РИ и наблюдаются.

Движения первичных структур Вселенной могут порождать поляризацию излучения [63]. Ожидаемая степень поляризации возмущений РИ достигает 10 %, т. е. 10^{-6} от интенсивности самого РИ. В настоящее время технические возможности аппаратуры в радиодиапазоне подошли к такому уровню, который позволяет наблюдать все эти явления.

5. *Горячий газ в скоплениях галактик.* Из наблюдений континуума и линий в рентгеновской области спектра следует, что в богатых скоплениях галактик имеется горячий электронный газ с температурой порядка 10^8 K . Масса газа сравнима с массой составляющих скопление галактик (и даже больше ее). Этот газ рассеивает микроволновое реликтовое излучение (РИ) и сдвигает его спектр в сторону больших частот. Фотоны получают дополнительную, хотя не очень большую, но сравнимую с исходной энергию, так что на малых длинах волн излучение усиливается, а на более длинных — ослабляется. Это явление называется эффектом Сюняева—Зельдовича [18]. Обзор наблюдательных данных и теории этого эффекта представлен в работе [83].

Характер искажения спектра отражает также peculiarное движение скопления по отношению к реликтовому фону. Это же движение может создавать поляризацию рассеянного излучения. Наблюдения хода изменения спектра и поляризации РИ по телу не очень далеких скоплений дает возможность выявить распределения плотности, температуры и макроскопической скорости движения электронного газа в скоплениях [82, 99]. Одновременно наблюдения РИ в радиодиапазоне вместе с рентгеновскими позволяют уточнить параметры космологических моделей [83].

6. *Другие объекты.* Комptonовское рассеяние играет заметную роль и в ряде объектов, отличных от указанных выше. Например, межзвездное излучение в Галактике рассеивается энергичными электронами космических лучей [77]. Это излучение сильно не изотропно, так как идет в основном от галактической плоскости. Его преобразование в жесткие диапазоны мешает изучению излучения тех же диапазонов космического происхождения.

Рассчитываются модели звездных атмосфер с учетом комptonовского рассеяния рентгеновского излучения некоторого внешнего источника, например, аккреционного диска [71].

В работе [30] показано, что нелинейный (индуцированный) эффект Комптона способствует нагреву вещества внешних оболочек АЯГ и пульсаров.

Глава VI. Двухфотонное рождение и аннигиляция электрон-позитронных пар

§ 1. Кинематика процессов

1. *Описание процессов с парами.* В релятивистских астрофизических объектах, таких как активные ядра галактик (АЯГ), короны и внутренние области аккреционных дисков вокруг нейтронных звезд и черных дыр, наряду с комптоновским рассеянием большую роль играют процессы, связанные с электрон-позитронными парами. В ходе комптонизации фотоны набирают энергию и становятся способными рождать пары. Последующая их аннигиляция порождает каскадные переходы фотонов в частицы и обратно. Эти процессы учитываются при расчетах моделей АЯГ [94, 92, 70] и аккреционных дисков [95, 58], а также интерпретации наблюдений гамма-всплесков [70] и компактных рентгеновских источников [91].

Выражения для излучательной способности электрон-позитронного газа и для коэффициента поглощения при рождении пар были получены в статьях [87, 88, 89], результаты которых широко используются. В настоящей главе дадим описание этих процессов, следуя указанным работам, а также статьям [34, 38].

В первых нескольких пунктах этого параграфа приведем формулы и соотношения, общие для обоих двухфотонных процессов: аннигиляции и рождения электрон-позитронной пары. Будем пользоваться в основном безразмерными обозначениями и релятивистской квантовой системой единиц (РКСЕ).

Электроны и позитроны будем называть для определенности частицами с массой или просто частицами, хотя фотоны тоже частицы, но с нулевой массой покоя. Трехмерные и четырехмерные, размерные и безразмерные импульсы частиц и фотонов в произвольной системе отсчета будем обозначать точно так же, как и в предыдущей главе. Заметим, что ряд обозначений в этих главах одинаковы, но некоторые соответствуют полностью совпадающим, а другие различным величинам. Для различения характеристик электронов и позитронов будем снабжать все величины, относящиеся к ним, соответствующими индексами \mp , например, \underline{z}_{\mp} . Что касается участвующих в реакциях фотонов, то они равноправны, но за одним из них мы будем следить, т. е. для него будет формулироваться кинетическое уравнение и т.п. Его будем называть основным

и приводить его характеристики без индексов. Все величины, относящиеся ко второму фотону будем отмечать индексом 1.

Процесс двухфотонной аннигиляции является, как говорят, другим каналом той же реакции, что и комптоновское рассеяние, и описывается похожими диаграммами Фейнмана (рис. 1), у которых однако начальные и конечные состояния изменены. Рождению пары отвечают те же диаграммы, что и на рис. 1, но перевернутые.

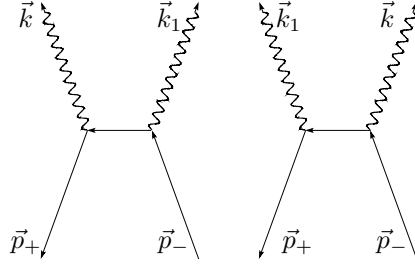


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана для аннигиляции пар.

Введем безразмерные обозначения для сумм импульсов и для скалярных произведений

$$\underline{p}_+ + \underline{p}_- = \{p_{0+} + p_{0-}, \vec{p}_+ + \vec{p}_-\} = mc\underline{s} = mc\{s_0, \vec{s}\}, \quad (1)$$

$$\underline{k} \underline{k}_1 = m^2 c^2 q, \quad \underline{p}_- \underline{k} = m^2 c^2 \xi, \quad \underline{p}_- \underline{k}_1 = m^2 c^2 \xi_1, \quad (2)$$

так что

$$\underline{s} = \{s_0, \vec{s}\} = \underline{z}_+ + \underline{z}_- = \{\gamma_+ + \gamma_-, \vec{z}_+ + \vec{z}_-\}, \quad \underline{x} \underline{x}_1 = q, \quad \underline{z}_- \underline{x} = \xi, \quad \underline{z}_- \underline{x}_1 = \xi_1. \quad (3)$$

Обозначим также косинусы углов между направлениями импульсов частиц и импульсов фотонов:

$$\zeta = \vec{\Omega}_+ \vec{\Omega}_-, \quad \mu = \vec{\omega} \vec{\omega}_1. \quad (4)$$

Тогда

$$\vec{z}_+ \vec{z}_- = z_+ z_- \zeta, \quad \vec{x} \vec{x}_1 = x x_1 \mu, \quad \underline{x} \underline{x}_1 = x x_1 (1 - \mu) = q. \quad (5)$$

2. *Законы сохранения и их следствия.* При рождении пары электрон-позитрон двумя фотонами и при обратном процессе —

двухфотонной аннигиляции — выполняются законы сохранения энергии и импульса, которые в безразмерном виде гласят

$$\underline{z}_+ + \underline{z}_- = \underline{x} + \underline{x}_1 = \underline{s}, \quad \gamma_+ + \gamma_- = x + x_1 = s_0, \quad z_+ \vec{\Omega}_+ + z_- \vec{\Omega}_- = x \vec{\omega} + x_1 \vec{\omega}_1 = \vec{s}. \quad (6)$$

Возведение четырехмерного равенства (6) в квадрат дает

$$1 + \underline{z}_+ \underline{z}_- = \underline{x} \underline{x}_1 = \frac{s^2}{2} = \frac{s_0^2 - s^2}{2} = q. \quad (7)$$

Такое же возведение (6) в квадрат после перенесения в другую часть равенства импульсов одного из фотонов и (например) электрона приводит к соотношениям

$$\underline{z}_+ \underline{x} = \underline{z}_- \underline{x}_1 = \xi_1, \quad \underline{z}_+ \underline{x}_1 = \underline{z}_- \underline{x} = \xi. \quad (8)$$

Наконец, после умножения (6) на импульсы фотонов получаем

$$\underline{x}(\underline{z}_+ + \underline{z}_-) = \underline{x}_1(\underline{z}_+ + \underline{z}_-) = \underline{x} \underline{x}_1. \quad (9)$$

Следствия законов сохранения можно записать также в виде

$$s_0^2 - s^2 = 2q, \quad s^2 = x^2 + x_1^2 + 2xx_1\mu = z_-^2 + z_+^2 + 2z_-z_+\zeta, \quad (10)$$

$$\underline{z}_+ \underline{s} = \underline{z}_- \underline{s} = \underline{x} \underline{s} = \underline{x}_1 \underline{s} = \xi + \xi_1 = q, \quad \underline{z}_- \underline{x} = \underline{z}_+ \underline{x}_1 = \xi, \quad \underline{z}_- \vec{x}_1 = \underline{z}_+ \vec{x} = \xi_1, \quad (11)$$

$$\underline{z}_+ \underline{z}_- = \gamma_+ \gamma_- - z_+ z_- \zeta = q - 1. \quad (12)$$

Из первого соотношения в (10) вытекает условие, которое накладывается на значения параметров s_0 и q :

$$s^2 = s_0^2 - 2q \geq 0, \quad s_0 \geq \sqrt{2q}. \quad (13)$$

Значения $s = 0$, $s_0 = \sqrt{2q}$ отвечают системе центра масс.

Какими бы ни были импульсы электрона и позитрона, всегда выполняется неравенство

$$\underline{z}_+ \underline{z}_- \geq 1 \quad \text{или} \quad \gamma_+ \gamma_- \geq 1 + \vec{z}_+ \vec{z}_-, \quad (14)$$

которое после возведения в квадрат приводится к очевидному неравенству $|\vec{z}_+ - \vec{z}_-|^2 + |\vec{z}_+ \times \vec{z}_-|^2 \geq 0$. Из (12) и (14) следует неравенство для импульсов фотонов:

$$q = xx_1(1 - \mu) \geq 2, \quad xx_1 \geq \frac{2}{1 - \mu}. \quad (15)$$

Во всяком случае $xx_1 \geq 1$. Не любые фотоны могут родить пару или образоваться при ее аннигиляции.

3. *Импульсы при аннигиляции.* Перейдем к рассмотрению процесса аннигиляции, т. е. будем считать заданными импульсы частиц.

Построим в выбранной системе отсчета ортонормированный базис, приняв за направление оси аппликат \vec{e}_3 вектор \vec{s} . В качестве направления второго орта возьмем векторное произведение $\vec{\Omega}_+ \times \vec{\Omega}_-$, так что ось ординат будет ортогональна векторам $\vec{\Omega}_+$ и $\vec{\Omega}_-$ (и тем самым векторам \vec{s} и \vec{e}_3). Ось абсцисс направлена по проекции импульса электрона на плоскость, перпендикулярную \vec{s} . Таким образом, орты базиса выражаются через характеристики частиц и, следовательно, будут основными при описании процесса аннигиляции:

$$\vec{e}_1^p = \frac{(z_+ + z_- \zeta) \vec{\Omega}_- - (z_- + z_+ \zeta) \vec{\Omega}_+}{s \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \vec{e}_2^p = \frac{\vec{\Omega}_+ \times \vec{\Omega}_-}{\sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \vec{e}_3^p = \vec{e}_3 = \frac{\vec{s}}{s}. \quad (16)$$

При таком определении базиса

$$\vec{\Omega}_\pm = \frac{1}{s} \left[(z_\pm + z_\mp \zeta) \vec{e}_3 \mp z_\mp \sqrt{1 - \zeta^2} \vec{e}_1^p \right]. \quad (17)$$

Получим теперь соотношения, связывающие импульсы фотонов с импульсами частиц с массой. Напомним, что при аннигиляции заданными величинами являются \vec{z}_\pm и следовательно $z_\pm, \gamma_\pm, \vec{\Omega}_\pm, \zeta, \vec{s}, s_0$, а также величина q и орты базиса (16). Поскольку законов сохранения 4, а параметров излучаемых фотонов 6, то независимыми из них являются только 2. Удобно выбрать в качестве этих независимых параметров два полярных угла, характеризующие направление одного из фотонов, а именно, того, который мы назвали условно основным и не отмечаем относящиеся к нему величины никакими числовыми индексами. Положим ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$)

$$\vec{\omega} = \sin \theta (\cos \varphi \vec{e}_1^p + \sin \varphi \vec{e}_2^p) + \cos \theta \vec{e}_3. \quad (18)$$

Величина импульса (т. е. частота) основного фотона может быть найдена из второго соотношения в (10):

$$x = \frac{q}{s_0 - s \cos \theta}. \quad (19)$$

Частота второго фотона находится сразу же из закона сохранения энергии:

$$x_1 = s_0 - x = \frac{s^2 + q - ss_0 \cos \theta}{s_0 - s \cos \theta} = \frac{s_0^2 + s^2 - 2ss_0 \cos \theta}{2(s_0 - s \cos \theta)}. \quad (20)$$

Из закона сохранения импульса находим и направление второго фотона

$$\vec{\omega}_1 = \frac{\vec{s} - x\vec{\omega}}{x_1} = \frac{(s_0 - s \cos \theta)\vec{s} - q\vec{\omega}}{s^2 + q - ss_0 \cos \theta}. \quad (21)$$

Отсюда для косинуса угла между фотонами выводятся соотношения

$$1 + \mu = \frac{2s^2 \sin^2 \theta}{s_0^2 + s^2 - 2ss_0 \cos \theta}, \quad 1 - \mu = 2 \frac{(s_0 - s \cos \theta)^2}{s_0^2 + s^2 - 2ss_0 \cos \theta}. \quad (22)$$

Из этих формул можно легко получить выражения для μ и $\sqrt{1 - \mu^2}$.

Получим еще границы для частот излучения фотонов и угла между ними. Из (19), (20) и первого равенства в (10) следует, что частоты их заключены между $(s_0 - s)/2$ и $(s_0 + s)/2$. Косинус μ заключен между -1 и максимальным значением $-1 + 2s^2/s_0^2 = (s^2 - 2q)/(s^2 + 2q)$. Последнее утверждение вытекает из того, что неотрицательная величина $1 + \mu$ как функция θ согласно (22) равна 0 при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, а при $\cos \theta = s/s_0 < 1$ имеет максимум, равный $2s^2/s_0^2$. При формальной подстановке $s = s_0$ (что невозможно) оказывается $\mu = \cos \theta$ и эта функция максимума не имеет.

4. *Аннигиляция в системе центра масс.* Перейдем в систему центра масс электрона и позитрона. Для этого совершим преобразование Лоренца со скоростью $c\vec{s}/s_0$. Соответствующий лоренцевский множитель $s_0/\sqrt{2q}$. Для частиц с массой, характеристики которых заданы, получается

$$\vec{z}_\pm^c = \left\{ \frac{s_0}{\sqrt{2q}} \left(\gamma_\pm - \frac{\vec{s}}{s_0} \vec{z}_\pm \right), \vec{z}_\pm - \frac{s_0}{\sqrt{2q}} \frac{\vec{s}}{s_0} \gamma_\pm + \left(\frac{s_0}{\sqrt{2q}} - 1 \right) \left(\vec{s} \vec{z}_\pm \right) \frac{\vec{s}}{s^2} \right\}. \quad (23)$$

С учетом следствий из законов сохранения легко убедиться, что энергии электрона и позитрона в этой системе равны между собой, а преобразованные пространственные составляющие импульсов частиц равны по модулю и противоположно направлены. Импульсы

фотонов в системе центра масс имеют те же свойства, что и импульсы участвующих в реакциях частиц; частоты фотонов равны, а направления их импульсов противоположны.

Так как преобразование Лоренца к системе центра масс совершается в направлении одного из ортов базиса (16), то в этой системе все три орта этого базиса останутся неизменными. Запишем векторы импульсов реагирующих частиц в системе центра масс в безразмерных обозначениях в виде разложений по базису (16).

$$\underline{z}_{\pm}^c = \{\gamma, \mp z \vec{\Omega}_c\}, \quad \vec{\Omega}_c = \sin \epsilon_p \vec{e}_1^p + \cos \epsilon_p \vec{e}_3, \quad (24)$$

где $\gamma = \sqrt{q/2}$, $z = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \sqrt{(q-2)/2}$, а угол ϵ_p определяется через

$$\cos \epsilon_p = \frac{\gamma}{z} \frac{\gamma_- - \gamma_+}{s}, \quad \sin \epsilon_p = \frac{z_+ z_- \sqrt{1 - \zeta^2}}{zs}. \quad (25)$$

При выводе этих выражений приняты во внимание легко проверяемые тождества

$$\vec{s}(\vec{z}_- - \vec{z}_+) = s_0(\gamma_- - \gamma_+), \quad \gamma^2(\gamma_- - \gamma_+)^2 - z^2 s^2 = -z_-^2 z_+^2 (1 - \zeta^2). \quad (26)$$

Для фотонов определяем вектор $\vec{\omega}_c$

$$\underline{x}^c = \gamma\{1, \vec{\omega}_c\}, \quad \underline{x}_1^c = \gamma\{1, -\vec{\omega}_c\}. \quad (27)$$

Пусть этот вектор в принятом базисе имеет зенитный угол θ_c . Ввиду неизменности ортов базиса азимутальные углы в обеих системах отсчета совпадают, а зенитные преобразуются согласно законам аберрации:

$$\sin \theta_c = \frac{\sqrt{s_0^2 - s^2}}{s_0 - s \cos \theta} \sin \theta, \quad \cos \theta_c = \frac{s_0 \cos \theta - s}{s_0 - s \cos \theta}. \quad (28)$$

Обратные формулы получаются заменами $\theta \leftrightarrow \theta_c$ и $s \rightarrow -s$. Через косинус указанного угла выражаются и частоты фотонов в исходной системе отсчета (эффект Доплера):

$$x = \frac{s_0 + s \cos \theta_c}{2}, \quad x_1 = \frac{s_0 - s \cos \theta_c}{2}. \quad (29)$$

Теперь выберем другой, более удобный для последующего базис, у которого орт ординат тот же, что и у (16), а два других орта

повернуты относительно (16) на угол ϵ_p так, чтобы третий орт был направлен по $\vec{\Omega}_c$, т. е. сделаем преобразование поворота

$$\vec{e}_1^c = \cos \epsilon_p \vec{e}_1^p - \sin \epsilon_p \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2^c = \vec{e}_2^p, \quad \vec{e}_3^c = \vec{\Omega}_c = \sin \epsilon_p \vec{e}_1^p + \cos \epsilon_p \vec{e}_3. \quad (30)$$

Этот, новый базис назовем аннигиляционным. В нем орт направления основного фотона $\vec{\omega}_c$ зададим углами $\arccos \eta$, ψ , которые можно использовать как инвариантные переменные. Новые углы связаны со старыми в той же системе отсчета формулами, следующими из (30):

$$\sin \theta_c \cos \varphi = \eta \sin \epsilon_p + \sqrt{1 - \eta^2} \cos \epsilon_p \cos \psi, \quad \sin \theta_c \sin \varphi = \sqrt{1 - \eta^2} \sin \psi, \quad (31)$$

$$\cos \theta_c = \eta \cos \epsilon_p - \sqrt{1 - \eta^2} \sin \epsilon_p \cos \psi. \quad (32)$$

Здесь для получения обратных формул кроме замен полярных координат требуется произвести замену $\epsilon_p \rightarrow -\epsilon_p$. В частности,

$$\eta = \cos \theta_c \cos \epsilon_p + \sin \theta_c \sin \epsilon_p \cos \varphi. \quad (33)$$

Связь угловых переменных θ , φ и η , ψ легко получить путем комбинирования формул (28) и (31)–(32):

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \varphi &= \frac{\gamma}{x} [\eta \sin \epsilon_p + \sqrt{1 - \eta^2} \cos \epsilon_p \cos \psi], \\ \sin \theta \sin \varphi &= \frac{\gamma}{x} \sqrt{1 - \eta^2} \sin \psi, \quad \cos \theta = \frac{s + s_0 \cos \theta_c}{s_0 + s \cos \theta_c}, \end{aligned} \quad (34)$$

где $\cos \theta_c$ дается формулой (32). Обратные формулы получаются заменой $\epsilon_p \rightarrow -\epsilon_p$.

Введение нового (аннигиляционного) базиса потребовалось потому, что в нем получаются простые выражения в системе центра масс не только для импульсов частиц с массой $\underline{z}_{\pm} = \{\gamma, \mp z \vec{e}_3^c\}$, но и для скалярных произведений импульсов фотонов и частиц в этой системе

$$\xi = \gamma(\gamma - z\eta), \quad \xi_1 = \gamma(\gamma + z\eta). \quad (35)$$

Напомним, что в случае фотонов инвариантны как само отношение $d^3x/x = x dx d^2\omega$, так и его части, а именно dx/x и элемент поверхности на сфере радиуса x , т. е. $x^2 d^2\omega$. Этот инвариант $x^2 d^2\omega = x^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ при переходе в систему центра масс преобразуется в $\gamma^2 \sin \theta_c d\theta_c d\varphi$. В свою очередь в аннигиляционном базисе

этот элемент приобретет вид $\gamma^2 d\eta d\psi$. В этом выражении от переменной η можно перейти к переменной ξ , так как $d\xi = -\gamma z d\eta$. Таким образом, элемент площади на сфере радиуса, равного импульсу основного фотона, может быть представлен в инвариантных координатах ξ (или η) и ψ в виде $\gamma^2 d\eta d\psi$ или $d\psi d\xi/\beta$, где $\beta = z/\gamma$ — безразмерная скорость частиц в системе центра масс.

Через инвариантные координаты η и ψ у нас выражены частоты фотонов (формулы (29)) и их направления (формулы (34)), так как входящий туда $\cos\theta_c$ дается формулой (32). В свою очередь величины η и $\sqrt{1-\eta^2} \geq 0$ можно выразить через ξ с помощью (35):

$$\eta = \frac{\gamma^2 - \xi}{\gamma z}, \quad \sqrt{1-\eta^2} = \frac{\sqrt{2\gamma^2\xi - \xi^2 - \gamma^2}}{\gamma z} = \frac{\sqrt{(\gamma^2 + \gamma z - \xi)(\xi - \gamma^2 + \gamma z)}}{\gamma z}. \quad (36)$$

Переменная η и угол ψ принимают значения из промежутков $[-1, 1]$ и $[0, 2\pi]$ соответственно, как сферические координаты. Из формулы (35) (или из второго равенства в (36)) следует, что величина ξ лежит в промежутке, задаваемом неравенствами

$$\gamma(\gamma - z) = \frac{1}{1 + \beta} \leq \xi \leq \gamma(\gamma + z) = \frac{1}{1 - \beta}. \quad (37)$$

Тот же промежуток изменения и у $\xi_1 = q - \xi$.

5. *Импульсы частиц при рождении пары.* Теперь перейдем к рассмотрению геометрии процесса рождения пары, когда заданы характеристики фотонов. Построим в исходной системе отсчета (той же, что и раньше) другой ортонормированный базис, ось аппликат которого по-прежнему совпадает с осью аппликат базиса (16), т. е. вектором \vec{e}_3 . Два перпендикулярных к нему орта построим на векторах направлений фотонов, рождающих пару, так что

$$\vec{e}_1^{\text{ph}} = \frac{(x_1 + x\mu)\vec{\omega} - (x + x_1\mu)\vec{\omega}_1}{s\sqrt{1-\mu^2}}, \quad \vec{e}_2^{\text{ph}} = \frac{\vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad \vec{e}_3^{\text{ph}} = \vec{e}_3 = \frac{\vec{s}}{s}. \quad (38)$$

Орты выбраны так, чтобы было

$$\vec{\omega} = \cos\theta\vec{e}_3 + \sin\theta\vec{e}_1^{\text{ph}}, \quad \cos\theta = \frac{x + x_1\mu}{s}, \quad \sin\theta = \frac{x_1}{s}\sqrt{1-\mu^2}, \quad (39)$$

т. е. угол θ по-существу тот же, что и в (18). Легко убедиться, что между двумя ортами базисов (16) и (38), имеющими общий орт \vec{e}_3 , выполняются соотношения

$$\vec{e}_1^{\text{ph}} = \cos \varphi \vec{e}_1^{\text{p}} + \sin \varphi \vec{e}_2^{\text{p}}, \quad \vec{e}_2^{\text{ph}} = -\sin \varphi \vec{e}_1^{\text{p}} + \cos \varphi \vec{e}_2^{\text{p}}. \quad (40)$$

Перепишем соотношения, связывающие импульсы частиц между собой и с импульсами фотонов, применительно к рождению частиц. При рождении пар заданными величинами являются \vec{x}, \vec{x}_1 и следовательно $x, x_1, \vec{\omega}, \vec{\omega}_1, \mu, \vec{s}, s_0$, а также величина q и орты базиса (38) \vec{e}_j^{ph} . Величины \vec{s}, s_0 и q в этом случае выражаются через фотонные характеристики.

Наличие четырех законов сохранения приводит к тому, что как и при аннигиляции, независимыми остаются два параметра из характеристик рождающихся частиц. Попробуем, как и для фотонов при аннигиляции, выбрать в качестве независимых параметров два угла, определяющие направление одной из частиц с массой, например, электрона. Положим в фотонном базисе (38)

$$\vec{\Omega}_- = \sin \theta_- (\cos \varphi_- \vec{e}_1^{\text{ph}} + \sin \varphi_- \vec{e}_2^{\text{ph}}) + \cos \theta_- \vec{e}_3. \quad (41)$$

Энергия и импульс электрона могут быть найдены из второго соотношения в (10), которое можно записать в виде

$$s_0 \gamma_- - s z_- \cos \theta_- = q. \quad (42)$$

Возведя его в квадрат двумя способами, найдем два уравнения для определения соответственно γ_- и z_- :

$$(s_0^2 - s^2 \cos^2 \theta_-) \gamma_-^2 - 2s_0 q \gamma_- + q^2 + s^2 \cos^2 \theta_- = 0, \quad (43)$$

$$(s_0^2 - s^2 z_-^2 \cos^2 \theta_-) - 2s q z_- \cos \theta_- - q^2 - s_0^2 = 0. \quad (44)$$

Из уравнения (43) находим

$$\gamma_-^{\pm}(\cos \theta_-) = \frac{q s_0 \pm s r \cos \theta_-}{s_0^2 - s^2 \cos^2 \theta_-}, \quad (45)$$

где

$$r = \sqrt{q^2 - 2q - s^2 \sin^2 \theta_-} = \sqrt{q^2 - s_0^2 + s^2 \cos^2 \theta_-}. \quad (46)$$

Всегда $\gamma_-(\cos \theta_-) > 1$, так как соответствующее решение уравнения (44)

$$z_-^{\pm}(\cos \theta_-) = \frac{q s \cos \theta_- \pm s_0 r}{s_0^2 - s^2 \cos^2 \theta_-} \quad (47)$$

и $\gamma_-^2(\cos\theta_-) = 1 + z_-^2(\cos\theta_-)$ при обоих знаках. Прямой подстановкой проверяется, что при обоих (соответствующих, т. е. верхних или нижних) знаках формулы (45) и (47) дают решение и исходного уравнения (42). Легко проверить также, что $r = \pm(q\gamma_-^\pm - s_0)/z_-^\pm$.

Величина энергии позитрона находится из закона сохранения энергии: $\gamma_+ = s_0 - \gamma_-$. Из сохранения импульса находим и направление импульса позитрона $\vec{\Omega}_+ = (\vec{s} - z_- \vec{\Omega}_-)/z_+$. Поскольку каждая из величин γ_- и z_- принимает по два значения, то и импульсов позитрона получится два.

Не при всех значениях импульсов начальных фотонов и угла θ_- возможно рождение пары. Из приведенных формул следуют ограничения на значения $s_0 = x + x_1$, $q = xx_1(1 - \mu)$ и $\cos\theta_-$. Рассмотрим их, а также обсудим неоднозначность импульсов частиц.

6. *Неоднозначность и ее устранение.* Под корнем в (46) должна быть неотрицательная величина. Поэтому при $q \geq s_0$ значения угла θ_- могут быть произвольными. Если же $q < s_0$, то для положительности подкоренного выражения требуется, чтобы было $\sin\theta_- < \sqrt{q^2 - 2q/s}$ (или $|\cos\theta_-| > \sqrt{s_0^2 - q^2/s}$).

Условие $z_- \geq 0$ накладывает ограничения на значения угла θ_- и выбор знака в последних формулах. Если $q \geq s_0$, то $s_0 r > qs|\cos\theta_-|$ и надо в формулах (45) и (47) брать только +. Если $q < s_0$, то корень меньше $qs|\cos\theta_-|$ и можно брать оба знака, но считать при этом $\cos\theta_- > 0$, а точнее $\cos\theta_- \geq \sqrt{s_0^2 - q^2/s}$.

Проследим поведение неоднозначности решения при изменении параметров, ограничившись значениями $\cos\theta_- \geq 0$, так как функции (47) обладают центральной симметрией относительно точки $\cos\theta_- = 0$, т. е. симметричные точки получаются при изменении знака $\cos\theta_-$ с одновременным изменением верхнего индекса. Начнем со значений

$$z_-^\pm(1) = \frac{\sqrt{s_0^2 - 2q}\sqrt{q} \pm s_0\sqrt{q-2}}{2\sqrt{q}}, \quad \gamma_-^\pm(1) = \frac{s_0 \pm \sqrt{s_0^2 - 2q}\sqrt{1-2/q}}{2}. \quad (48)$$

Посмотрим, как величины $z_-^\pm(1)$ зависят от s_0 . Значение с верхним индексом плюс положительно при всех возможных значениях $s_0 \geq \sqrt{2q}$. При верхнем индексе минус величина отрицательна при изменении s_0 от наименьшего возможного значения $s_0 = \sqrt{2q}$ до $s_0 = q$. Оба значения строго возрастают при росте s_0 . При больших s_0 этот рост почти линеен.

При граничном значении $\cos \theta_- = \sqrt{s_0^2 - q^2}/s$, где $s_0 \geq q$, величины с обоими знаками совпадают, так как при этом $r = 0$:

$$z_{\pm}^{\pm}(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s) = \sqrt{s_0^2 - q^2}/q, \quad \gamma_{\pm}^{\pm}(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s) = s_0/q. \quad (49)$$

Общее значение $z_{\pm}^{\pm}(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s)$ также растет с ростом s_0 , причем почти линейно при больших s_0 (тогда величины $\gamma_{\pm}^{\pm}(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s)$ просто пропорциональны s_0).

Легко доказать двойное неравенство $z_{-}^{+}(1) > z_{-}^{\pm}(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s) \geq z_{-}^{-}(1)$, т. е.

$$\frac{\sqrt{s_0^2 - 2q\sqrt{q} + s_0\sqrt{q-2}}}{2\sqrt{q}} s > \frac{\sqrt{s_0^2 - q^2}}{q} \geq \frac{\sqrt{s_0^2 - 2q\sqrt{q} - s_0\sqrt{q-2}}}{2\sqrt{q}}. \quad (50)$$

Первая его часть строгая, во второй же части равенство достигается при $s_0 = q$. Простые преобразования, а именно, умножение первой части на $2q$, а второй на $q \left(q\sqrt{s_0^2 - 2q} + s_0\sqrt{q(q-2)} \right) / \sqrt{s_0^2 - q^2}$ приводят к двум неравенствам

$$q\sqrt{s_0^2 - 2q} + s_0\sqrt{q(q-2)} > 2\sqrt{s_0^2 - q^2}, \quad q\sqrt{s_0^2 - 2q} + s_0\sqrt{q(q-2)} > q\sqrt{s_0^2 - q^2}. \quad (51)$$

Знак равенства выпал ввиду того, что делитель $\sqrt{s_0^2 - q^2}$ обращается в нуль при $s_0 = q$. Второе неравенство более сильное, так как $q \geq 2$, и мы докажем его. Простое возведение его в квадрат приводит к

$$2qs_0\sqrt{s_0^2 - 2q\sqrt{q(q-2)}} > -q(s_0^2 + q^2)(q-2), \quad (52)$$

что очевидно.

Еще одна характерная точка $\cos \theta_- = 0$ возможна только при знаке $+$ и $s_0 \leq q$. При этом $z_{-}^{+}(0) = \sqrt{q^2 - s_0^2}/s_0$, а $\gamma_{-}^{+}(0) = q/s_0$. Здесь s_0 может меняться от $\sqrt{2q}$ до q , а значение $z_{-}^{+}(0)$, соответственно, от $\sqrt{(q-2)/2}$ до 0 ($\gamma_{-}^{+}(0)$ от $\sqrt{q/2}$ до 1).

Таким образом, если $q \leq s_0$, две ветви $z_{\pm}^{\pm}(\cos \theta_-)$ составляют одну кривую, представляющую $\cos \theta_-$ как однозначную функцию от z_- , формула для которой находится из (42). Косинус равен 1 при $z_- = z_{-}^{-}(1)$, убывает до $\sqrt{s_0^2 - q^2}/s$ при $z_- = z_{\pm}^{\pm}(\sqrt{s_0^2 - q^2}/s)$ и снова растет до 1 при $z_- = z_{-}^{+}(1)$. Когда $q = s_0$, вся ветвь $z_{-}^{-} = 0$ тождественно при $\cos \theta_- \geq 0$. Ввиду центральной симметрии при этом тождественным нулем является ветвь z_{-}^{+} при $\cos \theta_- \leq 0$.

Если оказывается $q > s_0$, то ветви перегруппируются: ветвь z_-^+ вся (при всех $\cos \theta_-$) становится положительной, а вся ветвь z_-^- — отрицательной. При этом $z_-^+(-1) < z_-^+(0) < z_-^+(1)$ или

$$\frac{s_0 \sqrt{q^2 - 2q} - q \sqrt{s_0^2 - 2q}}{2q} < \frac{\sqrt{q^2 - s_0^2}}{s_0} < \frac{s_0 \sqrt{q^2 - 2q} + q \sqrt{s_0^2 - 2q}}{2q}. \quad (53)$$

Левое неравенство доказывается умножением обеих его частей на сумму $s_0 (s_0 \sqrt{q^2 - 2q} + q \sqrt{s_0^2 - 2q})$, а правое соответственно — на разность $s_0 (s_0 \sqrt{q^2 - 2q} - q \sqrt{s_0^2 - 2q})$, которая, как легко проверить, положительна, с последующим возведением в квадрат. В рассматриваемом случае ($q > s_0$) при изменении z_- от $z_-^+(-1)$ до $z_-^+(1)$ косинус изменяется от -1 до 1 .

Итак, можно утверждать, что в общем случае при изменении величины z_- на отрезке

$$\left[\left| s_0 \sqrt{q^2 - 2q} - q \sqrt{s_0^2 - 2q} \right| / 2q, \left(s_0 \sqrt{q^2 - 2q} + q \sqrt{s_0^2 - 2q} \right) / 2q \right] \quad (54)$$

$\cos \theta_-$ является однозначной функцией z_- и определяется формулой

$$\cos \theta_- = \frac{s_0 \gamma_- - q}{z_- s}. \quad (55)$$

Ввиду этого при описании рождения пары мы будем задавать именно длину импульса, например, электрона z_- , взяв ее величину из промежутка (54). По ней найдем энергии электрона γ_- и позитрона $\gamma_+ = s_0 - \gamma_-$, затем последовательно найдутся z_+ , $\cos \theta_+$, $\sin \theta_- \geq 0$, а также величина ζ из последнего равенства в (10). Затем можно найти угловые характеристики позитрона из соотношений

$$z_- \cos \theta_- + z_+ \cos \theta_+ = s, \quad z_- \sin \theta_- = z_+ \sin \theta_+, \quad (56)$$

являющихся следствием специального выбора базиса. Получающиеся формулы находятся в согласии с (17).

7. Рождение пары в системе центра масс. Запишем векторы импульсов реагирующих частиц в системе центра масс в виде разложений по базису (38). Как и у базиса (16), орты базиса (38) при переходе в систему центра инерции останутся неизменными. Таким образом, для фотонов получаются прежние формулы (27), где

$\vec{\omega}_c = \sin \theta_c \vec{e}_1^{\text{ph}} + \cos \theta_c \vec{e}_3$, а угол θ_c на этот раз определяется через функции

$$\cos \theta_c = \frac{x - x_1}{s}, \quad \sin \theta_c = \frac{xx_1 \sqrt{1 - \mu^2}}{\gamma s}, \quad (57)$$

что согласуется с формулами (19), (20), (22), (28) и (29).

Что касается частиц, то неоднозначность значений длин их импульсов приводит к неоднозначности и их направлений в системе центра масс при одинаковой энергии γ . При задании же в качестве основной величины z_- для частиц получается прежняя формула (24) с тем же вектором $\vec{\Omega}_c$. В принятом базисе (38) полярный угол совпадает с ϵ_p , определяемым формулой (25), где характеристики частиц находятся, как это описано в предыдущем пункте. Азимут можно выбрать тот же, что и в (41), т. е.

$$\vec{\Omega}_c = \sin \epsilon_p (\cos \varphi_- \vec{e}_1^{\text{ph}} + \sin \varphi_- \vec{e}_2^{\text{ph}}) + \cos \epsilon_p \vec{e}_3. \quad (58)$$

Впрочем согласно (24) в скобках в (58) стоит вектор \vec{e}_1^{p} , так что можно положить $\varphi_- = -\varphi$, как было бы в формулах, обратных по отношению к (40). Угол ϵ_p связан с θ_- формулами, подобными формулам аберрации (28):

$$\sin \epsilon_p = \frac{z_-}{z} \sin \theta_-, \quad \cos \epsilon_p = \frac{s_0 z_- \cos \theta_- - s \gamma_-}{2z\gamma}. \quad (59)$$

Как и для случая аннигиляции, введем базис, у которого орт ординат тот же, что и у (38), а два других орта повернуты относительно (38) на угол θ_c так, чтобы третий орт был направлен по импульсу \vec{x}^c :

$$\vec{e}_1^0 = \cos \theta_c \vec{e}_1^{\text{ph}} - \sin \theta_c \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2^0 = \vec{e}_2^{\text{ph}}, \quad \vec{e}_3^0 = \vec{\omega}_c = \sin \theta_c \vec{e}_1^{\text{ph}} + \cos \theta_c \vec{e}_3. \quad (60)$$

Зададим $\vec{\Omega}_c$ в этом базисе. Так как третий орт его совпадает с $\vec{\omega}_c$, то косинусом полярного угла будет η , так что

$$\vec{\Omega}_c = \sqrt{1 - \eta^2} (\cos \varphi_0 \vec{e}_1^0 + \sin \varphi_0 \vec{e}_2^0) + \eta \vec{e}_3^0. \quad (61)$$

Новые и старые углы в той же системе отсчета связаны формулами, следующими из (60):

$$\begin{aligned} \sin \epsilon_p \cos \varphi &= \eta \sin \theta_c + \sqrt{1 - \eta^2} \cos \theta_c \cos \varphi_0, \quad \sin \epsilon_p \sin \varphi = -\sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi_0, \\ \cos \epsilon_p &= \eta \cos \theta_c - \sqrt{1 - \eta^2} \sin \theta_c \cos \varphi_0. \end{aligned} \quad (62)$$

Приравняв проекции $\vec{\Omega}_c$ на орты базиса (38), получим связь углов двух сферических систем. Эти формулы являются комбинациями

(62) с (59) и выглядят аналогично (34). Обратные формулы получаются при замене $\theta_c \rightarrow -\theta_c$. Для косинуса η получается прежнее выражение (33). Скалярные произведения импульсов фотонов и частиц в этой системе снова даются формулами (35).

Заметим, что инвариантами преобразования Лоренца, как известно, являются элементы импульсных пространств частиц, деленные на энергии. В безразмерных обозначениях это дроби $d^3z_{\pm}/\gamma_{\pm} = z_{\pm}^2 dz_{\pm} d^2\Omega_{\pm}/\gamma_{\pm}$. Однако их части, т. е. множители, относящиеся к различным переменным, инвариантами не являются, в отличие от случая фотонов. Прямой выкладкой проверяется, что при выполнении законов сохранения инвариантом преобразования Лоренца является дробь $z_-^2 d^2\Omega_-/r$, которая при переходе в систему центра масс преобразуется в $(\beta/2)d\eta d\varphi_0 = -d\xi d\varphi_0/(2\gamma^2)$.

Из-за неоднозначности длин импульсов при фиксированном направлении рождающегося электрона вместо угла θ_- , как показано выше, целесообразно использовать z_- (или γ_-), а угол считать его функцией в соответствии с (55). Тогда $\sin \theta_- d\theta_- = \frac{(s_0 - q\gamma_-)dz_-}{sz_-^2\gamma_-}$

$\mp \frac{rdz_-}{sz_-^2\gamma_-}$, где знак берется в соответствии со знаком скобки (корень

r положителен). Поэтому вместо инвариантного элемента $\frac{z_-^2 d^2\Omega_-}{r}$ следует применять элемент $\frac{z_- dz_- d\varphi}{s\gamma_-} = \frac{r}{s} \frac{dz_- d\varphi}{d\gamma_-}$,

также инвариантный. В свою очередь при переходе в систему центра масс вместо z_- появится угол ϵ_p , связанный с γ_- согласно (25) формулой $\cos \epsilon_p = \gamma(2\gamma_- - s_0)/zs$. Отсюда следует, что $d\gamma_- = -sz \sin \epsilon_p d\epsilon_p/2\gamma = (s\beta/2) \sin \epsilon_p d\epsilon_p$ и инвариантный элемент с этим углом превратится в $(\beta/2) \sin \epsilon_p d\epsilon_p d\varphi$. Наконец, при переходе к переменным η и φ_0 наш элемент запишется в виде $(\beta/2)d\eta d\varphi_0$.

В следующем параграфе рассмотрим вероятностные характеристики процессов аннигиляции и рождения пар и найдем средние частоты и дисперсии частот аннигиляционных фотонов.

§ 2. Сечения процессов

1. *Дифференциальные сечения процессов.* Методами квантовой электродинамики показывается (см. [5]), что инвариантное дифференциальное сечение двухфотонной аннигиляции в произвольной

системе отсчета определяется формулой, которую можно записать в альтернативных видах:

$$\sigma_{\text{ann}} = \frac{r_e^2}{2} \frac{F}{4\gamma^3 z} = \frac{r_e^2}{2} \frac{(1-\beta^2)^2}{4\beta} F = \frac{r_e^2}{2} \frac{F}{q^{3/2} \sqrt{q-2}}. \quad (63)$$

Здесь r_e — классический радиус электрона, симметричная функция двух аргументов

$$F = F(\xi, \xi_1) = \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi} + 2 \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi_1} \right) - \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi_1} \right)^2, \quad (64)$$

а инвариантные величины ξ , ξ_1 , q , γ , z и β были определены выше. После подстановки в (64) выражений для ξ и ξ_1 из (35) получим выражение F через переменные β и η :

$$F = 2 \frac{1 - \beta^4 \eta^4 + 2(1 - \beta^2)(1 - \beta^2 \eta^2) - 2(1 - \beta^2)^2}{(1 - \beta^2 \eta^2)^2}. \quad (65)$$

Дифференциальное сечение рождения пар определяется так, что оно отличается от (63) на множитель β^2 [5]:

$$\sigma_{\text{bth}} = \frac{r_e^2}{8\gamma^4} s \beta z_- \int \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} \delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{s}) F \sin \theta_- d\theta_- = \frac{r_e^2}{2} \frac{\beta}{4\gamma^4} F = \beta^2 \sigma_{\text{ann}}. \quad (66)$$

2. *Полные сечения процессов.* Полное сечение аннигиляции электрон-позитронной пары определяется формулой

$$\sigma_{\text{ann}}^0 = \frac{r_e^2}{4} \frac{1}{v_r \underline{z}_- \underline{z}_+} \int \frac{d^3 x}{x} \frac{d^3 x_1}{x_1} \delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1) F(\xi, \xi_1). \quad (67)$$

Здесь безразмерная относительная скорость частиц согласно формуле (I.80) $v_r = \sqrt{1 - 1/(\underline{z}_- \underline{z}_+)^2}$, так что

$$v_r \underline{z}_- \underline{z}_+ = \sqrt{(\underline{z}_- \underline{z}_+)^2 - 1} = \sqrt{(q-1)^2 - 1} = \sqrt{q(q-2)} = 2z\gamma = 2\beta\gamma^2. \quad (68)$$

Этот множитель учитывает то обстоятельство, что сечение рассчитывается на поток частиц.

Покажем, как вычисляется это сечение. После взятия интеграла по \vec{x}_1 преобразование дельта-функции производится так:

$$\begin{aligned} \delta(s_0 - x - |\vec{s} - \vec{x}|) &= \delta \left(\frac{s_0^2 + x^2 - 2s_0 x - s^2 - x^2 + 2\vec{s}\vec{x}}{2x_1} \right) = \\ &= x_1 \delta(q - \underline{s}\underline{x}) = \frac{xx_1}{q} \delta \left(x - \frac{q}{s_0 - s \cos \theta} \right) = \frac{xx_1}{2\gamma^2} \delta \left(x - \frac{q}{s_0 - s \cos \theta} \right). \end{aligned} \quad (69)$$

Подставив (68) и (69) в (67), выразим полное сечение через дифференциальное (63):

$$\sigma_{\text{ann}}^0 = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{8\beta\gamma^4} \int x^2 d^2\omega F = \frac{1}{2} \int x^2 d^2\omega \sigma_{\text{ann}}. \quad (70)$$

Множитель $1/2$ введен для того, чтобы ввиду тождественности аннигиляционных фотонов не учитывать их дважды.

Для нахождения явного выражения для полного сечения аннигиляции (67) удобнее производить интегрирование не по направлениям импульса фотона $\vec{\omega}$, а в инвариантных переменных η и ψ , определенных выше. Для этого надо вместо $x^2 d^2\omega$ подставить $\gamma^2 d\eta d\psi$. Поскольку основной множитель сечения — функция F — от угла ψ не зависит, интеграл по этой переменной можно заменить на 2π .

Таким образом, вычисление полного сечения сводится к нахождению интеграла

$$F_0(\beta) = \int_0^1 F d\eta = 2[(3-\beta^4)a(\beta) - 2 + \beta^2], \quad a(\beta) = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}. \quad (71)$$

В результате получается выражение для полного сечения [5], которое мы представим в виде

$$\sigma_{\text{ann}}^0 = \pi r_e^2 s_{\text{ann}}(\beta), \quad s_{\text{ann}}(\beta) = \frac{1-\beta^2}{4\beta} F_0(\beta) = \frac{(3-\beta^4)a(\beta) - (2-\beta^2)}{2\beta\gamma^2}. \quad (72)$$

Полное сечение рождения пары определяется аналогично (67) с очевидными заменами характеристик частиц и фотонов:

$$\sigma_{\text{bth}}^0 = \frac{r_e^2}{2\underline{x}\underline{x}_1} \int \frac{d^3z_-}{\gamma_-} \frac{d^3z_+}{\gamma_+} \delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1) F = \frac{r_e^2}{2q} \int \frac{d^3z_-}{\gamma_- \gamma_+} \delta(\gamma_+ - s_0 + \gamma_-) F. \quad (73)$$

Множитель $\underline{x}\underline{x}_1 = q$ вводится для того, чтобы учесть, что сечение рассчитывается на поток фотонов. Дополнительная двойка в знаменателе не вводится, так как рождаются не тождественные частицы. При переходе к последнему выражению в (73) взят интеграл по \vec{z}_+ , так что вместо этого вектора надо подставить $\vec{z}_+ = \vec{s} - \vec{z}_- = \vec{x} + \vec{x}_1 - \vec{z}_-$. Стоящее под знаком интеграла в указанном выражении произведение преобразуем следующим образом. Сначала домножим аргумент δ -функции на $\gamma_+ + s_0 - \gamma_- = 2\gamma_+ = 2\sqrt{(\vec{s} - \vec{z}_-)^2 + 1}$, затем сделаем аргументом ее $\cos\theta_-$:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 z_-}{\gamma_- \gamma_+} \delta\left(\frac{1+s^2+z_-^2-2\bar{s}\bar{z}_--\gamma_-^2-s_0^2+2s_0\gamma_-}{2\gamma_+}\right) &= \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \delta(\underline{s}z_- - q) = \\ &= \sin\theta_- d\theta_- \delta\left(\cos\theta_- - \frac{s_0\gamma_- - q}{sz_-}\right) \frac{d\gamma_-}{s} d\varphi. \end{aligned} \quad (74)$$

Подставив результат в (73) и взяв интеграл по θ_- , получим

$$\sigma_{\text{bth}}^0 = \frac{r_e^2}{2qs} \int F d\gamma_- d\varphi. \quad (75)$$

Рассчитывать полное сечение рождения пар заново не надо, так как оно выражается через сечение аннигиляции. Действительно, принимая во внимание (66) и подставляя $d\gamma_- d\varphi = (s\beta/2)d\eta d\varphi_0$, получаем из (75) [5]

$$\sigma_{\text{bth}}^0 = \gamma^2 \int \sigma_{\text{bth}} d\eta d\varphi_0 = \frac{\pi r_e^2 \beta}{4 \gamma^2} \int_{-1}^1 F d\eta = 2\beta^2 \sigma_{\text{ann}}^0. \quad (76)$$

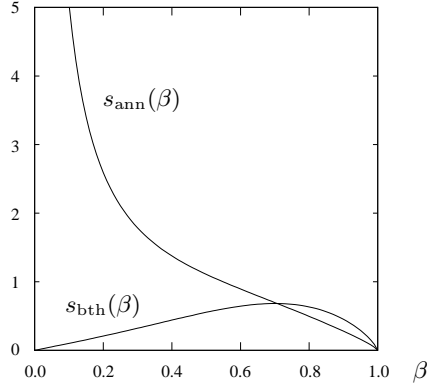


Рис. 2. Полные сечения аннигиляции и рождения пары.

На рис. 2 изображены графики полных сечений аннигиляции и рождения пар. Первое из них обращается в бесконечность при $\beta \rightarrow 0$ как $1/(2\beta)$, что отражает большую вероятность аннигиляции покоящихся друг относительно друга электрона и позитрона. Оба сечения имеют бесконечную производную при $\beta = 1$.

3. *Средние степени частоты фотонов.* Определим среднюю степень частоты излучаемого фотона при аннигиляции электрон-позитронной пары равенством

$$\overline{x^l s_{\text{ann}}}(\beta) = \frac{1}{16\pi\gamma^3 z} \int F x^{l+2} d^2\omega. \quad (77)$$

Вычисление проще всего произвести в системе центра масс по углам в системе аннигиляционного базиса, т. е. по η и ψ , заменив элемент площади поверхности безразмерной частоты по правилу $x^2 d^2\omega \rightarrow \gamma^2 d\eta d\psi$. При этом надо сделать замены углов, выразив их с помощью (34) и (32) через η и ψ . Через те же переменные выражаются и частоты фотонов согласно (29). Инвариантное сечение процесса (63) тоже является функцией η и не зависит от азимута ψ .

Теперь просто вычисляются интегралы в (77), так как они выражаются через моменты функции F по η . Рассмотрим значения $l = 0, 1, 2$. Наряду с (71) нам понадобится еще один интеграл

$$F_2(\beta) = \int_0^1 F \eta^2 d\eta = \frac{2}{\beta^2} \left[(5 - 4\beta^2 + \beta^4) a(\beta) - 5 + \frac{8}{3}\beta^2 \right]. \quad (78)$$

При $l = 0$ находим уже известную формулу $s_{\text{ann}}(\beta) = \frac{F_0(\beta)}{4\beta\gamma^2}$. Величина средней частоты оказывается тривиальной: $\overline{x} s_{\text{ann}}(\beta) =$

$$= \frac{1}{32\pi\gamma z} \int_{-1}^1 F d\eta \int_0^{2\pi} [s_0 + s(\cos \epsilon_p \eta + \sin \epsilon_p \sqrt{1-\eta^2} \cos \psi)] d\psi = \frac{s_0}{2} s_{\text{ann}}(\beta), \quad (79)$$

т. е. $\overline{x} = \overline{x_1} = s_0/2$, так как аннигиляционные фотоны равноправны.

Средний квадрат частоты $\overline{x^2} s_{\text{ann}}(\beta) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{16\pi\gamma z} \int_{-1}^1 F d\eta \int_0^{2\pi} d\psi \frac{1}{4} [s_0^2 + s^2(\cos^2 \epsilon_p \eta^2 + \sin^2 \epsilon_p (1-\eta^2) \cos^2 \psi + \\ &+ 2\cos \epsilon_p \sin \epsilon_p \eta \sqrt{1-\eta^2} \cos \psi) + 2s_0 s(\cos \epsilon_p \eta + \sin \epsilon_p \sqrt{1-\eta^2} \cos \psi)] = \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(s_0^2 + \frac{s^2}{2} \sin^2 \epsilon_p \right) s_{\text{ann}}(\beta) + \frac{s^2}{4\gamma z} \left(\cos^2 \epsilon_p - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon_p \right) F_2(\beta) \right]. \quad (80) \end{aligned}$$

Две последние формулы дают возможность найти дисперсию частот аннигиляционных фотонов

$$Dx = Dx_1 = \frac{s^2}{8} \left[\sin^2 \epsilon_p + (2 - 3 \sin^2 \epsilon_p) \frac{F_2(\beta)}{F_0(\beta)} \right]. \quad (81)$$

Дисперсия пропорциональна квадрату длины суммы импульсов аннигилирующих частиц. При аннигиляции неподвижных частиц она равна нулю, так как частоты фотонов в этом случае точно равны энергии покоя электрона.

§ 3. Кинетическое уравнение для фотонов при процессах с парами

1. *Функции распределения.* В этой главе будем использовать, в общем, те же функции распределения по импульсам частиц и фотонов, что и в предыдущей. Однако, здесь допустим, что электрон-позитронный газ может быть вырожденным. Тогда распределения частиц удобнее характеризовать, как и фотоны, средними числами заполнения их состояний. Для средних чисел заполнения выполняются обычные условия нормировки, которые в безразмерных обозначениях и в сопутствующих системах отсчета каждого из газов, где средний импульс частиц этих газов равен нулю, записываются в виде

$$\frac{2}{\lambda_C^3} \int n_{\mp}(\vec{z}) d^3 z = n_{\mp}^0, \quad \frac{2}{\lambda_C^3} \int n(\vec{x}) d^3 x = n^0. \quad (82)$$

Здесь $\lambda_C = h/mc$ — комптоновская длина волны. Через n_{\mp}^0 и n^0 обозначены концентрации частиц и фотонов в сопутствующих системах. Эти скалярные величины могут быть заданы или определяться из каких-либо условий в зависимости от задачи. Если принять релятивистскую квантовую систему единиц (РКСЕ), в которой $m = c = \hbar = 1$, то следует положить $\lambda_C = 2\pi$.

2. *Формулировка кинетического уравнения.* Явно релятивистски ковариантное кинетическое уравнение для фотонов, в котором учитываются только двухфотонные аннигиляции и рождения электрон-позитронных пар, в размерных обозначениях записывается в виде

$$\underline{k} \nabla n(\vec{k}) = \frac{r_e^2}{2} \frac{2m^2 c^2}{h^3} \int \frac{d^3 k_1}{k_1} \frac{d^3 p_-}{p_{0-}} \frac{d^3 p_+}{p_{0+}} \delta(\underline{p}_- + \underline{p}_+ - \underline{k} - \underline{k}_1) F(\xi, \xi_1) \times (83)$$

$$\{n_-(\vec{p}_-)n_+(\vec{p}_+)[1+n(\vec{k})][1+n(\vec{k}_1)]-n(\vec{k})n(\vec{k}_1)[1-n_-(\vec{p}_-)][1-n_+(\vec{p}_+)]\}.$$

Наличие δ -функции отражает законы сохранения. Величина F определяется формулой (64).

В (83) принято во внимание, что средние числа заполнения фотонных состояний могут быть не малы, т. е. фотонный газ может быть вырожден. Допускается вырождение и газов частиц. Поэтому в кинетическое уравнение введены множители, учитывающие принцип Паули для частиц-фермионов и принцип вынужденных переходов для фотонов, как бозонов. Как всегда в подобных случаях, произведения четырех функций в фигурных скобках в (83) взаимно уничтожаются.

Впредь используем только безразмерные обозначения величин. Кинетическое уравнение в безразмерном виде в РКСЕ имеет вид

$$\begin{aligned} \underline{x} \nabla n(\vec{x}) = D_e \int \frac{d^3 x_1}{x_1} \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} \delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1) F(\xi, \xi_1) \times \\ \times \{n_-(\vec{z}_-)n_+(\vec{z}_+)[1+n(\vec{x})][1+n(\vec{x}_1)] - n(\vec{x})n(\vec{x}_1)[1-n_-(\vec{z}_-)][1-n_+(\vec{z}_+)]\}. \end{aligned} \quad (84)$$

Здесь $D_e = r_e^2/\lambda_C^3$.

Из кинетического уравнения вытекают равновесные распределения частиц и фотонов при условии равновесия процессов аннигиляции и рождения пар. При этом условии выражение, стоящее в фигурных скобках в (84), равно нулю. Это равенство должно быть следствием законов сохранения. При этом в равновесные распределения должны входить единая температура T , единая скорость относительно общей сопутствующей системы отсчета \vec{v} и соблюдаться баланс числа частиц (сохранение заряда и “двухфотонность” процессов). Следовательно, в равновесии выполняются распределения Ферми—Дирака для частиц и распределение Бозе—Эйнштейна для фотонов. В сопутствующей системе

$$n_{\pm}(\vec{z}_{\pm}) = \frac{1}{e^{y(\gamma_{\pm} + \mu_{\pm})} + 1}, \quad n(\vec{x}) = \frac{1}{e^{y(x + \mu_{\gamma})} - 1}, \quad (85)$$

где по-прежнему $y = mc^2/k_B T$, а $-\mu_{\pm}$ и $-\mu_{\gamma}$ — безразмерные (в единицах mc^2) химические потенциалы частиц и фотонов. При этом между химическими потенциалами должно выполняться соотношение $\mu_- + \mu_+ = 2\mu_{\gamma}$.

Если газы не вырождены, то распределения частиц в сопутствующих системах отсчета переходят в релятивистские максвел-

ловские, а химические потенциалы прямо выражаются через концентрации, так что в сопутствующих системах

$$n_{\pm}(\vec{z}) = C_{\pm} e^{-y\gamma}, \quad C_{\pm} = e^{-y\mu_{\pm}} = n_{\pm}^0 \frac{\lambda_C^3 y}{8\pi K_2(y)} \quad (86)$$

где $K_2(y)$ — функция Макдональда. В случае фотонов надо перейти к пределу нулевой массы покоя, тогда γ заменится на x , а $K_2(y)$ на $2/y^2$ и формула (86) перейдет в формулу $n(x) = e^{-y(x+\mu\gamma)}$, похожую на формулу Вина, но с возможным дополнительным множителем, содержащим химический потенциал. Если при этом химический потенциал фотонов равен нулю, то осуществляется точное распределение Вина, а произведение $C_- C_+ = 1$.

3. *Кинетическое уравнение в форме уравнения переноса излучения.* Поделив РКУ (84) на частоту фотона и сократив произведения четырех функций распределения, представим его в виде, обычном для уравнения переноса излучения. Запишем и его в безразмерных обозначениях:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) n(\vec{x}) = -n(\vec{x})(\alpha_{\gamma} - \alpha_- - \alpha_+) + \varepsilon[1 + n(\vec{x})] + \varepsilon_*. \quad (87)$$

Здесь введены обозначения для интегралов, входящих в РКУ:

$$\alpha_{\gamma}(\vec{x}) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} \delta_* F(\xi, \xi_1), \quad (88)$$

$$\alpha_{\mp}(\vec{x}) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} \delta_* F(\xi, \xi_1) n_{\mp}(\vec{z}_{\mp}), \quad (89)$$

$$\varepsilon(\vec{x}) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} \delta_* F(\xi, \xi_1) n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+), \quad (90)$$

$$\varepsilon_*(\vec{x}) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} \delta_* F(\xi, \xi_1) n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+). \quad (91)$$

Здесь для краткости дельта-функция, отражающая законы сохранения, обозначена сокращенно $\delta_* = \delta(\underline{z}_- + \underline{z}_+ - \underline{x} - \underline{x}_1)$. Все введенные интегралы имеют размерность обратной длины. Интегралы (88)–(89) определяют поглощение фотонов, два последних — излучение.

Если умножить уравнение (87) на $d^3 x$ и проинтегрировать по импульсам фотонов, то получится соотношение, представляющее первый момент уравнения: $\underline{\nabla} \int \underline{x} n(\vec{x}) \frac{d^3 x}{x} =$

$$= -\int d^3x n(\vec{x})[\alpha_\gamma(\vec{x}) - \alpha_-(\vec{x}) - \alpha_+(\vec{x})] + \int d^3x \{\varepsilon(\vec{x})[1+n(\vec{x})] + \varepsilon_*(\vec{x})\}. \quad (92)$$

Рассмотрим по очереди части уравнения (87).

4. *Поглощение.* Установим связь введенных коэффициентов с сечениями рассматриваемых процессов. Начнем с трех коэффициентов, связанных с рождением пар. Перепишем определение коэффициента спонтанного поглощения через полное сечение рождения пар (76):

$$\alpha_\gamma = \frac{2}{\lambda_C^3 x} \int \frac{d^3x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) q \sigma_{\text{bth}}^0(\beta). \quad (93)$$

Множитель $q = \frac{x}{x_1} = x x_1 (1 - \mu)$ вводится для того, чтобы учесть, что сечение рассчитывается на поток фотонов, при этом в (93) сокращаются энергии фотонов, т.е. x и x_1 . Величина $q = 2\gamma^2$, где γ — общее значение энергий частиц и фотонов в системе центра масс частиц, в которой электрон и позитрон, как и фотоны, движутся в противоположные стороны. Величина β , являющаяся формальным аргументом сечения, — соответствующая скорость $\beta = z/\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}/\gamma$.

Два других коэффициента α_\mp , стоящих в слагаемом поглощения, но со знаком минус, выразим через дифференциальное сечение рождения пары:

$$\begin{aligned} \alpha_\mp &= \frac{1}{x} \frac{2}{\lambda_C^3} \int \frac{d^3x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \frac{d\varphi d\gamma_-}{s} \frac{4\gamma^5}{z} \sigma_{\text{bth}} n_\mp(\vec{z}_\mp) = \\ &= \frac{1}{x} \frac{4}{\lambda_C^3} \int \frac{d^3x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \gamma^4 d\eta d\varphi_0 \sigma_{\text{bth}} n_\mp(\vec{z}_\mp). \end{aligned} \quad (94)$$

Здесь σ_{bth} , зависящее от β и η , подставлено в согласии с выражением для этого сечения (66). Через инвариантные переменные η , φ_0 , а также через характеристики фотонов энергии электрона и позитрона выражаются посредством формул, следующих из среднего равенства в (6) и первого в (59):

$$\gamma_\mp = (s_0 \pm s\beta \cos \epsilon_p)/2, \quad (95)$$

где $\cos \epsilon_p$ дается формулой (62), в которой μ — косинус угла между направлениями импульсов фотонов, а угол θ_c определяется через свои функции формулами (57). Направления импульсов частиц можно найти по формулам

$$z_{\mp} \vec{\Omega}_{\mp} = \vec{e}_3 \frac{s \pm s_0 \beta \cos \epsilon_p}{2} \pm z [(\eta \sin \theta_c + \sqrt{1 - \eta^2} \cos \theta_c \cos \varphi_0) \vec{e}_1^{\text{ph}} + \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi_0 \vec{e}_2^{\text{ph}}], \quad (96)$$

где $z_{\mp} = \sqrt{\gamma_{\mp}^2 - 1}$, а орты базиса выражаются через импульсы фотонов прежними формулами (38).

5. *Излучение.* Начнем с интеграла от коэффициента излучения по импульсам излучаемых фотонов. Этот интеграл входит в соотношение (92). Исходя из (90) и выражения для полного сечения аннигиляции (72), находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \int \varepsilon(\vec{x}) d^3x = \frac{r_e^2}{2} \frac{2}{\lambda_C^3} \int \frac{d^3x}{x} \frac{d^3x_1}{x_1} \frac{d^3z_-}{\gamma_-} \frac{d^3z_+}{\gamma_+} \delta_* F n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+) = \\ &= \frac{4}{\lambda_C^3} \int \frac{d^3z_-}{\gamma_-} \frac{d^3z_+}{\gamma_+} n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+) v_{\Gamma \underline{z}_- \underline{z}_+} \sigma_{\text{ann}}^0(\beta). \end{aligned} \quad (97)$$

Здесь использовано то же обозначение δ_* , что и в формулах (88)–(91), v_{Γ} — безразмерная и инвариантная относительная скорость частиц, так что справедлива формула (68). При этом надо считать, что $q = 1 + \underline{z}_- \underline{z}_+$. Множитель (68), как и $\underline{x} \underline{x}_1$ в случае рождения пар, учитывает то обстоятельство, что сечение рассчитывается на поток частиц.

Сам коэффициент излучения (90) не выражается прямо через полное сечение аннигиляции, так как не содержит интеграла по x . Однако наличие δ -функции позволяет взять интегралы по четырем переменным. При этом, хотя излучение происходит при аннигиляции, закрепленным является импульс излучаемого фотона. Поэтому удобнее произвести интегрирование по импульсам частиц, а импульсы фотонов считать заданными. Интегралы получаются такие же, какие возникали при рассмотрении процесса рождения пар, и дельта-функция преобразуется так же, как в (69). В результате получится

$$\varepsilon(\vec{x}) = \frac{4}{x \lambda_C^3} \int \frac{d^3x_1}{x_1} \gamma^4 d\eta d\varphi_0 \sigma_{\text{bth}} n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+). \quad (98)$$

Выражения для импульсов частиц остаются прежними, они приведены в (95) и (96).

Конечно, в (98) можно заменить сечение рождения на сечение аннигиляции с соответствующим множителем. Однако, лучше оставить сечение рождения, так как закрепленными являются импульсы фотонов. Заметим, что величина ε_* не требует специального рассмотрения, так как отличается от (98) только наличием под интегралом дополнительного множителя $n(\vec{x}_1)$.

§ 4. Усреднение коэффициентов

1. *Усреднение коэффициента спонтанного поглощения.* В этом и нескольких последующих пунктах предположим, что распределения частиц и фотонов по импульсам в сопутствующей системе отсчета изотропны, т. е. зависят только от величин импульсов, но не от их направлений.

При таком предположении нет необходимости знать и зависимости от направлений входящих в выражения для коэффициентов поглощения и излучения интегралов. Поэтому мы проинтегрируем по направлениям в этих интегралах. Зависимости распределений от времени и координат по-прежнему не указываем.

Начнем с того коэффициента поглощения, который определяется спонтанным процессом рождения частиц. Исходим из приведенной выше формулы (88). Вычислим сначала интеграл при $n(\vec{x}) = n(x)$. Отделим интеграл по частоте от интегралов по углам и выберем в качестве полярного угла угол между направлениями фотонов, косинус которого μ . При этом от азимута ничего не зависит и интеграл по нему заменяется на 2π . При рождении пары должно выполняться условие $q = \underline{x} \underline{x}_1 = xx_1(1 - \mu) \geq 2$, которое определяет пределы интегрирования по x_1 и μ :

$$\alpha_\gamma(x) = \frac{D_e}{x} 4\pi^2 \int_{1/x}^{\infty} x_1 dx_1 n(x_1) \int_{-1}^{1-2/(xx_1)} d\mu q 2\beta^2 s_{\text{ann}}(\beta). \quad (99)$$

Вместо μ будем интегрировать по β , сделав замену переменной интегрирования: $\beta = \sqrt{1 - 2/[xx_1(1 - \mu)]}$, $d\mu = -4\beta\gamma^4 d\beta/(xx_1)$. Тогда формулу (99) можно переписать так: $\alpha_\gamma(x) =$

$$= \frac{32\pi^2 D_e}{x^2} \int_{1/x}^{\infty} dx_1 n(x_1) g_p \left(\sqrt{1 - \frac{1}{xx_1}} \right) = \frac{32\pi^2 D_e}{x^3} \int_0^{\infty} n \left(\frac{1+v}{x} \right) g_p \left(\sqrt{\frac{v}{1+v}} \right) dv. \quad (100)$$

Здесь функция от одного аргумента u , определенная на промежутке $[0, 1]$:

$$g_p(u) = 2 \int_0^u \beta^3 \gamma^6 d\beta s_{\text{ann}}(\beta) = \int_0^u \beta^2 \gamma^4 [(3 - \beta^4)a(\beta) - 2 + \beta^2] d\beta. \quad (101)$$

Интеграл $g_p(u)$ выражается через элементарные функции и функцию g_C , которая появлялась в § 3 Главы V при нахождении средних характеристик комптоновского рассеяния (формулы (V.86)–(V.88)):

$$g_p(u) = u \left[\frac{1}{1-u^2} - \frac{1}{2} \ln(1-u^2) - \frac{1+u^2}{2} \right] a(u) - \frac{u}{2} \frac{1+u^2}{1-u^2} + \frac{1}{2} \ln(1-u) \ln \frac{1+u}{4} + g_C \left(-\frac{1}{2} \right) - g_C \left(-\frac{1-u}{2} \right). \quad (102)$$

При u , достаточно удаленных от 1, $g_p(u)$ можно вычислять с помощью ряда

$$g_p(u) = u^3 \left[\frac{1}{3} + \frac{4}{5} u^2 + u^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{2n}}{2n+7} \left(\sum_{m=1}^n \frac{2n+9}{2m+1} + \frac{6}{2n+3} + \frac{3}{2n+5} + 4 \right) \right]. \quad (103)$$

При $u < 1$, близких к 1, слагаемые, не выражающиеся через элементарные функции, раскладываются в ряды:

$$g_C \left(-\frac{1}{2} \right) - g_C \left(-\frac{1-u}{2} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-u)^n - 1}{n^2 2^n}. \quad (104)$$

В случаях, когда распределение $n(x_1)$ планковское, виновское или более общее распределение Бозе–Эйнштейна с параметром $y = mc^2/(k_B T)$, функция $\alpha_\gamma(x, y)$ фактически зависит от частоты через отношение y/x . Представим эту зависимость в виде

$$\alpha_\gamma(x, y) = 32\pi^2 D_e \frac{e^{-y\mu_\gamma}}{y^3} \alpha_{\text{ВЕ}} \left(\frac{y}{x}, y\mu_\gamma \right), \quad (105)$$

где

$$\alpha_{\text{ВЕ}}(z, \tau) = z^3 \int_0^{\infty} \frac{dv}{e^{z(1+v)} - e^{-\tau}} g_p \left(\sqrt{\frac{v}{1+v}} \right). \quad (106)$$

Для так определенной функции значение $\mu_\gamma = 0$ формально отвечает распределению Планка, а $\mu_\gamma = \infty$ — Вина, соответствующие функции обозначим $\alpha_P(z) = \alpha_{BE}(y/x, 0)$ и $\alpha_W(z) = \alpha_{BE}(y/x, \infty)$.

На рис. 3 представлены графики этих функций. Как и следовало ожидать, планковская функция больше виновской, $\alpha_P(z) > \alpha_W(z)$, но существенное отличие обнаруживается при значениях аргумента порядка единицы. Кривые при конечных ненулевых значениях τ располагаются между крайними. В нуле у всех этих функций бесконечная (логарифмическая) производная, например, $\alpha_W(z) \sim (z/2) \ln(1/z)$ при $z \rightarrow 0$. При больших z все они имеют общую асимптотику:

$$\alpha_{BE}(z, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-(m-1)\tau}}{m^3} \alpha_W(mz) \sim \alpha_W(z) \sim \frac{\sqrt{\pi z}}{4} e^{-z}. \quad (107)$$

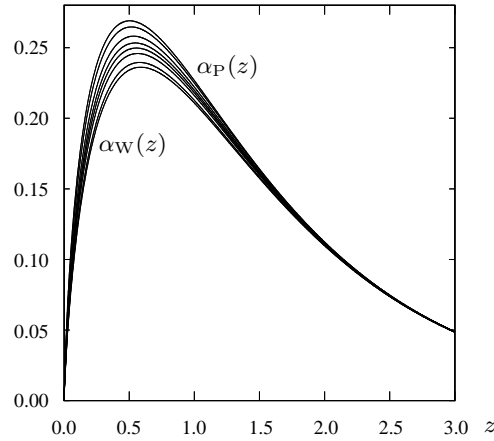


Рис. 3. Функции $\alpha_{BE}(z, \tau)$ при (сверху вниз) $\tau = 0$ ($\alpha_P(z)$), 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0, 2.0, ∞ ($\alpha_W(z)$).

Рис. 4 дает представление о коэффициенте поглощения при рождении пар в результате взаимодействия с виновским излучением. Изображены графики функции

$$\alpha_\gamma(x, y) = 32\pi^2 D_e \frac{1}{y^3} \alpha_W(y/x) = \frac{4}{\pi} \alpha_{fs}^2 \frac{1}{y^3} \alpha_W(y/x). \quad (108)$$

в зависимости от частоты при различных температурах $T = \frac{mc^2}{k_B y}$.

Поведение этой функции при малых и больших частотах отражается ее асимптотиками: $\alpha_\gamma(x, y) \sim \alpha_{\text{fs}}^2 \frac{1}{\sqrt{\pi xy^5}} e^{-y/x}$ при $x \ll y$ и $\alpha_\gamma(x, y) \sim \frac{2}{\pi} \alpha_{\text{fs}}^2 \frac{1}{xy^2} \ln \frac{y}{x}$ при $x \gg y$. Для перевода коэффициента к размерному выражению функцию (108) надо разделить на $\lambda_C = 3.861411 \cdot 10^{-11}$ см, а графики поднять на 10.41. Поглощение становится очень сильным при малых y , т. е. высоких температурах излучения. Максимумы кривых находятся на прямой $x = 1.7y$, т. е. при высоких температурах легче поглощаются более мягкие фотоны.

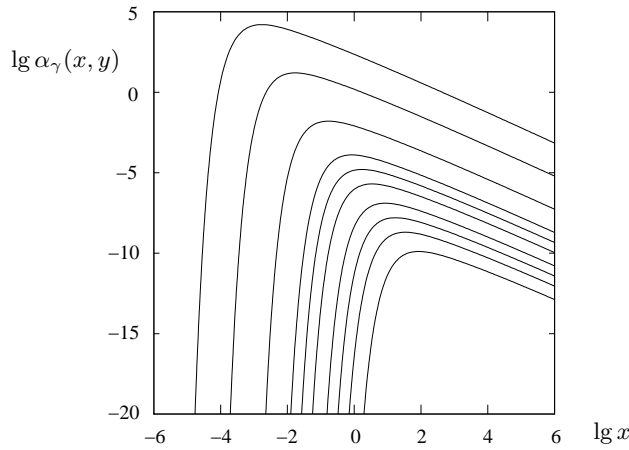


Рис. 4. Функция $\alpha_\gamma(x, y)$ при (сверху вниз) $y = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 20.0, 50.0$.

Выражение (100) для функции α_γ получено в [88] и в несколько другом виде в [68]. При виновском распределении фотонов в [89] для нее найдено эмпирическое представление.

2. Усреднение вынужденного поглощения. Два коэффициента α_\mp содержат как фотонное распределение по импульсам, так и распределения частиц. Сначала будем считать, что изотропны распределения частиц, т. е. $n_\mp(\vec{z}_\mp) = n_\mp(\gamma_\mp)$.

После взятия интеграла по импульсам частиц, распределение которых не входит в интеграл, т. е. по \vec{z}_\pm соответственно, получим выражения

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mp} &= \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) \frac{z_{\mp}^2 d^3 z_{\mp}}{\gamma_- \gamma_+} n_{\mp}(\gamma_{\mp}) \delta(\gamma_+ + \gamma_- - x - x_1) F(\xi, \xi_1) = \\
&= \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) n_{\mp}(\gamma_{\mp}) \frac{z_{\mp}^2 dz_{\mp}}{\gamma_{\mp}} d^2 \Omega_{\mp} \delta(\xi + \xi_1 - q) F(\xi, \xi_1) = \\
&= \frac{D_e}{x} 2\pi \int \frac{d^3 x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) n_{\mp}(\gamma) \frac{z dz}{\gamma} \overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma). \quad (109)
\end{aligned}$$

Здесь было использовано тождество для дельта-функции, о котором говорилось в предыдущем пункте. Отметим при этом, что γ и z этого пункта не следует путать с величинами с теми же обозначениями из предшествующих: здесь просто опущены знаки \pm . Кроме того, введено обозначение для интеграла по направлениям электрона или позитрона:

$$\overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{z}{2\pi} \int d^2 \Omega \delta(\xi + \xi_1 - q) F(\xi, \xi_1), \quad (110)$$

где $\xi = \underline{x} z = x(\gamma - z \vec{\omega} \vec{\Omega})$, $\xi_1 = \underline{x}_1 z = x_1(\gamma - z \vec{\omega}_1 \vec{\Omega})$.

Интеграл (110) симметричен по частотам фотонов и одинаков для электронов и позитронов. Преобразование этого интеграла очень близко по схеме к выводу формулы для функции перераспределения по частотам при комптоновском рассеянии в предыдущей главе, так как похожи выражения для F . Здесь для ряда величин, аналогичных возникавшим при описании рассеяния, используются те же обозначения. Однако эти величины не совпадают. Различие заключается в знаках частот фотонов и, как следствие, в знаках некоторых неравенств.

Как и для рассеяния, выберем полярную систему с осью вдоль вектора $\vec{\omega}$. Косинус зенитного угла будет $\mu = \vec{\omega} \vec{\omega}_1$, а косинус между $\vec{\omega}$ и $\vec{\Omega}$ обозначим $\eta = \vec{\Omega} \vec{\omega}$. Тогда произведение $\vec{\Omega} \vec{\omega}_1 = \eta \mu + \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi$, где φ — азимут, т. е. двугранный угол между плоскостями $\vec{\Omega}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\omega}_1$ (косинус η и азимут φ также не совпадают с использовавшимися ранее величинами с теми же обозначениями). В этих переменных выражение для F записывается в виде

$$F = \frac{q^2 + 2q - 2}{q} \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{q - \xi} \right) - \frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{(q - \xi)^2} - 2 \quad (111)$$

и не содержит зависимости от азимута, так как частоты фотонов и угол между их направлениями, а следовательно величина q являются заданными, а $\xi = x(\gamma - z\eta)$. Поэтому первым следует вычислить интеграл по азимуту от дельта-функции. При его вычислении примем сначала, что произведение $zx_1\sqrt{1-\mu^2} \neq 0$. Тогда можно написать

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi \delta \left(x(\gamma - z\eta) - q + x_1\gamma - x_1z\eta\mu - zx_1\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\eta^2} \cos \varphi \right) = \\ & = \frac{2}{zs} \frac{1}{\sqrt{(\eta_+ - \eta)(\eta - \eta_-)}}, \quad \eta_{\pm} = \frac{P(x_1\mu + x) \pm x_1\sqrt{1-\mu^2}\Delta}{zs^2}, \end{aligned} \quad (112)$$

где

$$\Delta = \sqrt{z^2s^2 - P^2}, \quad P = \gamma s_0 - q, \quad (113)$$

а остальные обозначения прежние. η_{\pm} являются границами промежутка изменения косинуса η . Только при η из этого промежутка имеются значения $\cos \varphi$, при котором аргумент дельта-функции в (112) обращается в нуль. Появление множителя 2 объясняется тем, что на промежутке $[0, 2\pi]$ косинус все свои значения принимает дважды. Прямая проверка показывает, что $-1 \leq \eta_- \leq \eta_+ \leq 1$.

Подставим в (110) интеграл (112) и сделаем подстановку

$$\eta = \frac{\eta_+ + \eta_-}{2} + \frac{\eta_+ - \eta_-}{2} \cos \psi = \frac{1}{zs^2} [(x_1\mu + x)P + x_1\sqrt{1-\mu^2}\Delta \cos \psi]. \quad (114)$$

Тогда (110) примет вид

$$\bar{F}(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{1}{\pi s} \int_0^{\pi} F(\xi, \xi_1) d\psi. \quad (115)$$

Окончательное выражение для интеграла (110) получается следующим:

$$\begin{aligned} \bar{F}(x, x_1, \mu, \gamma) &= \frac{q^2 + 2q - 2}{q^2} \left(\frac{1}{a(\gamma, \mu, -x)} + \frac{1}{a(\gamma, \mu, -x_1)} \right) - \\ &- \frac{1}{q^2} \left[\frac{A(\gamma, \mu, x, x_1)}{a^3(\gamma, \mu, -x)} + \frac{A(\gamma, \mu, x_1, x)}{a^3(\gamma, \mu, -x_1)} \right] - \frac{2}{s}, \end{aligned} \quad (116)$$

где функции a и r_μ те же, что и в предшествующей главе (определяются в (V.134)), а

$$A(\gamma, \mu, x, x_1) = \frac{s^2 - a^2(\gamma, \mu, -x) + a^2(\gamma, \mu, -x_1)}{2}. \quad (117)$$

Полученная величина обладает следующими свойствами симметрии:

$$\overline{F}(x, x_1, \mu, \gamma) = \overline{F}(x_1, x, \mu, \gamma) = \overline{F}(x, x_1, \mu, x + x_1 - \gamma). \quad (118)$$

3. *Ограничения на переменные.* Теперь найдем условия, которые надо наложить на переменные вследствие требования, чтобы подкоренное выражение у Δ было неотрицательно:

$$z^2 s^2 - P^2 = -2q\gamma^2 + 2q\gamma s_0 - q^2 - s^2 \geq 0. \quad (119)$$

Это требование ограничивает те или иные величины в зависимости от того, которые из них закреплены.

Если заданы импульсы фотонов, т. е. их частоты и косинус μ , то значения энергии частицы должны быть заключены между

$$\gamma^\pm(x, x_1, \mu) = \frac{s_0}{2} \pm \frac{s}{2} \sqrt{1 - \frac{2}{q}} \geq 1. \quad (120)$$

Здесь верхние знаки \pm соответствуют знакам перед корнем.

При фиксированной энергии частицы накладываются ограничения на значения частот. Если задана частота x_1 и косинус μ , то частота x должна удовлетворять тому же неравенству (119), которое можно записать подробнее в виде

$$x^2[1 - 2\gamma x_1(1 - \mu) + x_1^2(1 - \mu)^2] + 2xx_1[\mu + \gamma(\gamma - x_1)(1 - \mu)] + x_1^2 \leq 0. \quad (121)$$

Частота x должна располагаться определенным образом по отношению к корням квадратичной относительно x функции, стоящей слева в (121):

$$\frac{x_\pm}{x_1} = -\frac{\gamma(\gamma - x_1)(1 - \mu) + \mu \pm z(1 - \mu)a_1}{1 - 2\gamma x_1(1 - \mu) + x_1^2(1 - \mu)^2}. \quad (122)$$

В случае рассеяния выражение, стоявшее множителем перед квадратом x в аналоге (121) и в знаменателе выражения вида (122),

было строго положительно. В рассматриваемом случае оно раскладывается на множители

$$1 - 2\gamma x_1(1 - \mu) + x_1^2(1 - \mu)^2 = [x_1(1 - \mu) - \gamma - z][x_1(1 - \mu) - \gamma + z] \quad (123)$$

и может быть как положительно, так и отрицательно. При $x_1(1 - \mu) < \gamma - z$ и при $x_1(1 - \mu) > \gamma + z$ оно положительно, частота должна быть между границами. Однако, в первом случае обе границы (122) отрицательны и частот x , удовлетворяющих неравенству, не существует. Во втором случае обе границы положительны и ограничивают частоту. Наконец, в промежуточной области $\gamma - z < x_1(1 - \mu) < \gamma + z$ множитель при x^2 отрицателен, большая граница x_- положительна, а меньшая x_+ отрицательна, так что частота x должна быть больше большей границы. Итак,

$$\begin{aligned} x \text{ не существует} & \quad \text{при} \quad 0 < x_1 < (\gamma - z)/(1 - \mu), \\ x_- < x < \infty & \quad \text{при} \quad (\gamma - z)/(1 - \mu) < x_1 < (\gamma + z)/(1 - \mu), \\ x_- < x < x_+ & \quad \text{при} \quad (\gamma + z)/(1 - \mu) < x_1 < \infty. \end{aligned} \quad (124)$$

Как неравенство (121), так и область допустимых частот, конечно, симметричны относительно x и x_1 .

Рассмотрим еще исключительные случаи, когда не выполняется условие, наложенное в предыдущем пункте при вычислении интеграла (112), т. е. когда произведение $zx_1\sqrt{1 - \mu^2} = 0$. Допустим обращение множителей в нуль в порядке следования их в этом произведении. При $z = 0$, $\gamma = 1$ оказывается $\overline{F}(x, x_1, \mu, 1) = 0$. Случаи $x_1 = 0$ и $\mu = 1$ невозможны. Случай $\mu = -1$ не является исключительным, все соответствующие формулы получаются при подстановке значения $\mu = -1$ в окончательную формулу.

4. *Усреднение по направлениям импульсов фотонов.* Теперь предположим, что распределение фотонов по импульсам изотропно и усредним величину (116) по углам. Для такого усреднения надо поменять местами интегрирование по энергиям частиц и по направлениям фотонов.

Изучим зависимости границ $\gamma^\pm(x, x_1, \mu)$ изменения энергий частиц γ от μ . Границы совпадают, когда обращается в нуль второе слагаемое в формуле (120). Это может быть при $q = 2$ или при $s = 0$. В первом случае

$$\mu = \mu_*, \quad -1 \leq \mu_* = 1 - 2/xx_1 < 1, \quad \gamma^\pm(x, x_1, \mu_*) = (x + x_1)/2. \quad (125)$$

При значениях $\mu > \mu_*$ процесс рождения пары невозможен. Величина $s = 0$ либо при $x = x_1 = 0$, если $\mu \neq -1$, что невозможно, либо при $\mu = -1$, $x = x_1$, что, как отмечалось выше, не является исключительным случаем.

Далее, нижняя граница имеет минимум, а верхняя максимум в одной и той же точке

$$\mu_{\text{ext}} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x_1}, \quad \gamma_{\text{m}}^+ = x + x_1 - 1, \quad \gamma_{\text{m}}^- = 1. \quad (126)$$

Точка экстремумов может выходить из промежутка $[-1, 1]$, т. е. может быть $\mu_{\text{ext}} < -1$. Это осуществляется при $x + x_1 > 2xx_1$. Соответствующие точки x, x_1 на плоскости с этими координатами лежат между двумя гиперболами $xx_1 = 1$ и $(x - 1/2)(x_1 - 1/2) = 1/4$. Первая из них располагается ниже второй везде кроме точки их касания при $x = x_1 = 1$. Для частот, для которых $x + x_1 < 2xx_1$, т. е. находящихся выше верхней гиперболы, экстремальная точка всегда попадает в основной промежуток изменения косинуса угла между фотонами: $-1 < \mu_{\text{ext}} < 1$. Итак, границы изменения энергии частиц можно определить следующим образом:

$$\gamma^\pm(x, x_1) = \begin{cases} \gamma^\pm(x, x_1, -1) & \text{при } x + x_1 \geq 2xx_1, \\ \gamma_{\text{m}}^\pm & \text{при } x + x_1 \leq 2xx_1. \end{cases} \quad (127)$$

Здесь

$$\gamma^\pm(x, x_1, -1) = \frac{x + x_1}{2} \pm \frac{|x - x_1|}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{xx_1}}. \quad (128)$$

Последние величины, как очевидно, совпадают при $x = x_1$ и $xx_1 = 1$.

Обратные функции к зависимостям $\gamma = \gamma^\pm(x, x_1, \mu)$, где правые части равенства определены формулой (120), по отношению к μ можно найти из того же условия (119), если приравнять его правую часть нулю и записать в несколько другом виде

$$q^2 - 2q[\gamma(x + x_1) - z^2] + (x + x_1)^2 = 0. \quad (129)$$

Отсюда находим

$$q^\pm = \gamma(x + x_1) - z^2 \pm zD_0, \quad \mu^\pm(x, x_1, \gamma) = 1 - \frac{q^\mp}{xx_1}, \quad (130)$$

где

$$D_0 = \sqrt{(x + x_1)^2 - 2\gamma(x + x_1) + z^2} = \sqrt{(x + x_1 - 1 - \gamma)(x + x_1 + 1 - \gamma)}. \quad (131)$$

Таким образом, при изотропных распределениях частиц и фотонов выражения для коэффициентов вынужденного поглощения имеют вид

$$\alpha_{\mp}(x) = \frac{r_e^2}{2\pi x} \int_{1/x}^{\infty} x_1 dx_1 n(x_1) \int_{\gamma^-(x, x_1)}^{\gamma^+(x, x_1)} n_{\mp}(\gamma) d\gamma \int_{\mu_m}^{\mu^+} d\mu \bar{F}(x, x_1, \mu, \gamma). \quad (132)$$

Нижний предел интегрирования по μ зависит от интервала изменения энергии частицы:

$$\mu_m = \begin{cases} \mu^- & \text{при } 1 \leq \gamma \leq \gamma^-(x, x_1, -1), \\ -1 & \text{при } \gamma^-(x, x_1, -1) \leq \gamma \leq \gamma^+(x, x_1, -1), \\ \mu^- & \text{при } \gamma^+(x, x_1, -1) \leq \gamma \leq x + x_1 - 1. \end{cases} \quad (133)$$

5. *Первообразная функция.* При вычислении интеграла по направлениям для процессов с парами нет таких трудностей с потерей точности, какие возникают при комптоновском рассеянии, поэтому здесь приведем первообразную этого интеграла. В ее выражение входят две вспомогательные функции:

$$A_0(h) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arsh}(\sqrt{h})}{\sqrt{h}}, & \text{если } h > 0, \\ \frac{\arcsin(\sqrt{-h})}{\sqrt{-h}}, & \text{если } h < 0, \end{cases}, \quad A(h) = \sqrt{1+h}. \quad (134)$$

При выводе выражений для первообразных функций использовались формулы 9.111, 9.121.26 и 9.121.28 из справочника [9]. В результате первообразная функция для \bar{F} получается в виде

$$\int \bar{F}(x, x_1, \mu, \gamma) d\mu = -2 \frac{s}{xx_1} + T(x, x_1, \mu, \gamma) + T(x_1, x, \mu, \gamma), \quad (135)$$

где

$$T(x, x_1, \mu, \gamma) = 2 \left(\frac{1-\mu}{2} \right)^{3/2} \left(1 - \frac{1}{xx_1} \right) \frac{A_0(h) - A(h)}{h} - \frac{2}{x^2 x_1^2} \left(\frac{2}{1-\mu} \right)^{1/2} A(h) + \frac{1}{x^2 x_1^2} \left(\frac{1-\mu}{2} \right)^{1/2} \left[\frac{xx_1(1+\mu) + (\gamma-x)(x_1-x)}{A(h)} - 4xx_1 A_0(h) \right]. \quad (136)$$

Здесь $h = (z^2 - 2\gamma x + x^2)(1-\mu)/2$. При замене $x \leftrightarrow x_1$ для последнего слагаемого в (135) величина h должна быть заменена на $h_1 = (z^2 - 2\gamma x_1 + x_1^2)(1-\mu)/2$.

Сравнение с § 5 предыдущей главы показывает, что описание процессов с парами формально очень близко к описанию комптоновского рассеяния, что отражает упоминавшуюся их принадлежность к одной квантовой реакции.

6. *Усреднение излучения.* Для коэффициента излучения из (90) при изотропных распределениях частиц получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon(x) &= \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3x_1}{x_1} \frac{d^3z_-}{\gamma_-} \frac{d^3z_+}{\gamma_+} \delta_* F n_-(\gamma_-) n_+(\gamma_+) = \\ &= \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3x_1}{x_1} \frac{d^3z_-}{\gamma_- \gamma_+} \delta(\gamma_- + \gamma_+ - x_1 - x) F n_-(\gamma_-) n_+(\gamma_+) = \\ &= \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3x_1}{x_1} d\gamma_- n_-(\gamma_-) n_+(x + x_1 - \gamma_-) 2\pi \bar{F}(x, x_1, \mu, \gamma_-),\end{aligned}\quad (137)$$

где δ_* то же, что и в (88), а \bar{F} — уже вводившаяся величина (110).

Следующий шаг — усреднение по направлениям импульса фотона \vec{x}_1 — сводится также к уже проделанной операции, а именно, к усреднению по μ величины (110). Таким образом, получается

$$\varepsilon(x) = \frac{D_e (2\pi)^2}{x} \int x_1 dx_1 d\gamma_- n_-(\gamma_-) n_+(x + x_1 - \gamma_-) \int_{\mu_m}^{\mu^+} \bar{F}(x, x_1, \mu, \gamma_-) d\mu. \quad (138)$$

Первообразная для вычисления интеграла дается формулой (136).

Выражение для коэффициента вынужденного излучения при изотропных распределениях частиц аналогично (137):

$$\varepsilon_*(\vec{x}) = \frac{D_e}{x} \int \frac{d^3x_1}{x_1} n(\vec{x}_1) d\gamma_- n_-(\gamma_-) n_+(x + x_1 - \gamma_-) 2\pi \bar{F}(x, x_1, \mu, \gamma_-). \quad (139)$$

При изотропном распределении фотонов интеграл по направлениям \vec{x} надо так же, как в (132), заменить на интегрирование по μ , первообразная для чего уже была найдена.

Когда газы частиц подчиняются максвелловским законам (86) с одной и той же температурой, формулы для коэффициентов излучения (138) и (139) еще упрощаются. Это происходит потому, что произведение распределений $n_-(\gamma_-) n_+(\gamma_+)$ пропорционально экспоненте $e^{-y(\gamma_- + \gamma_+)}$, которая в силу закона сохранения энергии

равна $e^{-y(x+x_1)}$ и не зависит от энергий частиц. В этом случае целесообразно исходить не из (138), а из исходного определения — первой формулы в (137) — и определения полного сечения рождения пары (73). Результирующее выражение для коэффициента спонтанного излучения в единицах РКСЕ имеет вид

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, y) &= 32\pi^2 D_e C_- C_+ \frac{e^{-yx}}{x^2} \int_{1/x}^{\infty} e^{-yx_1} dx_1 g_p \left(\sqrt{1 - \frac{1}{xx_1}} \right) = \\ &= 32\pi^2 D_e e^{-y(\mu_- + \mu_+)} \frac{e^{-yx}}{y^3} \alpha_W(y/x),\end{aligned}\quad (140)$$

где g_p задается прежней формулой (101), а $\alpha_W(y/x)$ — функция, определяемая формулой (106) при $\tau = \infty$. Таким образом, коэффициент излучения существенным образом зависит только от отношения y/x . Он вычислялся в работах [100] и [87].

Заметим, что отношение коэффициента излучения и коэффициента поглощения, если частицы имеют релятивистское максвелловское распределение по энергиям, а поглощение происходит на фотонах с распределением, пропорциональным виновскому, равно $e^{-y(x+\mu_\gamma)}$, что является аналогом соотношения Кирхгофа—Планка и следствием условия детального баланса.

На рис. 5 приведены графики логарифма коэффициента спонтанного излучения в расчете на один электрон и один позитрон (сечения), т. е. отношения

$$\frac{\varepsilon(x, y)}{n_-^0 n_+^0} = 32 \frac{r_e^2}{\lambda_C^3} \frac{\lambda_C^6}{(8\pi)^2} \left(\frac{\pi y}{K_2(y)} \right)^2 \frac{e^{-yx}}{y^3} \alpha_W \left(\frac{y}{x} \right) = 4\pi \alpha_{\text{fs}}^2 \left(\frac{\pi y}{K_2(y)} \right)^2 \frac{e^{-yx}}{y^3} \alpha_W \left(\frac{y}{x} \right)\quad (141)$$

в зависимости от x для ряда значений y . Рассчитывалось последнее выражение, в котором все величины представлены в релятивистской квантовой системе единиц. Это означает, что населенности частиц рассчитаны не на единичный объем, а на объем λ_C^3 , а коэффициент излучения — не на 1 см, а на единицу длины в РКСЕ — λ_C , так что для перехода к размерным величинам, т. е. к предпоследнему выражению в (141), необходимо внести множитель $\lambda_C^5 = 8.5877 \cdot 10^{-53}$, а все графики на рис. 4 следует сдвинуть вниз на $5 \lg \lambda_C = 52.066$.

Из рисунка видно, что с уменьшением температуры график коэффициента излучения становится более узким, а максимум его

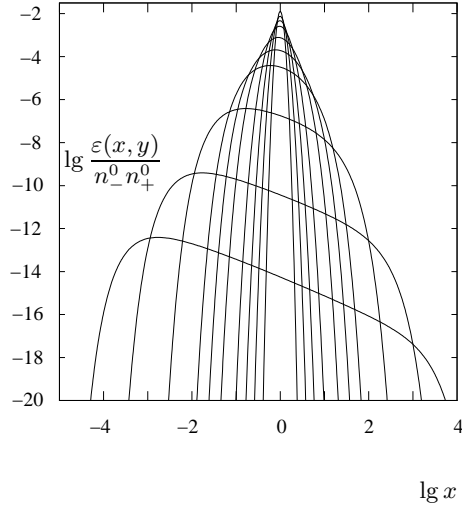


Рис. 5. Безразмерное отношение (141) при (снизу вверх)
 $y = 0.001, 0.01, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0, 5.0, 10.0, 20.0, 50.0$.

растет. Легко вывести, что при $y \gg 1$ и $y \gg x$ отношение

$$\frac{\varepsilon(x, y)}{n_-^0 n_+^0} \sim 4\pi^3 \alpha_{fs}^2 \left(\frac{y}{\sqrt{\pi/(2y)}} \right)^2 \frac{e^{-yx}}{y^3} \sqrt{\frac{\pi y}{x}} e^{-y/x} = 8\pi^2 \alpha_{fs}^2 \sqrt{\frac{y}{x}} e^{-y(x+1/x-2)}. \quad (142)$$

Эта асимптотика в точке $x = x_m = \sqrt{1 + \frac{1}{16y^2}} - \frac{1}{4y} \sim 1 - \frac{1}{4y}$, сдвигающейся при увеличении y к 1 слева, имеет максимум, равный

$$8\pi^2 \alpha_{fs}^2 \sqrt{y} \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{16y^2}} - \frac{1}{4y}} e^{-2y(\sqrt{1+1/(16y^2)}-1)} \sim 8\pi^2 \alpha_{fs}^2 \sqrt{y}, \quad (143)$$

т. е. растущий пропорционально \sqrt{y} .

Заметим, что функция $\varepsilon(x, y)$ является излучательной способностью не в интенсивности, а в числах заполнения и содержит в знаменателе множитель x^3 . Если на него умножить нашу функцию, графики примут более привычную форму, где максимум излучения с ростом температуры смещается в сторону больших частот. С таким исправлением графики согласуются с приведенными в [100, 87].

Выражение для коэффициента $\varepsilon_*(x, y)$ отличается от выражения (140) для $\varepsilon(x, y)$ только наличием под интегралом дополнительного множителя $n(x_1)$.

7. *Средние частоты.* В конце этого параграфа найдем средние частоты фотонов, излучаемых при аннигиляции. Усреднение ведется по распределениям импульсов аннигилирующих частиц.

Среднюю l -тую степень излучаемой частоты определим соотношением

$$\langle x^l \rangle \varepsilon_0 = \varepsilon_l = 8\pi D_e \int \frac{d^3 z_-}{\gamma_-} \frac{d^3 z_+}{\gamma_+} n_-(\vec{z}_-) n_+(\vec{z}_+) \beta \gamma^2 \overline{x^l} s_{\text{ann}}(\beta), \quad (144)$$

куда надо подставить выражение для средней степени частоты при фиксированных импульсах частиц \vec{z}_- и \vec{z}_+ (77). Величина ε_0 — это просто полное излучение (97). Для средней частоты ($l = 1$) получается простое выражение, а именно, $\overline{x} = s_0/2 = (\gamma_- + \gamma_+)/2$. Для среднего квадрата находим $\overline{x^2} s_{\text{ann}}(\beta) =$

$$= \frac{1}{32\beta\gamma^2} \left[\left(3s_0^2 - 4\gamma^2 - \frac{(\gamma_- - \gamma_+)^2}{\beta^2} \right) F_0(\beta) + \left(3 \frac{(\gamma_- - \gamma_+)^2}{\beta^2} - s_0^2 + 4\gamma^2 \right) F_2(\beta) \right]. \quad (145)$$

Здесь функции $F_0(\beta)$ и $F_2(\beta)$ определяются формулами (71) и (78). Ограничимся этими значениями l .

При изотропных распределениях частиц

$$\varepsilon_l = 8\pi D_e 4\pi 2\pi \int_0^\infty \frac{z_-^2 dz_-}{\gamma_-} n_-(\gamma_-) \int_0^\infty \frac{z_+^2 dz_+}{\gamma_+} n_+(\gamma_+) \int_{-1}^1 \beta \gamma^2 \overline{x^l} s_{\text{ann}}(\beta) d\zeta. \quad (146)$$

Вычислим интегралы по ζ — косинусу угла между импульсами частиц. Сделаем замену переменной интегрирования:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{2}{1 + \gamma_+ \gamma_- - z_+ z_- \zeta}}, \quad \beta_\pm = \beta|_{\zeta=\mp 1}. \quad (147)$$

Тогда

$$\beta_+ \beta_- = \frac{|\gamma_+ - \gamma_-|}{s_0} = \frac{|z_+^2 - z_-^2|}{s_0^2}, \quad \frac{\beta_-}{\beta_+} = \frac{|z_+ - z_-|}{z_+ + z_-}, \quad \beta_\pm = \frac{|z_+ \pm z_-|}{s_0}, \quad (148)$$

причем $d\zeta = -(4/z_- z_+) \beta \gamma^4 d\beta$ и (146) при $l = 0$ переписывается так:

$$\varepsilon_0 = 128\pi^3 D_e \int_1^\infty d\gamma_- n_-(\gamma_-) \int_1^\infty d\gamma_+ n_+(\gamma_+) g_0(\beta) \Big|_{\beta_-}^{\beta_+}, \quad (149)$$

Формула для ε_1 отличается от (149) наличием под интегралом множителя $s_0/2$. Для $l = 2$ надо кроме $g_0(\beta)$ вычислить еще 3 интеграла, так как после подстановки в (146) формулы (145) с учетом равенств (25) получаем

$$\varepsilon_2 = 16\pi^3 D_e \int_1^\infty d\gamma_- n_-(\gamma_-) \int_1^\infty d\gamma_+ n_+(\gamma_+) [s_0^2 g_1(\beta) - 2g_2(\beta) + (\gamma_- - \gamma_+)^2 g_3(\beta)] \Big|_{\beta_-}^{\beta_+}. \quad (150)$$

Все функции g элементарны и неотрицательны:

$$g_0(\beta) = \beta^2 \left[\left(\beta^2 \gamma^2 + \frac{3}{2} a(\beta) \right) a(\beta) - \gamma^2 \right], \quad (151)$$

$$g_1(\beta) = \beta^2 \left[(2\gamma^2 - 3 + 2a(\beta)) a(\beta) - \frac{4}{3} \gamma^2 \right] + 5[a(\beta) - 1], \quad (152)$$

$$g_2(\beta) = \beta^2 \left[\frac{17}{3} \gamma^2 + \frac{2}{3} \gamma^4 - (2\gamma^2 + 7a(\beta)) a(\beta) \right] + 10[a(\beta) - 1], \quad (153)$$

$$g_3(\beta) = 2\beta^2 [(\gamma^2 + 4a(\beta)) a(\beta) - 2\gamma^2] - 5[a(\beta) - 1] \left(3 + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{5}{3}. \quad (154)$$

Отношения $g_l(\beta)/\beta^2$, $l = 0, 1, 2$, и $g_3(\beta)/\beta^4$ при $\beta \rightarrow 0$ стремятся к конечным положительным числам, равным соответственно $1/2$, $4/3$, $2/3$ и $2/7$.

Вычисление $\langle x \rangle$ и $\langle x^2 \rangle$ позволяет найти дисперсию излучаемых частот и следовательно ширину аннигиляционной детали.

Если принять, что электронный и позитронный газы имеют релятивистские максвелловские распределения с одной температурой $T = mc^2/(k_B y)$, то после замены переменных интегрирования $u = s_0 - 2 = \gamma_- + \gamma_+ - 2$, $v = \gamma_- - \gamma_+$ интегралы $\varepsilon_l(y)$ примут вид

$$\varepsilon_0(y) = D(y) \int_0^\infty e^{-yu} du \int_0^u dv g_0(\beta) \Big|_{\beta_-}^{\beta_+}, \quad (155)$$

$$\varepsilon_2(y) = \frac{D(y)}{8} \int_0^\infty e^{-yu} du \int_0^u dv [(2+u)^2 g_1(\beta) - 2g_2(\beta) + r_0^2 g_3(\beta)] \Big|_{\beta_-}^{\beta_+}, \quad (156)$$

где для краткости введено обозначение для коэффициента, зависящего от параметра y :

$$D(y) = 128\pi^3 D_e n_-^0 n_+^0 \left[\frac{ye^{-y}}{4\pi K_2(y)} \right]^2. \quad (157)$$

Выражение для $\varepsilon_1(y)$ отличается, как и выше, одним дополнительным множителем под интегралом, на этот раз $1 + u/2$.

Нетрудно получить асимптотики рассматриваемых интегралов при температурах, низких по сравнению с температурой $mc^2/k_B \approx 6 \cdot 10^9 K$, т. е. при $y \gg 1$: $\varepsilon_0(y) \sim$

$$\sim \frac{\pi D(y)}{4 y^3} \left(1 + \frac{15}{4} \frac{1}{y} - \frac{123}{32} \frac{1}{y^2} + \frac{1435}{128} \frac{1}{y^3} - \frac{70917}{2048} \frac{1}{y^4} + \frac{1002669}{8192} \frac{1}{y^5} \right), \quad (158)$$

$$\varepsilon_1(y) \sim \frac{\pi D(y)}{4 y^3} \left(1 + \frac{21}{4} \frac{1}{y} + \frac{117}{32} \frac{1}{y^2} + \frac{205}{128} \frac{1}{y^3} + \frac{9831}{8192} \frac{1}{y^5} \right), \quad (159)$$

$$\varepsilon_2(y) \sim \frac{\pi D(y)}{4 y^3} \left(1 + \frac{29}{4y} + \frac{537}{32} \frac{1}{y^2} + \frac{10303}{896} \frac{1}{y^3} + \frac{432437}{14336} \frac{1}{y^4} + \frac{5061483}{63079} \frac{1}{y^5} \right). \quad (160)$$

Из формул для $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ следуют асимптотики средней частоты и среднего квадрата частоты:

$$\langle x \rangle = \frac{\varepsilon_1(y)}{\varepsilon_0(y)} \sim 1 + \frac{3}{2} \frac{1}{y} + \frac{15}{8} \frac{1}{y^2} - \frac{87}{8} \frac{1}{y^3} + \frac{8295}{128} \frac{1}{y^4}, \quad (161)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\varepsilon_2(y)}{\varepsilon_0(y)} \sim 1 + \frac{7}{2} \frac{1}{y} + \frac{15}{2} \frac{1}{y^2} - \frac{1611}{112} \frac{1}{y^3} + \frac{3033}{28} \frac{1}{y^4}, \quad (162)$$

а также дисперсии и стандартного отклонения от средних частот (квадратный корень из дисперсии):

$$D_x(y) = \langle x^2 \rangle(y) - [\langle x \rangle(y)]^2 \sim \frac{1}{2y} \left(1 + \frac{3}{y} + \frac{195}{56} \frac{1}{y^2} + \frac{29}{14} \frac{1}{y^3} \right), \quad (163)$$

$$\varsigma(y) = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \sim \sqrt{\frac{1}{2y}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{1}{y} + \frac{69}{112} \frac{1}{y^2} + \frac{1545}{224} \frac{1}{y^3} \right). \quad (164)$$

На рис. 6а приведены логарифмы отношений $\frac{\varepsilon_l(y)}{D(y)}$ (средняя кривая соответствует $l = 1$), а на 6б средняя частота $\langle x \rangle$ фотонов, излучаемых при аннигиляции пар, средний квадрат и дисперсия частоты, а также стандарт ς в зависимости от параметра y . С ростом температуры (уменьшением параметра y) все эти величины быстро

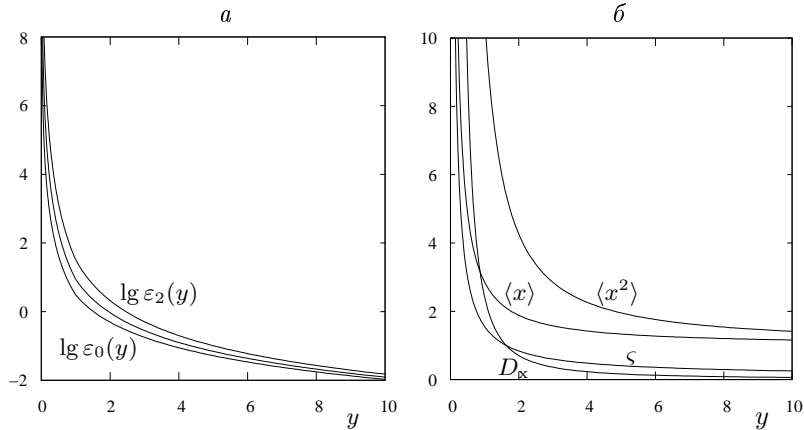


Рис. 6. Величины $\varepsilon_i(y)$ ($i = 0, 1, 2$, а) и средние $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $D_x(y)$ и $\zeta(y)$ (б).

растут. При больших значениях y расчеты и асимптотики согласуются.

Заметим, что приведенные здесь формулы относятся к достаточно энергичным частицам, когда их можно рассматривать как свободные, т. е. не испытывающие кулоновского взаимодействия. Поправки, учитывающие это взаимодействие, в частности, возможность образования легкого атома позитрония, состоящего из электрона и позитрона, приводятся в монографиях по квантовой электродинамике, например, в [5, 2], но в большинстве случаев ими можно пренебречь. Рекомбинационное излучение позитрония значительно более слабое, чем аннигиляционное. Действительно, наибольшая энергия, которая может быть излучена после образования позитрония в его линиях, равна 6.7 эВ , а энергия фотонов, излучаемых при аннигиляции покоящейся пары, равна энергии покоя электрона 511.7 эВ . Если аннигилирующие частицы движутся не с релятивистскими скоростями, то, как видно из асимптотик (161)–(162), энергия испускаемых при их аннигиляции фотонов не сильно отличается от этой. Излучение, возникающее при аннигиляции позитрония, наблюдается в спектре Галактического Центра [61].

Как следует из приведенных асимптотик, аннигиляционная дельта при нерелятивистских парах получается узкой. Однако, она может быть расширена в результате рассеяния на тех же электронах и позитронах.

Здесь рассматривались двухфотонные процессы с электрон-позитронными парами. При наличии внешнего поля, например, сильного магнитного поля, возможны и однофотонные процессы, так как избыточный импульс забирает поле. Однофотонные процессы с парами возможны и в поле иона. Эти процессы являются другими каналами той же схемы, что и тормозное излучение электрона в поле иона, рассмотренное в Главе II. Соответствующие диаграммы Фейнмана можно получить из диаграммы на странице 69, если переменить направление внешней фотонной или электронной линии.

Приложение А. О гамма-функции

1. *Определение и продолжение.* Гамма-функция Эйлера является аналитическим продолжением на произвольные комплексные значения аргумента функции, которая определена только для целых неотрицательных его значений, а именно, целочисленной функции факториал: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$. Это продолжение производится обычно посредством интеграла

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{z-1} dy. \quad (1)$$

Интеграл сходится при $\operatorname{Re} z > 0$, т. е. при z , лежащих в правой полуплоскости комплексной плоскости. Для целых значений аргумента

$$\Gamma(n+1) = n! = n(n-1)!. \quad (2)$$

На левую полуплоскость гамма-функция продолжается с помощью основного ее свойства, получаемого путем интегрирования в (1) по частям и обобщающего аналогичное свойство факториала:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \quad (3)$$

Из (3) с очевидностью следует, что во всех целых неположительных числах гамма-функция обращается в бесконечность. В этих точках она имеет простые полюса. Вычет в точке $z = -n$

$$\operatorname{res}_{z=-n} \Gamma(z) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n) \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\dots(z+n-1)(z+n)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (4)$$

Бесконечно удаленная точка является особой типа предельной для полюсов.

Через гамма-функцию при вещественных $s > 0$ выражаются также комплекснозначные интегралы

$$\int_0^{\infty} e^{-zy} y^{s-1} dy = z^{-s} \Gamma(s). \quad (5)$$

При вещественных же z равенство очевидно, а для комплексных получается по принципу аналитического продолжения. В частности, при чисто мнимых z после отделения вещественной и мнимой частей получаются интегралы

$$\int_0^{\infty} \cos(xy)y^{s-1}dy = \frac{\Gamma(s)}{x^s} \cos \frac{\pi s}{2}, \quad \int_0^{\infty} \sin(xy)y^{s-1}dy = \frac{\Gamma(s)}{x^s} \sin \frac{\pi s}{2}. \quad (6)$$

2. *Бета-функция.* Интеграл Эйлера первого рода, как по-другому называется бета-функция в отличие от интеграла второго рода — гамма-функции, сразу определяется интегралом

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt. \quad (7)$$

Для нее справедливо соотношение

$$\begin{aligned} B(x, x) &= \int_0^1 [t(1-t)]^{x-1}dt = \int_0^1 \left[\frac{1-(1-2t)^2}{4} \right]^{x-1} dt = \\ &= 2^{2(1-x)} \int_0^1 (1-u^2)^{x-1}du = 2^{1-2x} B(1/2, x). \end{aligned} \quad (8)$$

Бета-функция выражается через гамма-функцию:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (9)$$

Формула вытекает из следующей выкладки:

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= 4 \int_0^{\infty} e^{-t^2} t^{2x-1} dt \int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2y-1} du = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^{2x-1}\varphi \sin^{2y-1}\varphi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} \rho^{2(x+y)-1} d\rho = B(x, y)\Gamma(x+y). \end{aligned} \quad (10)$$

При проведении этой выкладки были сделаны последовательные замены переменных: $t = \rho \cos \varphi$, $u = \rho \sin \varphi$; $\rho = \sqrt{v}$, $\cos^2 \varphi = w$.

3. *Формулы дополнения, удвоения и утроения.* Вычислим при $0 < \alpha < 1$ интеграл

$$B(\alpha, 1 - \alpha) = \Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{-\alpha} dx. \quad (11)$$

Для этого рассмотрим интеграл в комплексной плоскости, взятый по контуру, составленному из окружности большого радиуса с центром в нуле и двух отрезков вдоль отрицательной части вещественной оси, обходящих промежутки $[-1, 0]$. Интегрируемую функцию выберем в виде той, которая стоит под интегралом в (11), но при $x = -z$ и так, чтобы она была вещественна на положительной ветви вещественной оси:

$$\oint z^{\alpha-1}(1+z)^{-\alpha} dz = 2\pi i. \quad (12)$$

При $z \rightarrow \infty$ подинтегральная функция ведет себя как $1/z$ и, следовательно, имеет на бесконечности простой полюс. Поэтому интеграл (12) равен $2\pi i$. Интегралы по отрезкам от самой левой точки окружности до точки $z = -1$ сокращаются, а отрезок $[-1, 0]$ — линию ветвления нашей функции — надо обойти с двух сторон. Переход с положительной части вещественной оси на отрицательную сверху и снизу добавляет к функции, положительной при $z > 0$, соответственно множители $\exp(\pm \pi i(\alpha - 1))$. Интеграл по окружности не зависит от ее радиуса, который может быть устремлен к бесконечности. Таким образом, интеграл (12) преобразуется в

$$\int_{-1}^0 e^{\pi i(\alpha-1)} |z|^{\alpha-1} (1+z)^{-\alpha} dz + \int_0^{-1} e^{-\pi i(\alpha-1)} |z|^{\alpha-1} (1+z)^{-\alpha} dz. \quad (13)$$

Подстановка $z = -x$ и использование формулы Эйлера, выражающей синус через экспоненту, приводит к формуле дополнения

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}. \quad (14)$$

Выведенная для аргумента из промежутка $(0, 1)$, формула дополнения верна при любых значениях аргумента по принципу аналитического продолжения.

Формула удвоения, являющаяся следствием формул (8) и (9), имеет вид

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z) \Gamma(z + 1/2) \quad (15)$$

и также верна при всех z . Более сложно выводится формула утроения [53]:

$$\Gamma(3z) = \frac{3^{3z-1/2}}{2\pi} \Gamma(z) \Gamma(z + 1/3) \Gamma(z + 2/3). \quad (16)$$

4. *Гамма-функция от комплексного аргумента.* Нам понадобятся значения $\Gamma(1 + n + i\mu) = \Gamma_{\mathbb{R}}(1 + n, \mu) + i\Gamma_{\mathbb{I}}(1 + n, \mu)$. Достаточно получить $\Gamma(1 + i\mu)$, так как после этого можно воспользоваться соотношением (3), которое для вещественной и мнимой частей переписывается в виде двух равенств

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(1+n, \mu) = n\Gamma_{\mathbb{R}}(n, \mu) - \mu\Gamma_{\mathbb{I}}(n, \mu), \quad \Gamma_{\mathbb{I}}(1+n, \mu) = n\Gamma_{\mathbb{I}}(n, \mu) + \mu\Gamma_{\mathbb{R}}(n, \mu). \quad (17)$$

Разграничим случаи малых и больших мнимых аргументов μ . При $\mu \leq 3.2$ используем формулу 8.321.1 из [9], которая после отделения вещественной и мнимой частей переходит в

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(1, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \mu^{2n}, \quad \Gamma_{\mathbb{I}}(1, \mu) = -\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \mu^{2n}. \quad (18)$$

Первые 10 коэффициентов a_n и b_n приведены в книге Ю.Люка [31]. В частности, $a_0 = 1$, $b_0 = \gamma_{\mathbb{E}} = 0.5772$ — постоянная Эйлера.

При $\mu > 3.2$ более подходит формула 8.327 из того же справочника [9], которую полезно умножить на $i\mu$. В результате получится

$$\begin{aligned} \Gamma(1 + i\mu) = & \sqrt{2\pi\mu} e^{-\pi\mu/2} \left[\cos\left(\mu \ln \frac{\mu}{e} + \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\mu \ln \frac{\mu}{e} + \frac{\pi}{4}\right) \right] \times \\ & \times \left[1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{\mu^{2m}} \left(\frac{c_m}{\mu^2} + i \frac{d_m}{\mu} \right) \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

В этой формуле надо разделить вещественную и мнимую части. Коэффициенты c_m и d_m для $m = 1(1)9$ приведены у Ю.Люка [31].

Другой способ вычисления основан на формуле 8.344 из [9], которая для мнимых аргументов преобразуется в

$$\ln \Gamma(1 + i\mu) = r_{\mathbb{R}}(\mu) + ir_{\mathbb{I}}(\mu), \quad (20)$$

где вещественная часть $r_{\text{R}}(\mu) = \frac{1}{2} \ln(2\pi\mu) - \frac{\pi\mu}{2}$, а мнимая $r_{\text{I}}(\mu) = \frac{\pi}{4} + \mu(\ln \mu - 1) - \frac{1}{2\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n+2}}{(n+1)(2n+1)} \frac{(-1)^n}{\mu^{2n}}$. Здесь B_{2n+2} — числа Бернулли. Этот способ несколько более быстрый, так как ряд содержит только нечетные степени. Кроме того, можно использовать точное значение

$$e^{r_{\text{R}}} = \sqrt{\frac{\pi\mu}{\text{sh}(\pi\mu)}} \sim \sqrt{2\pi\mu} e^{-\pi\mu/2}, \quad (21)$$

следующее из формулы дополнения (14).

Проверкой программы и точности вычислений гамма-функции таких аргументов наряду с совпадением значений вблизи $\mu = 3.2$ может служить соотношение, также следующее из формулы дополнения:

$$\Gamma(1+n+i\mu)\Gamma(1+n-i\mu) = \frac{\pi\mu}{\text{sh}(\pi\mu)} \prod_{k=1}^n (k^2 + \mu^2). \quad (22)$$

5. *Формула Стирлинга.* При $|z| \geq 1$ справедлива формула (8.327 из [9], множитель перед суммой — формула Стирлинга)

$$\Gamma(z+1) = \sqrt{2\pi z} \left(\frac{z}{e}\right)^z \left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \dots\right). \quad (23)$$

Приложение Б. О функциях Бесселя

1. *Определение.* В этом приложении приводятся основные сведения о функциях Бесселя. Большая часть из них доказывается, остальные даются без вывода.

Функцию Бесселя можно определить как решение уравнения Бесселя

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - \nu^2)w = 0, \quad (24)$$

где w — искомая функция, а z — ее (вообще говоря, комплексный) аргумент. Число ν называется порядком уравнения и функции.

Легко проверить прямой подстановкой в уравнение, что формальным решением уравнения Бесселя является следующий ряд

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}. \quad (25)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Радиус сходимости ряда (25) равен бесконечности, т. е. он сходится при любых комплексных z . Следовательно, этот ряд является не только формальным, но и настоящим решением уравнения Бесселя и его сумма называется функцией Бесселя первого рода или просто функцией Бесселя (основной).

Линейно независимыми решениями уравнения Бесселя являются функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$, если только ν не целое число. Случай целых ν будет рассмотрен отдельно.

Часто второе линейно независимое решение представляют в виде следующей линейной комбинации указанных решений

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\pi\nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)}, \quad (26)$$

которую называют функцией Вебера или Неймана.

2. *Модифицированные функции.* Если в уравнении Бесселя (24) заменить переменную z на iz , то уравнение перейдет в

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + \nu^2)w = 0, \quad (27)$$

называемое модифицированным уравнением Бесселя. Соответствующие решения носят название модифицированных функций Бесселя (или функций Бесселя чисто мнимого аргумента). Одна из них — это просто функция Бесселя (основная) от положительного аргумента, умноженного на мнимую единицу, с множителем, делающим ее вещественной:

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2} J_\nu(e^{i\pi/2} z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! \Gamma(\nu + 1 + m)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2m}. \quad (28)$$

Вторым решением при нецелых ν может служить $I_{-\nu}(z)$. Более удобна другая функция, которую называют функцией Макдональда:

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\pi\nu)}. \quad (29)$$

3. *Случай целого порядка.* Если число $\nu = n$ целое, то две функции $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$ оказываются линейно зависимыми. Действительно,

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{-n+2m}}{m! \Gamma(-n+1+m)} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{-n+2m}}{m! \Gamma(-n+1+m)} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{1}{(n+m)! m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} = (-1)^n J_n(z). \end{aligned} \quad (30)$$

При преобразованиях суммы использовано то обстоятельство, что при значениях аргумента гамма-функции, равных отрицательным целым числам или нулю, эта функция обращается в бесконечность. Затем переменная суммирования m заменена на $n+m$. Точно такое же соотношение справедливо и для функции $I_n(z)$.

Здесь оказываются полезными альтернативные представления линейно независимых решений, т. е. функции Вебера и Макдональда. Они имеют конечные пределы при стремлении порядка ν к целым числам. Числители и знаменатели в (26) и (29) обращаются в нуль, раскрыть эту неопределенность можно по правилу Лопиталья. Например, для функции Вебера имеем

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{J_\nu(z) \cos(\pi \nu) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\pi \nu)} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}. \quad (31)$$

Аналогично получается

$$\begin{aligned} K_n(z) &= \frac{(-1)^n}{2} \left[\frac{\partial I_{-\nu}(z)}{\partial \nu} - \frac{\partial I_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} = (-1)^{n+1} I_n(z) \left(\ln \frac{z}{2} + \gamma_E \right) + \\ &+ \frac{(-1)^n}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{n+2l}}{l!(n+l)!} \left(\sum_{k=1}^l \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n+l} \frac{1}{k} \right) + \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \left(\frac{z}{2}\right)^{2l-n} \frac{(n-l-1)!}{l!}. \end{aligned} \quad (32)$$

4. *Интегральные представления.* Функции Бесселя могут быть представлены в виде определенных интегралов, с помощью которых их удобно исследовать и вычислять. Одно такое представление для функции целого порядка доказывается следующей непосредственной выкладкой:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iz \sin \varphi - in\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z/2)^m}{m!} \int_0^{2\pi} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})^m e^{-in\varphi} d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k m!}{k!(m-k)!} \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(m-k-k-n)} d\varphi = \quad (33) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} \frac{(z/2)^m}{(m-k)!} 2\pi \delta_{m, 2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}.
\end{aligned}$$

Так как функция $J_n(z)$ при положительных z вещественна, то в показателе экспоненты можно изменить знак.

Ввиду равенства нулю интеграла от синуса, представляющего нечетную часть экспоненты, интегральное представление (33) можно записать так:

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\chi - z \sin \chi) d\chi. \quad (34)$$

Точно так же получается представление модифицированной функции

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos \varphi} \cos n \varphi d\varphi, \quad (35)$$

которое можно вывести также при помощи формулы (28) и подстановки в интеграле (33) $\varphi = \varphi' - \pi/2$ с последующим смещением промежутка интегрирования по периоду.

Аналогичным разложением экспоненты по степеням $z \cos \varphi$ выводятся представления функций, справедливые и при нецелых порядках:

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\pi} e^{i z \cos \varphi} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi, \quad (36)$$

$$I_{\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\nu + 1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\pi} e^{z \cos \varphi} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi. \quad (37)$$

При вычислении некоторых величин требуются два интеграла, связанных с функцией Бесселя. Один из них представляет ее производную, второй получается интегрированием по частям в основной формуле (33):

$$J_n(z) = \frac{z}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi - iz \sin \varphi} \cos \varphi d\varphi, \quad J'_n(z) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{in\varphi - iz \sin \varphi} \sin \varphi d\varphi. \quad (38)$$

Два представления функции Макдональда приводим без доказательства:

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{ch}(\nu t) dt = \frac{\sqrt{\pi}(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\infty e^{-z \operatorname{ch} t} \operatorname{sh}^{2\nu} t dt. \quad (39)$$

5. *Рекуррентные соотношения.* Из представлений в виде интеграла или в виде рядов можно вывести соотношения между функциями соседних порядков от одного значения аргумента:

$$z[J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)] = 2\nu J_\nu(z), \quad (40)$$

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z). \quad (41)$$

Аналогичные соотношения справедливы и для других функций. Например, для функций Макдональда

$$z[K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z)] = -2\nu K_\nu(z), \quad (42)$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z). \quad (43)$$

6. *Выражения через функции Макдональда.* Выше приведены формулы, выражающие функцию Макдональда через модифицированные функции Бесселя. Можно получить и обратные представления. Для этого подставим в (29) $e^{i\pi}z$ вместо z :

$$K_\nu(e^{i\pi}z) = \frac{\pi e^{-i\pi\nu} I_{-\nu}(z) - e^{i\pi\nu} I_\nu(z)}{2 \sin(\pi\nu)}. \quad (44)$$

Из (29) и (44) выражаем I_ν через K_ν :

$$I_\nu(z) = \frac{1}{i\pi} [K_\nu(z)e^{-i\pi\nu} - K_\nu(ze^{i\pi})]. \quad (45)$$

Отсюда получается выражение через функцию Макдональда и основной функции Бесселя:

$$J_\nu(z) = \frac{i}{\pi} [e^{i\pi\nu/2} K_\nu(e^{i\pi/2}z) - e^{-i\pi\nu/2} K_\nu(e^{-i\pi/2}z)]. \quad (46)$$

7. *Поведение вблизи нуля.* Прямо из рядов (25) и (28) следует, что при $z \rightarrow 0$

$$J_\nu(z) \sim I_\nu(z) \sim \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu. \quad (47)$$

Мы привели только главные слагаемые таких формул, следующие получаются при помощи упомянутых рядов.

Отсюда получаются формулы, отражающие поведение функций Макдональда вблизи нуля. При нецелых порядках ($\nu > 0$)

$$K_\nu(z) \sim \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(z)}{\sin(\pi\nu)} \sim \Gamma(\nu) 2^{\nu-1} z^{-\nu}. \quad (48)$$

Формулы для целого порядка следуют из рядов (32).

8. *Асимптотики при $z \rightarrow \infty$.* Такие асимптотики легче всего вывести для функции Макдональда. Исходя из второй формулы в (39), после подстановки $u = z(\text{ch } t - 1)$, $\text{ch } t = 1 + u/z$, $\text{sh}^2 t = (2/z)u(1 + u/2z)$, $z \text{sh } t dt = du$ получаем

$$\begin{aligned} K_\nu(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{e^{-z}}{\Gamma(\nu+1/2)} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{u}{2z}\right)^{\nu-1/2} dt = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \int_0^\infty du e^{-u} u^{\nu-1/2} \sum_{n=0}^\infty \frac{u^n}{(2z)^n n! \Gamma(\nu+1/2-n)} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+1/2+n)}{(2z)^n n! \Gamma(\nu+1/2-n)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Из полученной асимптотики легко найти асимптотики и других функций, так как они выражаются через K_ν посредством формул (45) и (46). Именно, для модифицированной функции получается

$$I_\nu(z) \sim \frac{i}{\pi} K_\nu(e^{i\pi} z) \sim \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^z \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+1/2+n)}{(2z)^n n! \Gamma(\nu+1/2-n)}. \quad (50)$$

Для основной функции Бесселя надо взять оба асимптотических слагаемых, так как они имеют один порядок:

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[\cos\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n \Gamma(\nu+1/2+2n)}{(2z)^{2n} (2n)! \Gamma(\nu+1/2-2n)} - \right.$$

$$-\sin\left(z - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2z)^{2n+1}(2n+1)!} \frac{\Gamma(\nu + 3/2 + 2n)}{\Gamma(\nu - 1/2 - 2n)} \Big]. \quad (51)$$

Все эти асимптотики являются асимптотическими разложениями и их надо суммировать, пока их слагаемые убывают.

Полученные асимптотики не годятся, когда порядок функций велик. Этот случай надо рассматривать отдельно.

9. *Приближение ВКБ при больших значениях порядка.* Получим асимптотическую формулу для основной функции Бесселя, когда ее аргумент и порядок велики. Следуя способу, примененному в книге А. А. Соколова и И. М. Тернова [51], сделаем это в два этапа. На первом получим решение методом ВКБ.

Как известно (см., например, [22]), метод ВКБ применяется к уравнениям вида

$$w''(z) \pm u^2(z)w(z) = 0 \quad (52)$$

и дает два линейно не зависящих приближенных решения в виде

$$w(z) = \frac{1}{\sqrt{|u(z)|}} \begin{cases} \exp\left(\pm i \int u(z) dz\right) & \text{при знаке } +, \\ \exp\left(\pm \int u(z) dz\right) & \text{при знаке } -. \end{cases} \quad (53)$$

Заменим в уравнении (24) независимую переменную z на y по формуле $z = \nu e^y$. Тогда уравнение перейдет в

$$\frac{d^2 J_\nu}{dy^2} - \nu^2(1 - e^{2y})J_\nu = 0. \quad (54)$$

Будем считать сначала, что $z \leq \nu$, так что $y \leq 0$. Метод ВКБ применим к этому уравнению. Входящий в формулу для решения такого уравнения интеграл легко вычисляется:

$$v_+ = \int_y^0 u dy = \int_y^0 \sqrt{1 - e^{2y}} dy = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} - u, \quad (55)$$

где обозначено

$$u = \sqrt{1 - e^{2y}} = \sqrt{1 - z^2/\nu^2}, \quad z = \nu\sqrt{1 - u^2}. \quad (56)$$

Тогда решение уравнения (54) в приближении ВКБ запишется в виде

$$J_\nu(z) = u^{-1/2}(C_1 e^{\nu v_+} + C_2 e^{-\nu v_+}). \quad (57)$$

Постоянные C_1 и C_2 определим, исходя из поведения функции Бесселя около нуля (47). При $z \rightarrow 0$ будет $u \sim 1 - z^2/2\nu^2 \rightarrow 1$, а при больших значениях порядка ν для гамма-функции воспользуемся формулой Стирлинга. Тогда $v_+ \sim \frac{1}{2} \ln \frac{4\nu^2}{z^2} - 1 = \ln \frac{2\nu}{z} - 1$ и

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sim \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left(\frac{e}{\nu}\right)^\nu. \quad (58)$$

Из сравнения (57) с (58) находим, что $C_1 = 0$, $C_2 = 1/\sqrt{2\pi\nu}$. Следовательно,

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}u} e^{-\nu v_+}. \quad (59)$$

Пусть теперь $z > \nu$. Тогда $y \geq 0$, $u = \sqrt{e^{2y} - 1} = \sqrt{z^2/\nu^2 - 1}$. Интеграл v определим аналогично (55), но так, чтобы он был вещественным и положительным:

$$v_- = \int_0^y u dy = \int_0^y \sqrt{e^{2y} - 1} dy = u - \operatorname{arctg} u. \quad (60)$$

Решение в этом случае

$$J_\nu(z) = u^{-1/2}[C_1 \cos(\nu v) + C_2 \sin(\nu v_-)]. \quad (61)$$

Постоянные определяем по асимптотике при $z \rightarrow \infty$, когда $u \sim z/\nu$, $v_- \sim z/\nu - \pi/2$, так что

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\nu}{z}} \left[C_1 \cos\left(z - \nu \frac{\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(z - \nu \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (62)$$

Согласно асимптотике (51) должно быть

$$J_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (63)$$

Поэтому $C_1 = C_2 = 1/\sqrt{\pi\nu}$.

Оба решения можно записать вместе. В обоих случаях $u = \sqrt{|z^2/\nu^2 - 1|}$ и

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu u}} \begin{cases} e^{-\nu v_+}, & v_+ = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u} - u, \quad z \leq \nu, \\ 2 \cos\left(\nu v_- - \frac{\pi}{4}\right), & v_- = u - \operatorname{arctg} u, \quad z \geq \nu. \end{cases} \quad (64)$$

Как обычно, решение методом ВКБ не применимо, когда u и, следовательно v , близки к нулю. Но полученные асимптотические формулы можно существенно уточнить, так, чтобы они не имели указанного недостатка.

10. *Формулы Лангера.* Эти формулы будем выводить сразу для обоих случаев, указывая двойные знаки, причем верхний знак будет относиться к случаю $z \leq \nu$, а нижний — к случаю $z \geq \nu$.

В исходном уравнении (24) сделаем (второй этап вывода) следующие замены искомой функции и ее аргумента:

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{u}} F(v_\pm). \quad (65)$$

Замена производной получается при помощи равенств

$$\frac{d}{dz} = \frac{dv_\pm}{du} \frac{du}{dz} \frac{d}{dv_\pm} = \mp \frac{u}{z} \frac{d}{dv_\pm}. \quad (66)$$

Тогда

$$z \frac{dJ_\nu(z)}{dz} = z \left[\frac{-1}{2u^{3/2}} \mp z \frac{1}{\nu^2 u} F \mp \frac{1}{\sqrt{u}} \frac{u}{z} F' \right] = \pm \left(\frac{z^2}{2\nu^2 u^{5/2}} F - \sqrt{u} F' \right). \quad (67)$$

Первые два слагаемых в левой части (24) переписутся следующим образом:

$$z \frac{d}{dz} \left(z \frac{dJ_\nu(z)}{dz} \right) = z \left[\frac{\pm z}{\nu^2 u^{5/2}} F \pm \frac{z^2}{2\nu^2} \frac{-5}{2} \frac{1}{u^{7/2}} \mp z \frac{1}{\nu^2 u} F \pm \frac{z^2}{2\nu^2 u^{5/2}} F' \frac{u}{z} + \right. \\ \left. \frac{\mp 1}{2\sqrt{u}} \mp z \frac{1}{\nu^2 u} F' + \sqrt{u} F'' \frac{u}{z} \right] = u^{3/2} F'' + \left[\pm \frac{z^2}{\nu^2 u^{5/2}} + \frac{5}{4} \frac{z^4}{\nu^4} \frac{1}{u^{9/2}} \right] F. \quad (68)$$

Уравнение для функции F получается таким:

$$F'' \mp \nu^2 F = -\frac{z^2}{4\nu^2 u^6} \left(5 \frac{z^2}{\nu^2} \pm 4u^2 \right) = -\frac{1 \mp u^2}{4} u^{-6} (5 \mp u^2) F. \quad (69)$$

Нам надо уточнить наше решение при малых u , поэтому преобразуем уравнение именно для этой области. В ней можно принять, что $v_{\pm} \sim u^3/3$. Тогда уравнение (68) можно переписать так:

$$F'' \mp \nu^2 F + \frac{5}{36} v_{\pm}^{-2} F = 0. \quad (70)$$

От уравнения, которому удовлетворяет решение (64), полученное уравнение отличается последним слагаемым, которое велико при малых v .

Чтобы привести уравнение (70) к стандартному виду, сделаем еще одну замену:

$$F(v_{\pm}) = \sqrt{\nu v_{\pm}} G(\nu v_{\pm}). \quad (71)$$

Для вновь введенной функции получается уравнение

$$z^2 G''(z) + z G'(z) - (1/9 \pm z^2) G(z) = 0, \quad (72)$$

т.е. модифицированное уравнение Бесселя для верхнего знака и основное уравнение Бесселя для нижнего, в обоих случаях порядка $1/3$. Поведение решения при больших v_+ в первом случае согласно (64) таково, что надо выбрать в качестве G функцию Макдональда $K_{1/3}$. Напротив, во втором случае надо взять комбинации функций $J_{1/3}$ и $J_{-1/3}$. Окончательно

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{\sqrt{u}} \begin{cases} \frac{\sqrt{v_+}}{\pi} K_{1/3}(\nu v_+), & z \leq \nu, \\ \frac{\sqrt{v_-}}{\sqrt{3}} [J_{1/3}(\nu v_-) + J_{-1/3}(\nu v_-)], & z \geq \nu. \end{cases} \quad (73)$$

В точке $z = \nu$ формулы дают

$$J_{\nu}(\nu) = \frac{1}{\pi} \Gamma(1/3) 2^{-2/3} 3^{-1/6} \nu^{-1/3} = \frac{2^{1/3}}{\Gamma(2/3)} 3^{-2/3} \nu^{-1/3}. \quad (74)$$

В силу формулы дополнения гамма-функции это одно и то же значение.

Для получения производной от функции Бесселя $J'_{\nu}(z)$ достаточно воспользоваться формулой (41) или формулами, следующими из (40) и (41):

$$J'_{\nu}(z) = \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z) - J_{\nu+1}(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_{\nu}(z). \quad (75)$$

При близких значениях z и ν здесь может быть большая потеря точности. Поэтому предпочтительней применить другой способ найти эту производную — продифференцировать асимптотические формулы. При этом в каждом случае следует оставлять только самые большие слагаемые, а именно те, которые получаются при дифференцировании бесселевых функций от аргумента νv_{\pm} , но не содержат дробей вида $1/(3\nu v_{\pm})$. Тогда сравнительно просто получаются формулы:

$$J'_{\nu}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\nu}{z} \sqrt{uv_+} K_{2/3}(\nu v_+), & z \leq \nu, \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\nu}{z} \sqrt{uv_-} [J_{-2/3}(\nu v_-) - J_{2/3}(\nu v_-)], & z \geq \nu. \end{cases} \quad (76)$$

Опять при $z = \nu$ по обеим формулам получается равные значения:

$$J'_{\nu}(\nu) = \frac{1}{\pi} 3^{1/6} 2^{-1/3} \nu^{-2/3} \Gamma(2/3) = 3^{-1/3} 2^{2/3} \nu^{-2/3} / \Gamma(1/3). \quad (77)$$

Полученные здесь асимптотики известны как формулы Лангера. Они вполне годятся для оценок различных величин, выражающихся через функции Бесселя. Однако для аккуратных расчетов их точность оказывается недостаточной и ее можно существенно повысить. Для этого можно воспользоваться методом, разработанным Черри [60]. Вычисление функций Бесселя порядка 0 и 1, а также $1/3$ и $2/3$ можно производить с помощью разложений по многочленам Чебышева, коэффициенты которых приведены в книге Люка [31].

11. *Вычисление и асимптотики функции $K_{i\mu}(z)$.* Рассмотрим еще эту функцию. Она вещественна, несмотря на мнимый порядок. Здесь дадим способ вычисления самой этой функции и ее производной для произвольных значений аргумента z и модуля индекса μ .

При не очень больших значениях z и μ можно использовать ряды по степеням z , получающиеся из рядов для функций Бесселя мнимого аргумента, через которые выражается функция Макдональда согласно формуле (29):

$$K_{i\mu}(z) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-i\mu}(z) - I_{i\mu}(z)}{i \operatorname{sh}(\pi\mu)}. \quad (78)$$

Сюда нужно подставить ряды (28) для $I_{\pm i\mu}(z)$ и использовать выражение (22) для произведения сопряженных гамма-функций. Тогда найдем ряды для $K_{i\mu}(z)$ и ее производной, которые сходятся при любых z , однако реально производить по ним вычисления целесообразно при $z < \mu < 10$. Способ вычисления вещественной и мнимой частей гамма-функции комплексного аргумента был дан в Приложении А.

Из первого интегрального представления в (39) находим

$$K_{i\mu}(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \operatorname{ch} t} \cos(\mu t) dt, \quad K'_{i\mu}(z) = - \int_0^{\infty} \operatorname{ch} t e^{-z \operatorname{ch} t} \cos(\mu t) dt. \quad (79)$$

Асимптотики для больших μ рассмотрим так же, как в предыдущих пунктах для $J_\nu(z)$.

Функция $K_{i\mu}(z)$ удовлетворяет уравнению для функций Макдональда

$$z^2 K''_{i\mu}(z) + z K'_{i\mu}(z) - (z^2 - \mu^2) K_{i\mu}(z) = 0. \quad (80)$$

Произведем замену аргумента $z = \mu e^y$, $y = \ln(z/\mu)$. Тогда уравнение (80) перейдет в

$$\frac{d^2 K_{i\mu}}{dy^2} + \mu^2 (1 - e^{2y}) K_{i\mu} = 0. \quad (81)$$

К уравнению в таком виде мы применим метод ВКБ.

Рассмотрим последовательно случаи $z \leq \mu$ и $z \geq \mu$. Введем те же обозначения u и v , что и выше. Так как знак в уравнении (81) перед μ^2 противоположен знаку в (54) перед ν^2 , то соответствие между случаями $z \leq \mu$ и $z \geq \mu$ будет противоположным, т. е. функции v будут теми же, но они будут входить в аргументы функций противоположного случая.

При $z \leq \mu$ решение ВКБ записывается в виде

$$K_{i\mu} = u^{-1/2} [C_1 e^{i\mu v} + C_2 e^{-i\mu v}], \quad (82)$$

Коэффициенты определяем, исходя из поведения функции Макдональда при малых значениях аргумента z . Из приближенной формулы следует, что когда $z \rightarrow 0$, то

$$K_{i\mu} \sim C_1 e^{-i\mu} \left(\frac{z}{2\mu}\right)^{-i\mu} + C_2 e^{i\mu} \left(\frac{z}{2\mu}\right)^{i\mu}. \quad (83)$$

Поведение точной функции получим, взяв первые слагаемые в разложении функции Макдональда при ее представлении через модифицированные функции Бесселя:

$$K_{i\mu}(z) \sim \pi i e^{-\pi\mu} \left[\frac{(z/2)^{i\mu}}{\Gamma(1+i\mu)} - \frac{(z/2)^{-i\mu}}{\Gamma(1-i\mu)} \right]. \quad (84)$$

Здесь гиперболический синус при больших μ заменен на экспоненту. Значения гамма-функции при больших μ возьмем из разложения ее логарифма, где первое слагаемое соответствует формуле Стирлинга:

$$\begin{aligned} \Gamma(1+i\mu) &= i\mu\Gamma(i\mu) \sim i\mu \exp\left(i\mu \ln(i\mu) - i\mu - \frac{\ln(i\mu)}{2} + \frac{\ln(2\pi)}{2}\right) = \\ &= \sqrt{2\pi\mu} \exp(-\pi\mu/2 + i(\mu \ln \mu - \mu + \pi/4)). \end{aligned} \quad (85)$$

Подставив эту асимптотику в (84), получим при $z \ll 1$ и $\mu \gg 1$

$$K_{i\mu}(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} e^{-\pi\mu/2} \left[\left(\frac{z}{2\mu}\right)^{i\mu} e^{i\mu+i\pi/4} + \left(\frac{z}{2\mu}\right)^{-i\mu} e^{-i\mu-i\pi/4} \right]. \quad (86)$$

Сравнение (84) и (86) дает

$$C_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} e^{-\pi\mu/2-i\pi/4}, \quad C_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2\mu}} e^{-\pi\mu/2+i\pi/4}. \quad (87)$$

Подставив эти выражения в (82), найдем представление решения в приближении ВКБ при $z < \mu$:

$$K_{i\mu} = \sqrt{\frac{2\pi}{\mu u}} e^{-\pi\mu/2} \cos(\mu v_+ - \pi/4). \quad (88)$$

Пусть теперь $z \geq \mu$. Решение ВКБ в этом случае состоит из вещественных экспонент:

$$K_{i\mu} = u^{-1/2} (C_1 e^{\mu v_-} + C_2 e^{-\mu v_-}). \quad (89)$$

Коэффициенты находятся из асимптотики функции Макдональда при $z \rightarrow \infty$, которая одинакова при любых значениях индекса (порядка):

$$K_{i\mu}(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}. \quad (90)$$

При больших z будет $u \sim z/\mu \gg 1$, $v_- \sim u - \pi/2 = z/\mu - \pi/2$, так что

$$K_{i\mu} \sim (\mu/z)^{1/2} (C_1 e^{z-\pi\mu/2} + C_2 e^{-z+\pi\mu/2}). \quad (91)$$

Поэтому коэффициенты

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \left(\frac{\pi}{2\mu}\right)^{1/2} e^{-\pi\mu/2} \quad (92)$$

и решение, получаемое методом ВКБ для случая $z > \mu$, принимает следующий вид:

$$K_{i\mu}(z) = \left(\frac{\pi}{2\mu u}\right)^{1/2} e^{-\pi\mu/2} e^{-\mu v_-}. \quad (93)$$

Далее проделаем такое же преобразование исходного уравнения, как и для основной бесселевой функции. Заменяем искомую функцию

$$K_{i\mu}(z) = \sqrt{\frac{\mu v_{\pm}}{u}} W(\mu v_{\pm}). \quad (94)$$

Тогда уравнение для W запишется так:

$$x^2 W''(x) + xW'(x) - \left(\frac{1}{9} \mp 1\right) W(x) = 0. \quad (95)$$

В таком виде приближенное (асимптотическое) уравнение хорошо представляет точное и при малых и при немалых u . Оно отличается от асимптотического уравнения (72) только порядком альтернативных знаков, вид решений его тот же с точностью до численных множителей.

При $z < \mu$ решениями уравнения (95) являются функции Бесселя с индексами $\pm 1/3$:

$$W = AJ_{1/3}(\mu v_+) + BJ_{-1/3}(\mu v_+). \quad (96)$$

Коэффициенты общего решения определяем из условия совпадения с решением ВКБ, когда u и, следовательно, v_+ не малы. Тогда велик аргумент функций Бесселя и согласно их асимптотикам

$$K_{i\mu} \sim \left(\frac{v_+}{u}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi\mu v_+}} \left[A \cos\left(\mu v_+ - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + B \sin\left(\mu v_+ + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (97)$$

Сопоставляя полученную асимптотику с решением ВКБ (93), находим

$$A = B = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\mu/2}. \quad (98)$$

При $z > \mu$ решения уравнения (95) — функции Бесселя мнимого аргумента того же порядка $1/3$. Частное решение выбираем из общего сравнением с (93). При немалых u будет $z \gg \mu$, следовательно, $u \sim z/\mu$, $v_- \sim u$. Поэтому в качестве решения (95) надо взять функцию Макдональда $K_{1/3}(\mu v_-)$, у которой асимптотика совпадает с (93).

Окончательно получаем, что

$$K_{i\mu}(z) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{v_+}{u}\right)^{1/2} [J_{1/3}(\mu v_+) + J_{-1/3}(\mu v_+)], & z \leq \mu, \\ e^{-\pi\mu/2} \left(\frac{v_-}{u}\right)^{1/2} K_{1/3}(\mu v_-), & z \geq \mu. \end{cases} \quad (99)$$

Для $z = \mu$ обе формулы дают один и тот же результат. Действительно, переходя в них к пределу при $u \rightarrow 0$, $v \sim u^3/3 \rightarrow 0$, получаем, что

$$K_{i\mu}(\mu) = \frac{\pi}{\Gamma(2/3)} e^{-\pi\mu/2} \mu^{-1/3} \frac{2^{1/3}}{3^{2/3}} = e^{-\pi\mu/2} \mu^{-1/3} \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3} 3^{1/6}}. \quad (100)$$

Для производной получаем в том же приближении

$$K'_{i\mu}(z) \sim \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-\pi\mu/2} \frac{\mu}{z} (uv_+)^{1/2} [J_{2/3}(\mu v_+) - J_{-2/3}(\mu v_+)], & z \leq \mu, \\ -e^{-\pi\mu/2} \frac{\mu}{z} (uv_-)^{1/2} K_{2/3}(\mu v_-), & z \geq \mu. \end{cases} \quad (101)$$

Общее значение двух формул

$$K'_{i\mu}(\mu) = -\frac{\pi}{\Gamma(1/3)} \frac{e^{-\pi\mu/2}}{\mu^{2/3}} \frac{2^{2/3}}{3^{1/3}} = -\frac{e^{-\pi\mu/2}}{\mu^{2/3}} \Gamma(2/3) \frac{3^{1/6}}{2^{1/3}}. \quad (102)$$

Если оказывается, что формулы Лангера недостаточно точны для вычисления, их можно уточнить. Способ уточнения результатов, получаемых методом Лангера, дан в уже упоминавшейся работе Черри [60]. Применение этого способа к функции $K_{i\mu}(z)$ сделано в статье [40].

Рассмотрим еще вопрос о выражении произведений функций Бесселя через другие функции Бесселя и интегралы от них.

12. *Произведения функций Бесселя.* Перемножим две функции Бесселя одного аргумента z , но разных порядков, затем соберем слагаемые с одинаковыми степенями z .

$$\begin{aligned}
J_\mu(z) J_\nu(z) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{(z/2)^{\mu+\nu+2m+2n}}{m!n!\Gamma(\mu+1+m)\Gamma(\nu+1+m)} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu+\nu+2r} \sum_{m=0}^r \frac{1}{m!(r-m)!\Gamma(\mu+1+m)\Gamma(\nu+1+r-m)} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^{\mu+\nu+2r} \frac{\Gamma(\mu+\nu+1+2r)}{r!\Gamma(\mu+1+r)\Gamma(\nu+1+r)\Gamma(\mu+\nu+1+r)}. \quad (103)
\end{aligned}$$

При переходе к последнему выражению было использовано следующее равенство:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^r \frac{1}{m!(r-m)!\Gamma(\mu+1+m)\Gamma(\nu+1+r-m)} = \quad (104) \\
&= \frac{F(-r, -r-\nu; \mu+1; 1)}{r!\Gamma(\nu+1+r)\Gamma(\mu+1)} = \frac{\Gamma(\mu+\nu+1+2r)}{r!\Gamma(\mu+1+r)\Gamma(\mu+1+r)\Gamma(\mu+\nu+1+r)}.
\end{aligned}$$

Значение гипергеометрической функции при аргументе 1 взято согласно (см. [3] или [9] 9.122)

$$F(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \quad (105)$$

13. *Два вспомогательных интеграла.* Получим выражения для двух интегралов, которые потребуются в разделе о магнито-тормозном излучении. Первый из них

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} J_\nu^2(yt) dt = \int_0^y J_{2\nu}(2y') dy' \left(\frac{1}{y'} - \frac{1}{y} \right). \quad (106)$$

Для вывода этой формулы в интеграл слева надо подставить (103) при $\mu = \nu$, взять интегралы по t , воспользоваться формулой удвоения для гамма-функции и разложить дробь с произведением

двух множителей в знаменателе на простейшие. Выполняя указанные действия последовательно, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} dt \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{y}{2}\right)^{2\nu+2r} \frac{\Gamma(2\nu+1+2r)t^{2\nu+2r}}{r!\Gamma^2(\nu+1+r)\Gamma(2\nu+1+r)} = \\
& = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \left(\frac{y}{2}\right)^{2\nu+2r} \frac{\Gamma(2\nu+1+2r)}{r!\Gamma^2(\nu+1+r)\Gamma(2\nu+1+r)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(\nu+r)}{\Gamma(\nu+r+3/2)} = \\
& = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r y^{2\nu+2r} \frac{1/2}{r!\Gamma(2\nu+1+r)(\nu+r)(\nu+r+1/2)} = \quad (107) \\
& = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r y^{2\nu+2r} \frac{1}{r!\Gamma(2\nu+1+r)} \left(\frac{1}{\nu+r} - \frac{1}{\nu+r+1/2} \right).
\end{aligned}$$

Последнее выражение есть разложение в ряд правой части (106).

Аналогично выводится и второй интеграл

$$\int_0^1 \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} J_{\nu}^{\prime 2}(yt) = \frac{1}{y} J_{2\nu}^{\prime}(2y) + \frac{1}{y} \int_0^y J_{2\nu}(2y') dy' - \frac{\nu^2}{y^2} \int_0^y J_{2\nu}(2y') \frac{dy'}{y'}. \quad (108)$$

Действительно, соотношение (41) позволяет интеграл с квадратом производной свести к интегралу от произведений бесселевых функций вида (103). Именно:

$$\begin{aligned}
J_{\nu}^{\prime 2}(z) &= \frac{1}{4} [J_{\nu-1}^2(z) + J_{\nu+1}^2(z) - 2J_{\nu-1}(z)J_{\nu+1}(z)] = \quad (109) \\
&= \frac{1}{4} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \left[\frac{\Gamma(2\nu-1+2r)4/z^2}{\Gamma^2(\nu+r)\Gamma(2\nu-1+r)} + \frac{\Gamma(2\nu+3+2r)z^2/4}{\Gamma^2(\nu+2+r)\Gamma(2\nu+3+r)} - \right. \\
&\quad \left. - 2 \frac{\Gamma(2\nu+1+2r)}{\Gamma(\nu+r)\Gamma(\nu+2+r)\Gamma(2\nu+1+r)} \right] \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+2r} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\Gamma(2\nu-1+2r)c(\mu, r)}{r!\Gamma(\nu+r)\Gamma(\nu+1+r)\Gamma(2\nu+1+r)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu+2r-2}.
\end{aligned}$$

где $c(\mu, r) = [(\nu+r)^2(\nu+r-1) + \nu^2/2]$. Подставим этот ряд в (106) при $z = yt$ и проделаем те же выкладки, что и в (107):

$$\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\Gamma(2\nu-1+2r)}{r!\Gamma(2\nu+1+r)} \left(\frac{y}{2}\right)^{2\nu+2r-2} \frac{c(\mu, r)}{\Gamma(\nu+1+r)} \frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\nu+r+1/2)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(\nu+r)^2 c(\mu, r)}{r! \Gamma(2\nu+1+r)} y^{2\nu+2r-2} \frac{\Gamma(\nu+r-1/2) \Gamma(\nu+r)}{\Gamma(\nu+r+1) \Gamma(\nu+r+1/2)} = \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r y^{2\nu+2r-2}}{r! \Gamma(2\nu+1+r)} \left[\nu+r - \frac{r(2\nu+r)}{2\nu+2r-1} - \frac{\nu^2}{2\nu+2r} \right]. \quad (110)
\end{aligned}$$

Опять последний ряд представляет собой разложение правой части (108).

14. *Ряды бесселевых функций.* Для проверки ряда соотношений теории спектра магнито-тормозного излучения необходимо иметь формулы, представляющие ряды бесселевых функций следующего вида:

$$\mathcal{J}_{kn}(\beta) = \sum_{l=1}^{\infty} l^k J_{2l}^{(n)}(2l\beta), \quad |\beta| < 1. \quad (111)$$

Для вывода таких сумм начнем с суммы по всем l от самой функции Бесселя $J_l(\beta l)$, подставив вместо нее ее интегральное представление (33):

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il(\beta \sin \varphi - \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \pi \delta \left(\sin \frac{\beta \sin \varphi - \varphi}{2} \right). \quad (112)$$

Здесь было использовано равенство

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\beta} = \pi \delta \left(\sin \frac{\beta}{2} \right), \quad (113)$$

которое выводится при помощи следующей выкладки:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{il\beta} &= \lim_{q \rightarrow 1-0} \sum_{l=-\infty}^{\infty} q^{|l|} e^{il\beta} = \lim_{q \rightarrow 1-0} \left[\sum_{l=0}^{\infty} (q^l e^{il\beta} + q^l e^{-il\beta}) - 1 \right] = \\
&= \lim_{q \rightarrow 1-0} \left(\frac{1}{1 - q e^{i\beta}} + \frac{1}{1 - q e^{-i\beta}} - 1 \right) = \lim_{q \rightarrow 1-0} \frac{1 - q^2}{1 + q^2 - 2q \cos \beta} = \\
&= \lim_{q \rightarrow 1-0} \frac{1+q}{2\sqrt{q}} \frac{(1-q)/2\sqrt{q}}{[(1-q)/2\sqrt{q}]^2 + \sin^2 \beta/2} = \lim_{s \rightarrow +0} \frac{s}{s^2 + \sin^2 \beta/2}. \quad (114)
\end{aligned}$$

Предел последней дроби и равен правой части (113).

Аргумент дельта-функции обращается в нуль только при $\varphi=0$, причем поскольку $\beta < 1$, эта функция имеет однозначную обратную на промежутке $[-\pi, \pi]$, а ее производная равна $\cos \frac{\beta \sin \varphi - \varphi}{2} \frac{1 - \beta \cos \varphi}{2}$ и обращается в $\frac{1 - \beta}{2}$ при $\varphi = 0$. По применимому к нашему случаю свойству дельта-функции $\delta(\phi(x)) = \delta(x - x_0)/|\phi'(x_0)|$ имеем

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} J_l(\beta l) = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{1 - \beta^2} + \frac{\beta}{1 - \beta^2} = \gamma^2 + \beta\gamma^2, \quad (115)$$

где разделены четная и нечетная по β части суммы и использовано обозначение $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$.

Теперь разделим четные и нечетные l . Ясно, что четные слагаемые суммы составляют четную часть по β , а нечетные — нечетную часть суммы. В четной части все слагаемые входят дважды (с положительными и отрицательными l), а нулевое — один раз. Поэтому

$$\sum_{l=0}^{\infty} J_{2l+1}((2l+1)\beta) = \frac{\beta\gamma^2}{2}, \quad \mathcal{J}_{00}(\beta) = \sum_{l=1}^{\infty} J_{2l}(2l\beta) = \frac{1}{2}(\gamma^2 - 1) = \frac{\beta^2\gamma^2}{2}. \quad (116)$$

Дифференцируя последнее равенство два раза, получаем еще две суммы

$$\mathcal{J}_{11}(\beta) = \sum_{l=1}^{\infty} l J'_{2l}(2l\beta) = \frac{\beta\gamma^4}{2}, \quad \mathcal{J}_{22}(\beta) = \sum_{l=1}^{\infty} l^2 J''_{2l}(2l\beta) = \frac{1 + 3\beta^2}{4} \gamma^6. \quad (117)$$

Наконец, воспользовавшись дифференциальным уравнением (24), записанным в виде

$$4l^2 \beta^2 J''_{2l}(2l\beta) + 2l\beta J'_{2l}(2l\beta) + 4l^2(1 - \beta^2) J_{2l}(2l\beta) = 0, \quad (118)$$

и просуммировав его по l с учетом (117), найдем

$$\mathcal{J}_{20}(\beta) = \sum_{l=1}^{\infty} l^2 J_{2l}(2l\beta) = \frac{1 + \beta^2}{2} \beta^2 \gamma^8. \quad (119)$$

Еще две полезные суммы содержат квадраты функций Бесселя и их производных. Сначала выразим эти квадраты через интеграл

от функций Бесселя двойного порядка. Воспользуемся интегральным представлением (33). Перемножив два интеграла, сумму синусов заменим на произведение синуса и косинуса:

$$J_l^2(z) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-2\pi}^{2\pi} d\varphi' \exp \left\{ i \left[2z \sin \left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi' - \varphi}{2} \right) - l(\varphi + \varphi') \right] \right\}. \quad (120)$$

После этого сделаем замены $\psi' = (\varphi + \varphi')/2$ и $\psi = \varphi' - \varphi$. Поскольку при целых l подинтегральная функция периодическая, то при такой замене все равно по какому периоду интегрировать, так что

$$J_l^2(z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \int_{-\pi}^{\pi} d\psi' e^{i(2z \cos \psi \sin \psi' - 2l\psi')} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\psi J_{2l}(2z \cos \psi). \quad (121)$$

Полученное равенство согласуется с разложением (103) при $\mu = \nu = l$. Однако, следует заметить, что указанное разложение верно при любых индексах функций, в то время как (121), а также и все последующие соотношения, — только при целых. Второе равенство связано с производной

$$J_l'(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi e^{i(z \sin \varphi - l\varphi)} d\varphi. \quad (122)$$

Ее квадрат

$$\begin{aligned} J_l'^2(z) &= \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{-2\pi}^{2\pi} d\varphi' \exp \left\{ i \left[2z \sin \left(\frac{\varphi + \varphi'}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi' - \varphi}{2} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - l(\varphi + \varphi') \right] \right\} [\cos(\varphi' + \varphi) - \cos(\varphi' - \varphi)] = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\psi}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i[2z \sin \psi' \cos \psi - 2l\psi']} \times \\ &\quad \times [\cos 2\psi' - \cos 2\psi] d\psi' = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} d\psi [\sin^2 \psi J_{2l}(2z \cos \psi) + J_{2l}''(2z \cos \psi)]. \quad (123) \end{aligned}$$

Можно проверить, что и это интегральное представление согласуется с разложением (25) при целых $\nu = l$.

Теперь просуммируем полученные интегральные представления по l . Сумма от квадрата функций (121)

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} l^2 J_l^2(l\beta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\psi \mathcal{J}_{20}(\beta \cos \psi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\beta^2 \cos^2 \psi d\psi}{(1-\beta^2 \cos^2 \psi)^4} [1+\beta^2 \cos^2 \psi] = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\psi \left[\frac{1}{(1-\beta^2 \cos^2 \psi)^2} - \frac{3}{(1-\beta^2 \cos^2 \psi)^3} + \frac{2}{(1-\beta^2 \cos^2 \psi)^4} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} [V_2(\beta) - 3V_3(\beta) + 2V_4(\beta)] = \frac{\beta^2(4+\beta^2)}{16} \gamma^7. \end{aligned} \quad (124)$$

Сумма от квадрата производных (123)

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} l^2 J_l'^2(l\beta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\psi [\sin^2 \psi \mathcal{J}_{20}(\beta \cos \psi) + \mathcal{J}_{22}(\beta \cos \psi)] = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\psi \left[\frac{\sin^2 \psi}{2} \frac{1+\beta^2 \cos^2 \psi}{(1-\beta^2 \cos^2 \psi)^4} \beta^2 \cos^2 \psi + \frac{1}{4} \frac{1+3\beta^2 \cos^2 \psi}{(1-\beta^2 \cos^2 \psi)^3} \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{V_1(\beta) - 3V_2(\beta) + 2V_3(\beta)}{2\beta^2} + \frac{V_2(\beta) - 3V_3(\beta) + 2V_4(\beta)}{2\beta^2 \gamma^2} + V_3(\beta) - \frac{3}{4} V_2(\beta) \right). \end{aligned} \quad (125)$$

Окончательно

$$\sum_{l=1}^{\infty} l^2 J_l'^2(l\beta) = \frac{4+3\beta^2}{16} \gamma^5. \quad (126)$$

15. *Два соотношения.* В теории синхротронного излучения используются два соотношения (125) и (126), приведенные нами в основном тексте Главы 3. Они были выведены в работе [97], причем с весьма вольным обращением с расходящимися интегралами, а иногда и с применением неточных формул. Однако выведенные формулы верны. Мы здесь их докажем с помощью интегрального преобразования Меллина. Для этого надо воспользоваться интегралами под номерами 2.16.2.2., 1.16.33.2. из справочника [45] и интегралом 2.4.4.4. из [44]:

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} K_{\nu}(x) dx = 2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu}{2}\right), \quad (127)$$

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} K_{\nu}^2(x) dx = \frac{2^{\mu-3}}{\Gamma(\mu)} \Gamma^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} + \nu\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{2} - \nu\right), \quad (128)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\chi}{\operatorname{ch}^{\nu} \chi} = \frac{2^{\nu-2}}{\Gamma(\nu)} \Gamma^2\left(\frac{\nu}{2}\right). \quad (129)$$

Преобразования от правых частей равенств, объединенные в одно: $\tilde{\mathcal{A}}_{3/2 \mp 1/2}(\mu) =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} x^{\mu-1} \mathcal{A}_{3/2 \mp 1/2}(x) dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \int_0^{\infty} dx \left[K_{5/3}(x) \frac{x^{\mu-1}}{\mu-1} \mp x^{\mu-2} K_{2/3}(x) \right] = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} \left[\frac{2^{\mu-2}}{\mu-1} \Gamma\left(\frac{3\mu+5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-5}{6}\right) \mp 2^{\mu-3} \Gamma\left(\frac{3\mu-1}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-5}{6}\right) \right] = \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}} 2^{\mu-3} \Gamma\left(\frac{3\mu-5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-1}{6}\right) \left(\frac{\mu-1/3}{\mu-1} \mp 1\right). \quad (130) \end{aligned}$$

Преобразования от левых частей равенств представляются интегралами

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_1(\mu) &= 2 \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2) \int_0^{\infty} x^{\mu-1} dx K_{1/3}^2\left(\frac{x}{2}(1 + \varepsilon^2)^{3/2}\right) = \\ &= 2 \int_0^{\infty} d\varepsilon \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2) \frac{2^{\mu-3}}{\Gamma(\mu)} \left[\frac{(1 + \varepsilon^2)^{3/2}}{2}\right]^{-\mu} \Gamma^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu+2}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-2}{6}\right) = \\ &= \frac{2^{2\mu-2}}{\Gamma(\mu)} \Gamma^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu+2}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-2}{6}\right) \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^{3\mu/2-1}}, \quad (131) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}_2(\mu) &= 2 \int_0^{\infty} d\varepsilon (1 + \varepsilon^2)^2 \int_0^{\infty} x^{\mu-1} dx K_{2/3}^2\left(\frac{x}{2}(1 + \varepsilon^2)^{3/2}\right) = \\ &= 2 \int_0^{\infty} d\varepsilon (1 + \varepsilon^2)^2 \frac{2^{\mu-3}}{\Gamma(\mu)} \left[\frac{(1 + \varepsilon^2)^{3/2}}{2}\right]^{-\mu} \Gamma^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu+4}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-4}{6}\right) = \\ &= \frac{2^{2\mu-2}}{\Gamma(\mu)} \Gamma^2\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu+4}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-4}{6}\right) \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{(1 + \varepsilon^2)^{3\mu/2-2}}. \quad (132) \end{aligned}$$

Интегралы по ε берутся подстановкой $\varepsilon = \operatorname{sh} \chi$ и равны соответственно

$$\int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^2 d\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^{3\mu/2-1}} = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}^2 \chi - 1}{\operatorname{ch}^{3\mu-3} \chi} d\chi = \frac{2^{3\mu-7}}{\Gamma(3\mu-5)} \Gamma^2\left(\frac{3\mu-5}{2}\right) -$$

$$- \frac{2^{3\mu-5}}{\Gamma(3\mu-3)} \Gamma^2\left(\frac{3\mu-3}{2}\right) = \frac{2^{3\mu-7}}{\Gamma(3\mu-5)} \Gamma^2\left(\frac{3\mu-5}{2}\right) \frac{1}{3\mu-4}, \quad (133)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon}{(1+\varepsilon^2)^{3\mu/2-2}} = \int_0^{\infty} \frac{d\chi}{\operatorname{ch}^{3\mu-3} \chi} = \frac{2^{3\mu-7}}{\Gamma(3\mu-5)} \Gamma^2\left(\frac{3\mu-5}{2}\right). \quad (134)$$

Окончательно, должны выполняться соотношения

$$\tilde{\mathcal{A}}_1(\mu) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} 2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{3\mu-5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-1}{6}\right) \frac{1/3}{\mu-1} =$$

$$= \frac{2^{5\mu-9} \Gamma^2\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma(\mu) \Gamma(3\mu-5)} \Gamma\left(\frac{3\mu+4}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-4}{6}\right) \Gamma^2\left(\frac{3\mu-5}{2}\right), \quad (135)$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_2(\mu) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} 2^{\mu-2} \Gamma\left(\frac{3\mu-5}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-1}{6}\right) \frac{\mu-2/3}{\mu-1} =$$

$$= \frac{2^{5\mu-9} \Gamma^2\left(\frac{\mu}{2}\right)}{\Gamma(\mu) \Gamma(3\mu-5) (3\mu-4)} \Gamma\left(\frac{3\mu+2}{6}\right) \Gamma\left(\frac{3\mu-2}{6}\right) \Gamma^2\left(\frac{3\mu-5}{2}\right). \quad (136)$$

Доказательство справедливости равенств (135)–(136) осуществляется при помощи формул удвоения и утроения для гамма-функции (15) и (16). Все преобразования имеют смысл при $\mu > 5/3$.

Приложение В. Некоторые вспомогательные интегралы

1. *Интегралы по зенитному расстоянию.* В теории встречаются такие интегралы двух видов.

а. Интегралы по полному промежутку:

$$I_{mn}(\beta) = \int_0^{\pi} \frac{\sin \vartheta \cos^m \vartheta d\vartheta}{(1-\beta \cos \vartheta)^n} = \int_{-1}^1 \frac{\eta^m}{(1-\beta \eta)^n} d\eta. \quad (137)$$

Для этих интегралов легко получить следующие рекуррентные соотношения

$$I_{m\ n}(\beta) = \frac{I_{m-1\ n}(\beta) - I_{m-1\ n-1}(\beta)}{\beta}, \quad I'_{m\ n}(\beta) = n I_{m+1\ n+1}(\beta). \quad (138)$$

Интегралы с нечетным первым индексом пропорциональны β , множители у них при β , как и интегралы с четным первым индексом, являются четными функциями β .

Приведем значения этих интегралов для первых натуральных чисел, опустив их аргумент: $I_{0\ 2} = 2\gamma^2$, $I_{0\ 3} = 2\gamma^4$,

$$\begin{aligned} I_{0\ 4} &= \frac{2}{3}(3 + \beta^2)\gamma^6, \quad I_{0\ 5} = 2(1 + \beta^2)\gamma^8, \quad I_{0\ 6} = \frac{2}{5}(5 + 10\beta^2 + \beta^4)\gamma^{10}, \\ I_{1\ 3} &= 2\beta\gamma^4, \quad I_{1\ 4} = \frac{8}{3}\beta\gamma^6, \quad I_{1\ 5} = \frac{2}{3}\beta(5 + \beta^2)\gamma^8, \quad (139) \\ I_{2\ 4} &= \frac{2}{3}(1 + 3\beta^2)\gamma^6, \quad I_{2\ 5} = \frac{2}{3}(1 + 5\beta^2)\gamma^8, \quad I_{3\ 5} = 2\beta(1 + \beta^2)\gamma^8, \\ I_{1\ 6} &= \frac{4}{5}\beta(5 + 3\beta^2)\gamma^{10}, \quad I_{2\ 6} = \frac{2}{15}(5 + 38\beta^2 + 5\beta^4)\gamma^{10}. \end{aligned}$$

Здесь через γ обозначен лоренцевский множитель, если считать, что β — это скорость. Приведем также производную от него:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \frac{d\gamma}{d\beta} = \beta\gamma^3. \quad (140)$$

Удобно иметь следующие комбинации интегралов:

$$I_{0\ 5} - I_{2\ 5} = 4\gamma^6/3, \quad I_{1\ 5} - I_{3\ 5} = 4\beta\gamma^6/3. \quad (141)$$

б. Четные по β интегралы:

$$I_{n,m}(\beta) = \int_0^1 \frac{\eta^{2m}}{(1 - \beta^2\eta^2)^n} d\eta. \quad (142)$$

Аналогично предыдущему пункту получаются рекуррентные соотношения

$$I_{n,m} = \frac{I_{n,m-1} - I_{n-1,m-1}}{\beta^2}, \quad I'_{n,m}(\beta) = 2\beta n I_{n+1,m+1}(\beta), \quad (143)$$

$$I_{n,m} = \frac{\gamma^{2(n-1)} - (2m-1)I_{n-1,m-1}}{2(n-1)\beta^2}, \quad I_{n,0} = \frac{\gamma^{2(n-1)} + (2n-3)I_{n-1,0}}{2(n-1)}. \quad (144)$$

Опять приведем выражения для интегралов с небольшими значениями индексов:

$$I_{0,m} = \frac{1}{2m+1}, \quad I_{1,0} = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{1+\beta}{1-\beta}, \quad I_{1,1} = \frac{I_{1,0}-1}{\beta^2}, \quad (145)$$

$$I_{2,0} = \frac{1}{2} [\gamma^2 + I_{1,0}], \quad I_{2,1} = \frac{1}{2\beta^2} [\gamma^2 - I_{1,0}], \quad (146)$$

$$I_{2,2} = \frac{1}{2\beta^4} [\gamma^2 + 2 - 3I_{1,0}]. \quad (147)$$

2. *Интегралы* $U_n(\beta)$. Это интегралы вида

$$U_n(\beta) = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1 - \beta \cos \varphi)^n}. \quad (148)$$

Взяв производную, получим рекуррентное соотношение

$$U_{n+1}(\beta) = U_n(\beta) + \frac{\beta}{n} U_n'(\beta), \quad n \geq 1. \quad (149)$$

Первые такие интегралы: $U_0(\beta) = \pi$, $U_1(\beta) = \pi\gamma$, $U_2(\beta) = \pi\gamma^3$,

$$U_3(\beta) = \frac{\pi}{2}(2+\beta^2)\gamma^5, \quad U_4(\beta) = \frac{\pi}{2}(2+3\beta^2)\gamma^7, \quad U_5(\beta) = \pi \left(1+3\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4\right) \gamma^7. \quad (150)$$

3. *Интегралы* $V_n(\beta)$. Эти, несколько отличающиеся от предыдущих интегралы сводятся к ним:

$$\begin{aligned} V_n(\beta) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 - \beta^2 \cos^2 \varphi)^n} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{[1 - \beta^2(1 + \cos 2\varphi)/2]^n} = \\ &= \frac{1}{2(1-\beta^2/2)^n} \int_0^\pi \frac{d\psi}{(1 - \beta^2 \cos^2 \psi / (2 - \beta^2))^n} = \frac{U_n \left(\frac{\beta^2}{1-\beta^2} \right)}{2(1-\beta^2/2)^n}. \end{aligned} \quad (151)$$

Входящая в выражения для интегралов (150) и ниже величина $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$.

Для этих интегралов выполняется похожее на (149) рекуррентное соотношение

$$V_{n+1}(\beta) = V_n(\beta) + \frac{\beta}{2n} V_n'(\beta). \quad (152)$$

Первые интегралы рассматриваемого вида: $V_0(\beta) = \pi/2$,
 $V_1(\beta) = \pi\gamma/2$,

$$V_2(\beta) = \frac{\pi}{4}(2 - \beta^2)\gamma^3, \quad V_3(\beta) = \frac{\pi}{16}(8 - 8\beta^2 + 3\beta^4)\gamma^5, \quad (153)$$

$$V_4(\beta) = \frac{\pi}{32}(16 - 24\beta^2 + 18\beta^4 - 5\beta^6)\gamma^7. \quad (154)$$

4. *Интегралы с тремя индексами:*

$$I_{p m n} = \int_0^{\infty} \frac{v^m dv}{(1 + v^p)^n}. \quad (155)$$

Эти интегралы заменой переменной интегрирования $y = 1/(1 + v^p)$ сводятся к бета-функции:

$$I_{p m n} = \frac{1}{p} B\left(n - \frac{m+1}{p}, \frac{m+1}{p}\right) = \frac{1}{p\Gamma(n)} \Gamma\left(n - \frac{m+1}{p}\right) \Gamma\left(\frac{m+1}{p}\right). \quad (156)$$

5. *Гиперболические интегралы.* Интегралы вида

$$\mathcal{V}_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi}{(\operatorname{ch} \chi - x)^n}, \quad |x| < 1, \quad (157)$$

где n — натуральное число, можно получить путем дифференцирования по x исходного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi}{\operatorname{ch} \chi - x} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin x\right), \quad (158)$$

который вычисляется подстановкой $\chi = \ln(x + \sqrt{1-x^2})$. В результате после замены $x = 1/\varepsilon$ найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\chi}{(\varepsilon \operatorname{ch} \chi - 1)^3} = \frac{3}{(\varepsilon^2 - 1)^2} + \frac{\varepsilon^2 + 2}{(\varepsilon^2 - 1)^{5/2}} \left(\frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (159)$$

Заключение

В учебном пособии подробно рассмотрены основные механизмы излучения, связанные с объектами, изучаемыми главным образом астрофизикой высоких энергий и часто называемыми релятивистскими. Изучаются как тепловые — тормозной и рекомбинационный механизмы, а также комптоновское рассеяние тепловыми электронами и процессы с тепловым электрон-позитронным газом, так и нетепловые процессы — магнитно-тормозное, в том числе синхротронное излучение. В целом можно сказать, что главы, посвященные отдельным процессам, расположены в порядке возрастания энергии участвующих в этих процессах частиц и фотонов.

Во всех главах, кроме одной, излучение считается возникающим в свободном пространстве. Особняком стоит глава IV, где описываются черенковское и переходное излучение, происходящее в средах.

Основные усилия были направлены на получение формул для величин, позволяющих найти такие характеристики процессов как излучательная способность вещества и сечения поглощения, которые в теории переноса излучения называются коэффициентами излучения и поглощения, а в случае рассеяния также функции перераспределения излучения по частоте и направлениям. Находились также средние частоты излучаемых фотонов.

Только в главе V приводятся решения кинетических уравнений, описывающих многократное взаимодействие (рассеяние). В остальных дается описание однократных процессов. Рассматривается в пособии только излучение, процессы релаксации частиц не затрагиваются, хотя эти процессы необходимо учитывать при самосогласованном решении задач о взаимодействии частиц с фотонным газом. Однако обращение к таким задачам сильно увеличило бы объем книги и изменило бы ее характер.

Рассмотренные квантовые процессы относятся к процессам второго порядка по взаимодействию. Процессы третьего порядка, такие как двойной эффект Комптона и трехфотонные процессы с парами, рассматривались в литературе, например, в работах [90, 88]. Однако эти процессы имеют, как правило, значительно меньшую вероятность осуществления и могут быть изучены после освоения более простых и более значимых.

В книге много формул, большинство из них не приводится в

готовом виде, а подробно выводится из других формул, известных из физики или математики. При этом глубина вывода этих формул различна. Формулы, основанные на классической электродинамике, выводятся, так сказать, от первых начал, т. е. исходя из уравнений Максвелла. В то же время сечения процессов, описываемых квантовой электродинамикой, берутся из соответствующих руководств и приспособляются к применению в астрофизике. В приложениях даются сведения о математике, используемой в промежуточных выкладках.

В связи с этим можно сказать, что книга предназначена в первую очередь астрофизикам, студентам, аспирантам и молодым научным сотрудникам, причисляющим себя к теоретикам. Однако и для занимающихся наблюдениями и их интерпретацией или готовящихся к такой деятельности, книга будет полезна, так как конечные, достаточно простые формулы с подробным пояснением их физического смысла в ней содержатся. Автор надеется, что и физики-теоретики смогут найти в книге полезный для себя материал как применение физических результатов в смежной науке.

Автор благодарен редактору книги В. К. Дубровичу, замечания которого способствовали улучшению текста и, в частности, уточнению физической терминологии. Особую благодарность выражаю Ю. Й. Поутанену за внимательное прочтение рукописи и многочисленные полезные замечания.

Книга написана при частичной поддержке ведущей научной школы НШ-8542.2006.2 и гранта РФФИ 06-02-17096а.

Список литературы

- [1] Арутюнян Г. А., Джрбашян В. А., Никогосян А. Г. Энергетические потери при рассеянии фотонов свободными электронами // *Астрофизика* 1988, Т. 29, N 1, 119–131.
- [2] Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. *Квантовая электродинамика*. М., Наука, 2002, 719 с.
- [3] Бейтман Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции*. М., Наука, т. I, 1973, 295 с.; т. II, 1974, 296 с.
- [4] Бекефи Дж. *Радиационные процессы в плазме*. М., Мир, 1971, 438 с.
- [5] Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. *Курс теоретической физики, том IV. Квантовая электродинамика*. М., Физматлит, 2006, 720 с.
- [6] Бете Г., Солпитер Э. *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами*. М., Физматгиз, 1960, 562 с.
- [7] Гинзбург В. Л. *Теоретическая физика и астрофизика*. М., Наука, 1987, 488 с.
- [8] Гинзбург В. Л., Франк И. М. Излучение равномерно движущегося электрона, возникающее при его переходе из одной среды в другую // *Журн. exper. теор. физ.* 1946. Т. 16. N 1. С. 15–28.
- [9] Градштейн И. С., Рыжик И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М., Наука, 1108 с.
- [10] Евграфов М. А. *Аналитические функции*. М., Наука, 1965, 424 с.
- [11] Железняков В. В. *Излучение в астрофизической плазме*. М., Янус-К, 1997, 528 с.
- [12] Завлин В. Е., Шибанов Ю. А. Комптонизация рентгеновского излучения в плазме аккрецирующих нейтронных звезд // *Астрон. журн.* 1989. Т. 66. N 5. С. 983–995.
- [13] Зельдович Я. Б. Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением // *Успехи физ. наук.* 1975. Т. 115. N 2. С. 161–197.
- [14] Зельдович Я. Б., Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Влияние выделения энергии на спектр излучения в горячей Вселенной // *Журн. exper. теор. физ.* 1972. Т. 62. N 4. С. 1217–1227.
- [15] Зельдович Я. Б., Левич Е. В. Бозе-конденсация и ударные волны в спектре фотонов // *Журн. exper. теор. физ.* 1968. Т. 55. N 6. С. 2423–2429.
- [16] Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. *Строение и эволюция Вселенной*. М.: Наука, 1975, 736 с.

- [17] Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Наука, 1966, 688 с.
- [18] Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Межгалактический газ в скоплениях галактик, микроволновое фоновое излучение и космология. Астрофизика и космическая физика. М.: Наука, 1982. С. 9–65.
- [19] Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комптон-эффект на тепловых электронах в источниках рентгеновского излучения // Астрон. журн. 1972. Т. 49. N 1. С. 58–73.
- [20] Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комптонизация, характерные спектры и тепловой баланс разреженной плазмы // Астрон. журн. 1974. Т. 51. N 4. С. 698–711.
- [21] Илларионов А. Ф., Сюняев Р. А. Комптонизация, спектр реликтового излучения и тепловая история Вселенной // Астрон. журн. 1974. Т. 51. N 6. С. 1162–1176.
- [22] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., Наука, 1965, 704 с.
- [23] Каплан С. А., Пикельнер С. Б. Межзвездная среда. М., Наука, 1963, 532 с.
- [24] Каплан С. А., Пикельнер С. Б. Физика межзвездной среды. М., Наука, 1979, 592 с.
- [25] Каплан С. А., Цитович В. Н.. Плазменная астрофизика. М., Наука, 1973, 440 с.
- [26] Кардашев Н. С. О возможности обнаружения разрешенных линий атомарного водорода в радиодиапазоне // Астрон. журн. 1959. Т. 36. N 5. С. 838–844.
- [27] Компанец А. С. Об установлении теплового равновесия между квантами и электронами // Журн. exper. теор. физ. 1956. Т. 31. N 5. С. 876–885.
- [28] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики, том II. Теория поля. М., Физматлит, 2006, 533 с.
- [29] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Курс теоретической физики, том V. Статистическая физика, ч. 1. М., Физматлит, 2005, 616 с.
- [30] Левич Е. В., Сюняев Р. А. Нагрев газа вблизи квазаров, ядер сейфертовских галактик и пульсаров низкочастотным излучением // Астрон. журн. 1971. Т. 48. N 3. С. 461–470.
- [31] Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М., Мир, 1980, 608 с.
- [32] Михалас Д. Звездные атмосферы. Т. 1. М., Мир, 1982, 352 с.

- [33] Нагирнер Д. И. Рассеяние пространственно однородного изотропного излучения на холодном электронном газе // *Астрофизика*. 1984. Т. 20. N 1. С. 149–156.
- [34] Нагирнер Д. И. Двухфотонные процессы рождения и аннигиляции электрон–позитронных пар. I. Кинематика и сечения процессов // *Астрофизика*. 1999. Т. 42. N 1. С. 101–118.
- [35] Нагирнер Д. И. Лекции по теории переноса излучения. СПб, Изд. СПбГУ, 2002, 284 с.
- [36] Нагирнер Д. И., Кикец Е. В., Поутанен Ю. Й. Однократное комптоновское рассеяние // *Уч. зап. Ленингр. ун-та*. 1991. N 427. (Труды Астрон. обсерв. ЛГУ. Т. 43). С. 28–70.
- [37] Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М. Функция Грина линейного уравнения Компанейца // *Астрофизика*. 1997. Т. 40. N 1. С. 97–116.
- [38] Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М. Двухфотонные процессы рождения и аннигиляции электрон–позитронных пар. II. Кинетическое уравнение для фотонов // *Астрофизика*. 1999. Т. 42. N 2. С. 275–294.
- [39] Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М. Коэффициент комптоновского ослабления при рассеянии максвелловскими электронами // *Астрофизика*. 2000. Т. 43. N 3. С. 473–482.
- [40] Нагирнер Д. И., Лоскутов В. М., Грачев С. И. Точные и численные решения уравнения Компанейца: эволюция спектра и средних частот // *Астрофизика*. 1997. Т. 40. N 3. С. 349–364.
- [41] Никитин А. А., Рудзикас З. Б. Основы теории спектров атомов и ионов. М., Наука, 1983, 320 с.
- [42] Поздняков Л. А., Соболев И. М., Сюняев Р. А. Комптонизация и формирование спектров рентгеновских источников. Методика расчетов методом Монте-Карло // *Итоги науки и техники. Сер. Астрономия*. М.: ВИНТИ, 1982. Т. 21. С. 238–307.
- [43] Поздняков Л. А., Соболев И. М., Сюняев Р. А. Комптонизация и формирование спектров рентгеновских источников. II // *Итоги науки и техники. Сер. Астрономия*. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 31. С. 267–331.
- [44] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., Наука, 1981, 800 с.
- [45] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., Наука, 1983, 752 с.
- [46] Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964, 777 с.
- [47] Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. М., Наука, 1971, 332 с.

- [48] Соболев В. В. Введение в теорию атомных спектров. М., Наука, 1977, 319 с.
- [49] Соболев В. В. Курс теоретической астрофизики. М., Наука, 1985, 504 с.
- [50] Соколов А. А., Гальцов Д. В., Колесникова М. М. Точный вывод формулы для синхротронного излучения // Известия высших учебных заведений. Физика. 1971. N 4. С. 14–24.
- [51] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. М., Наука, 1983, 304 с.
- [52] Сороченко Р. Л., Гордон М. А. Рекомбинационные радиолнии: физика и астрономия. М., Физматгиз, 2003, 391 с.
- [53] Уиттекер Э. Е., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. II. М., Физматгиз, 1963, 516 с.
- [54] Физика космоса. Маленькая энциклопедия. Ред. Р. А. Сюняев. М., Советская энциклопедия, 1986, 784 с.
- [55] Шкловский И. С. Проблема космического радиоизлучения // Астрон. журн. 30, N 1, 15–30, 1953.
- [56] Babuel-Peyrissac J.P., Rouvillois G. Radiative transfer in an LTE atmosphere: an integral kernel formulation of the Compton scatter source term // J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 1970. Vol. 10. N 12. P. 1277–1290.
- [57] Barboza D.D. A note on Compton scattering // Astrophys. J. 1982. Vol. 254. N 1. P. 301–308.
- [58] Björnsson G., Svensson R. Hot pair-dominated accretion disks // Astrophys. J. 1992. Vol. 394. N 2. P. 500–514.
- [59] Charles Ph. Black holes in our Galaxy: observation // Theory of Black Holes Accretion Discs / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P. 1–21.
- [60] Cherry T. M. Uniform asymptotic expansions // J. London Math. Soc. 1949. Vol. 24. P. 121–130.
- [61] Churazov E., Sunyaev R., Sazonov S., Revnivtsev M., Varshalovich D. Positron annihilation spectrum from the Galactic Center region observed by SPI/INTEGRAL // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2003. Vol. 357. N 4. P. 1377–1386.
- [62] Dermer C. D., Sturmer S. J., Schlickeiser R. Nonthermal Compton and synchrotron processes in jets of active galactic nuclei // Astrophys. J. Suppl. Ser. 1997. Vol. 109. N 1. P. 103–137.

- [63] Dolgov A. D., Doroshkevich A. G., Novikov D. I., Novikov I. D. Classification of singular points in polarization field of cosmic microwave background and eigenvectors of Stokes matrix // Письма в журн. эксперим. теор. физ. 1999. Т. 69. N 6. С. 395–401.
- [64] Frank J., King A., Raine D. *Accretion Power in Astrophysics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 294 p.
- [65] Ghisellini G. Pair production in steady synchrotron self-Compton models // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1989. Vol. 238. N 2. P. 449–479.
- [66] Ghisellini G., Haardt F., Svensson R. Thermalization by synchrotron absorption in compact sources: electron and photon distributions // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1998. Vol. 297. N 2. P. 348–354.
- [67] Ginzburg V. L., Syrovatskii S. I. Developments in the theory of synchrotron radiation and its reabsorption // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1969. Vol. 7. P. 375–420.
- [68] Gould R. J., Schreder G. P. Pair production in photon-photon collisions // *Phys. Rev.* 1967. Vol. 155. N 5. P. 1404–1407.
- [69] Guilbert P. W. Compton heating and cooling in thermal electron gases // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1986. Vol. 218. N 1. P. 171–175.
- [70] Maciolek-Niedzwiecki A., Zdziarski A. A., Coppi P. S. Electron-positron pair production and annihilation spectral features from compact sources. // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1995. Vol. 276. N 1. P. 273–282.
- [71] Madej J., Rożańska A. X-ray irradiated model stellar atmospheres. II. Comprehensive treatment of Compton scattering // *Astron. Astrophys.* 2000. Vol. 363. P. 1055–1064.
- [72] Madejski G. M. Black holes in active galactic nuclei: observation // *Theory of Black Holes Accretion Discs* / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. P. 22–40.
- [73] Marscher A. P., Gear W. K. Models for high-frequency radio outbursts in extragalactic sources, with application to the early 1983 millimetre-to-infrared flare of 3C 273 // *Astrophys. J.* 1985. Vol. 298. N 1. P. 114–127.
- [74] Menzel D. Physical processes in gaseous nebulae. I. Absorption and emission of radiation // *Astrophys. J.* 1937. V. 85. N 4. P. 330–339. (Русский перевод: Д. Мензел. Поглощение и излучение света в условиях газовых туманностей. С. 9 в сб. “Физические процессы в газовых туманностях”, под ред. Д. Мензела и др. ИЛ. 1948.)
- [75] Mirabel I. F., Rodríguez L. F. Sources of relativistic jets in the Galaxy // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1999. Vol. 37. P. 409–443.

- [76] Molnar S.M., Birkinshaw M. Inverse Compton scattering in mildly relativistic plasma // *Astrophys. J.* 1999. Vol. 523. N 1. P. 78–86.
- [77] Moskalenko I. V., Strong A. W. Anisotropic inverse Compton scattering in the Galaxy // *Astrophys. J.* 2000. Vol. 528. N 1. P. 357–367.
- [78] Nagirner D.I., Poutanen J. Single Compton scattering // *Astrophys. Space Phys. Rev.* 1994. Vol. 9. P. 1–80.
- [79] Peterson B. M. *An Introduction to Active Galactic Nuclei.* Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 238 p.
- [80] Poutanen J. Accretion disc-corona models and X/ γ -ray spectra of accreting black holes // *Theory of Black Holes Accretion Discs* / Eds. M. A. Abramowicz, G. B. Björnsson, J. E. Pringle. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. P. 100–122.
- [81] Poutanen J., Svensson R. The two-phase pair corona model for active galactic nuclei and X-ray binaries: how to obtain exact solutions // *Astrophys. J.* 1996. Vol. 470. N 1. P. 249–268.
- [82] Puy D., Grenacher L., Jetzer Ph., Signore M. Asphericity of galactic clusters and Sunyaev–Zel’dovich effect // *Astron. Astrophys.* 2000. Vol. 363. 415–424.
- [83] Rephaeli Y. Comptonization of the cosmic microwave background: the Sunyaev–Zeldovich effect // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* 1995. Vol. 33. P. 541–579.
- [84] Rybicki G. B., Lightman A. P. *Radiative processes in astrophysics.* Wiley-Interscience. John Wiley & Sons. N. Y. 1979. 382 p.
- [85] Shestakov A. I., Kershaw D. S., Prasad M. K. Evaluation of integral of Compton scattering cross-section // *J. Quant. Spectrosc. Rad. Trans.* 1988. Vol. 40. 577–589.
- [86] Sunyaev R. A., Titarchuk L. G. Comptonization of X-rays in plasma clouds. Typical radiation spectra // *Astron. Astrophys.* 1980. Vol. 86. N 1-2. P. 121–138.
- [87] Svensson R. The pair annihilation process in relativistic plasmas // *Astrophys. J.* 1982. Vol. 258. N 1-2. P. 321–334.
- [88] Svensson R. Electron-positron pair equilibria in relativistic plasmas // *Astrophys. J.* 1982. Vol. 258. N 1. P. 335–348.
- [89] Svensson R. The thermal pair annihilation spectrum: a detailed balance approach // *Astrophys. J.* 1983. Vol. 270. N 1. P. 300–304.
- [90] Svensson R. Steady mildly relativistic thermal plasmas: processes and properties // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1984. Vol. 209. N 1. P. 175–208.

- [91] Svensson R. Non-thermal pair production in compact X-ray sources: first order Compton cascades in soft radiation fields // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1987. Vol. 227. N 2. P. 403–451.
- [92] Svensson R. The nonthermal pair model for the X-ray and gamma-ray spectra from active galactic nuclei // *Astrophys. J. Suppl.* 1994. Vol. 92. N 2. P. 585–592.
- [93] Svensson R. Thermalization mechanisms in compact sources // *High Energy Processes in Accreting Black Holes* / Eds. J. Poutanen and R. Svensson. *Astronomical Society of the Pacific. Conference Series.* 1999. Vol. 161. P. 361–374.
- [94] Takahara F., Kusunose M. Electron-positron pairs in a mildly relativistic plasma in active galactic nuclei // *Astrophys. Space Sci.* 1986. Vol. 119. N 1. P. 217–219.
- [95] Tritz B. G., Tsuruta S. Effects of electron-positron pairs on accretion flows // *Astrophys. J.* 1989. Vol. 340. N 1. P. 203–215.
- [96] Wardziński G., Zdziarski A. Thermal synchrotron radiation and its comptonization in compact X-ray sources // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2000. Vol. 314. N 1. P. 183–198.
- [97] Westfold K. C. The polarization of synchrotron radiation // *Astrophys. J.* 1959. Vol. 130. N 1. P. 241–258.
- [98] Weymann R. The energy spectrum of radiation in the expanding universe // *Astrophys. J.* 1966. Vol. 145. N 2. P. 560–571.
- [99] Xue Y.-J., Wu X.-P. Reconstruction of radial temperature profile of galaxy clusters // *Astron. Astrophys.* 2000. Vol. 360. L43–L46.
- [100] Zdziarski A. A. Annihilation spectrum of relativistic plasma // *Acta Astronomica.* 1980. Vol. 30. N 4. P. 371–391.
- [101] Zel'dovich Ya. B., Sunyaev R. A. The interaction of matter and radiation in a hot-model universe // *Astrophys. Space Sci.* 1969. Vol. 4. P. 301–316. (Зельдович Я. Б., Сюняев Р. А. Взаимодействие вещества и излучения в горячей модели Вселенной // *Astrophys. Space Sci.* 1969. Vol. 4. P. 285–300.)

Оглавление

Введение	3
Г л а в а I. Классическая теория излучения	
§ 1. Уравнения Максвелла и их следствия	5
1. Уравнения Максвелла. 2. Энергетическое соотношение. 3. Потенциалы. 4. Уравнения для потенциалов. 5. Запаздывающие потенциалы.	
§ 2. Основные положения теории относительности	9
1. События и интервал. 2. Преобразование Лоренца. 3. Скаляры. 4. Векторы. 5. Примеры векторов. 6. Скорость. 7. Импульс. 8. Нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы. 9. Ускорение. 10. Квадрат ускорения. 11. Импульс фотона. 12. Эффект Доплера. 13. Абберрация. 14. Инварианты. 15. Векторы электромагнитного поля. 16. Относительная скорость.	
§ 3. Излучение точечного заряда	23
1. Постановка задачи. 2. Вычисление потенциалов. 3. Потенциалы на больших расстояниях. 4. Поле точечного заряда на больших расстояниях.	
§ 4. Излучение медленных и быстрых зарядов	32
1. Дипольное приближение. 2. Полное излучение быстрого заряда. 3. Угловое распределение. 4. Излучаемые импульс и энергия. 5. Движение по прямой.	
§ 5. Спектр излучения в волновой зоне	41
1. Преобразования Фурье от потенциалов. 2. Преобразования напряженностей. 3. Энергетические величины. 4. Разложения Фурье при периодическом движении заряда. 5. Спектр излучения периодического заряда. 6. Нерелятивистский заряд.	
§ 6. Термодинамическое равновесие	49
Г л а в а II. Тормозной и рекомбинационный механизмы	
§ 1. Излучение при кулоновском взаимодействии	50
1. Уравнения движения частиц. 2. Траектории движения. 3. Излучение электрона. 4. Спектр излучения электрона. 5. Расчет на поток. 6. Частные случаи.	

§ 2. Тормозной механизм (нерелятивистская теория)	62
1. Постановка задачи. 2. Оценка излучаемой энергии. 3. Спектр излучения электрона. 4. Усреднение по скоростям. 5. Поглощение. 6. Гаунтовские множители.	
§ 3. Релятивистское тормозное излучение	68
1. Описание процесса. 2. Сечение тормозного излучения. 2. Частные и предельные случаи. 4. Связь с нерелятивистскими величинами. 5. Поглощение и излучение. 6. Усреднение по энергиям электронов.	
§ 4. Рекомбинационный механизм	76
1. Сечение рекомбинации. 2. Излучательная способность. 3. Коэффициент ионизации. 4. Рекомбинационные радиолнии.	

Г л а в а III. Магнито-тормозной механизм

§ 1. Геометрия и терминология	87
1. Движение и излучение заряда. 2. Системы отсчета. 3. Постоянные. 4. Лабораторная система. 5. Системы отсчета поля. 6. Полное излучение и классификация.	
§ 2. Угловая зависимость излучения одиночного заряда в волновой зоне	96
1. Интенсивность магнито-тормозного излучения. 2. Предельные случаи. 3. Интегрирование по периоду. 4. Синхротронное излучение за период. 5. Вращение по окружности.	
§ 3. Спектр магнито-тормозного излучения в волновой зоне	103
1. Движение по окружности. 2. Формула Шотта. 3. Поляризация в линиях. 4. Полное излучение в линиях. 5. Импульс фотона в различных системах. 6. Спектр в системах поля. 7. Мощность излучения в системах поля.	
§ 4. Спектр синхротронного излучения	114
1. Направленное излучение в линиях. 2. Полное излучение в линиях. 3. Излучение в линиях в системе поля. 4. Усреднение по распределению энергий электронов. 5. Усреднение по направлениям поля. 6. О переносе магнито-тормозного излучения. 7. Поляризация в системах поля. 8. Плазменный котел.	

Г л а в а IV. Черенковское и переходное излучение

- § 1. Движение заряда в диэлектрике**134
1. Заряд в диэлектрике. 2. Потенциалы. 3. Моменты влияния. 4. Конус Черенкова. 5. Проекция скорости на направление излучения. 6. Примеры.
- § 2. Потенциалы заряда в диэлектрике** 142
1. Нахождение потенциалов. 2. Производные от потенциалов.
- § 3. Излучение Черенкова и его спектр**143
1. Поле и излучение. 2. Спектр черенковского излучения. 3. Излучаемая мощность.
- § 4. Переходное излучение** 147
1. Природа излучения. 2. Основные уравнения. 3. Преобразования Фурье. 4. Решения уравнений. 5. Амплитуды волн. 6. Предельные случаи.

Г л а в а V. Комптоновское рассеяние

- § 1. Описание комптоновского рассеяния**152
1. Комптоновское рассеяние и законы сохранения. 2. Две системы отсчета. 3. Роль комптоновского рассеяния. 4. Сечение комптоновского рассеяния.
- § 2. Кинетическое уравнение для комптоновского рассеяния и его частные случаи** 159
1. Релятивистские обозначения. 2. Релятивистское кинетическое уравнение комптоновского рассеяния. 3. Функции перераспределения. 4. Плоская атмосфера и однородное бесконечное пространство.
- § 3. Средние величины** 168
1. Полное сечение рассеяния. 2. Средняя частота. 3. Усреднение по направлениям. 4. Усреднение по энергиям. 5. Баланс энергии.
- § 4. Вычисление функции перераспределения**180
1. Вычисление интеграла по азимуту. 2. Вычисление интеграла по косинусу ζ . 3. Ограничения на значения переменных. 4. Частные случаи и соотношения симметрии. 5. Усреднение ФП по направлениям. 6. Регуляризация ФП.

§ 5. Нерелятивистский предел	189
1. Почти нерелятивистские электроны. 2. Разложение подынтегральной функции. 3. Усреднение по распределению Максвелла. 4. Плоский слой и бесконечное однородное пространство. 5. Комptonизация.	
§ 6. Решения кинетических уравнений	196
1. Уравнение Компанейца и его свойства. 2. Линейное уравнение и функция Грина. 3. Диффузионное решение. 4. Решение стационарного линейного уравнения. 5. Решение недиффузионного уравнения. 6. Эволюция однородного поля излучения.	
§ 7. Астрофизические объекты с большой ролью комптоновского рассеяния	106
1. Джеты из активных ядер галактик. 2. Нейтронные звезды и черные дыры в двойных системах. 3. Горячие короны аккреционных дисков. 4. Реликтовое излучение. 5. Горячий газ в скоплениях галактик. 6. Другие объекты.	
Г л а в а VI. Двухфотонные рождение и аннигиляция электрон-позитронных пар	
§ 1. Кинематика процессов	211
1. Описание процессов с парами. 2. Законы сохранения и их следствия. 3. Импульсы при аннигиляции. 4. Аннигиляция в системе центра масс. 5. Импульсы частиц при рождении пары. 6. Неоднозначность и ее устранение. 7. Рождение пары в системе центра масс.	
§ 2. Сечения процессов	224
1. Дифференциальные сечения процессов. 2. Полные сечения процессов. 3. Средние степени частоты фотонов.	
§ 3. Кинетическое уравнение для фотонов при процессах с парами	229
1. Функции распределения. 2. Формулировка кинетического уравнения. 3. Кинетическое уравнение в форме уравнения переноса излучения. 4. Поглощение. 5. Излучение.	
§ 4. Усреднение коэффициентов	234
1. Усреднение коэффициента спонтанного поглощения. 2. Усреднение вынужденного поглощения. 3. Ограничения на переменные. 4. Усреднение по направлениям импульсов фотонов. 5. Первообразная функция. 6. Усреднение излучения. 7. Средние частоты.	

Приложение А. О гамма-функции	252
1. Определение и продолжение. 2. Бета-функция. 3. Формулы дополнения, удвоения и утроения. 4. Гамма-функция от комплексного аргумента. 5. Формула Стирлинга.	
Приложение Б. О функциях Бесселя	256
1. Определение. 2. Модифицированные функции. 3. Случай целого порядка. 4. Интегральные представления. 5. Рекуррентные соотношения. 6. Выражения через функции Макдональда. 7. Поведение вблизи нуля. 8. Асимптотики при $z \rightarrow \infty$. 9. Приближение ВКБ при больших значениях порядка. 10. Формулы Лангера. 11. Вычисление и асимптотики функции $K_{i\mu}(z)$. 12. Произведения функций Бесселя. 13. Два вспомогательных интеграла. 14. Ряды бесселевых функций. 15. Два соотношения.	
Приложение В. Некоторые вспомогательные интегралы	278
1. Интегралы по зенитному расстоянию. 2. Интегралы $U_n(\beta)$. 3. Интегралы $V_n(\beta)$. 4. Интегралы с тремя индексами. 5. Гиперболические интегралы.	
Заключение	281
Список литературы	283